

# Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas(\*)

GERARD VERGNAUD(\*\*)

O problema mais difícil para uma investigação interdisciplinar como a investigação em didáctica é desenvolver conceitos e métodos susceptíveis de constituírem uma abordagem científica. Os psicólogos tendem a transportar pura e simplesmente o seu quadro de referência habitual, quer se trate da aprendizagem associativa para os empiristas, de estruturas lógicas para os piagetianos, do tratamento de informação para os cognitivistas influenciados pelos modelos informáticos e da psicolinguística para outros. Por seu turno, os matemáticos e os professores de matemática tendem a satisfazer-se com o tipo de conhecimentos matemáticos que lhes é familiar e com algumas teorias educativas gerais.

Estudar os processos de transmissão e de apropriação dos conhecimentos matemáticos como um domínio científico próprio constitui, actualmente, uma questão científica de grande importância e que não é redutível nem à psicologia, nem às matemáticas, nem a qualquer outra ciência. Não se quer com isto dizer que a didáctica das matemáticas seja independente das ideias provenientes das outras ciências, bem pelo contrário; mas

ela possui uma identidade própria que é necessário procurar caracterizar.

Esta identidade deve-se principalmente à especificidade dos conteúdos de conhecimento cuja transmissão e apropriação ela estuda, à originalidade dos fenómenos de ensino em classe, e à necessidade com que ela se defronta ao estudar os processos que se situam em escalas de tempo muito diferentes: o crescimento dos conhecimentos a longo prazo na criança e no adolescente, e a evolução a curto prazo das concepções e procedimentos do aluno face a situações novas e às explicações que lhe são dadas: Abordarei sucessivamente os quatro pontos seguintes:

1. uma concepção interactiva na formação dos conhecimentos.
2. uma abordagem desenvolvimentalista.
3. os conceitos de teorema-em-acto e o campo conceptual.

---

(\*\*) Este artigo retoma a maior parte dos temas e exemplos desenvolvidos num artigo anterior, em inglês: «Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematica Education: some theoretical and methodological issues», *For the Learning of Mathematics*, 3, 2, 1982, 31-41.

---

(\*) C. N. R. S.

4. a representação e as relações entre significados e significantes.

### 1. UMA CONCEPÇÃO INTERACTIVA DA FORMAÇÃO DOS CONHECIMENTOS

Em primeiro lugar nos seus aspectos práticos, bem como nos seus aspectos teóricos, o saber forma-se a partir de problemas a resolver, quer dizer, de situações a dominar. Consta-se isto na história das ciências e das técnicas, e também no desenvolvimento dos instrumentos cognitivos da criança, nomeadamente no domínio do espaço e na compreensão e categorização dos objectos usuais. Isto deveria ser igualmente verdadeiro no ensino das matemáticas, mas não é o que se verifica. A tendência mais corrente é a de ensinar «maneiras de fazer» ou algoritmos, ligando estes problemas a classes relativamente limitadas. Por «problema» entenda-se, no sentido lato que lhe dá o psicólogo, qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver actividades de exploração, hipótese e verificação, para produzir uma solução: este procedimento não é necessariamente o mais geral ou o mais económico; pode mesmo ser falso, o que nem por isso deixa de ser procedimento a estudar em pé de igualdade com os outros.

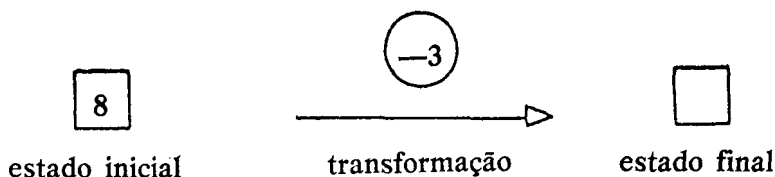
Tomando «problema» no seu sentido mais geral, constitui para a criança um «problema» comparar os efectivos de duas colecções ou o conteúdo de dois recipientes, seriar uma sequência de objectos em função do tamanho ou do peso, ou reconhecer a esquerda e a direita de um personagem que se situe de frente para ela; constitui evidentemente um «problema» organizar dados

numéricos para saber quais é preciso utilizar e por que ordem devem ser tratados; mas constitui também um «problema» para as crianças calcular o efectivo de um conjunto formado por duas partes sem tornar a contar cada uma das duas partes (se já se contou cada uma delas).

É um objectivo prioritário, na investigação em didáctica, investigar, analisar e classificar, tão exaustivamente quanto possível, as situações-problema que conferem significação e função a um conceito. Isto permite, em primeiro lugar, apelar no ensino a uma maior variedade de relações e problemas; em segundo lugar, aprofundar a epistemologia de um conceito, isto é, principalmente a sua função (a que problemas ele responde) e a sua radicação (em que outros conceitos ele se apoia). As concepções dos alunos são modeladas pelas situações com que eles se depararam. Isto pode levar a grandes desfasamentos entre estas concepções e os conceitos matemáticos: por exemplo, se um aluno de 4 éme só compreende o conceito de fracção como uma quantidade fraccionária, numa relação parte-todo (parte de bolo, parte de uma colecção), ele não pode aperceber a riqueza e o alcance dos números racionais. Do mesmo modo para os números negativos, se ele considerar que os números representam quantidades: como não há quantidade negativa, os números negativos não têm sentido algum.

#### *Tomemos o exemplo da subtracção*

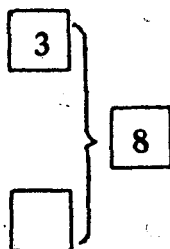
A primeira concepção da subtracção, para uma criança pequena, consiste na diminuição de uma quantidade inicial, por consumo, perda ou venda, por exemplo:



*Exemplo 1:* Jean tinha 8 bombons; come 3. Quantos bombons tem agora?

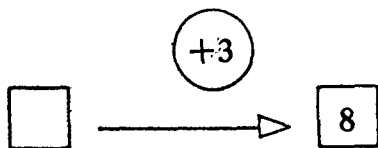
A partir de uma tal concepção, não é imediato compreender a subtração:

— como um complemento



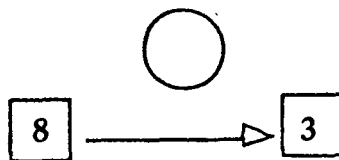
*Exemplo 2:* Há 8 crianças à mesa no aniversário de Dorothée. 3 são raparigas. Quantos rapazes há?

— como o inverso de um aumento



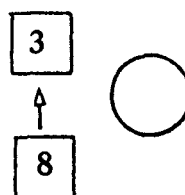
*Exemplo 3:* Janine acaba de receber 3 francos da avó. Tem agora 8 francos: Quanto é que ela tinha antes?

— como uma diferença entre estados sucessivos



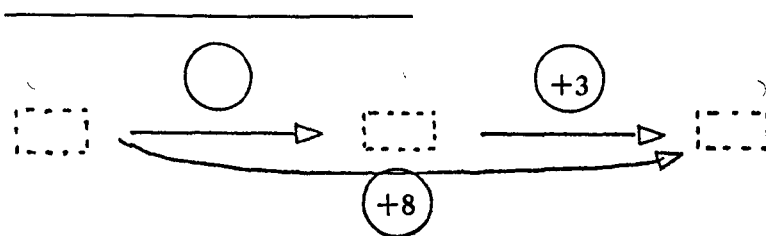
*Exemplo 4:* Robert tinha 8 berlindes antes de jogar com a Isabelle. Agora tem 3 berlindes. O que é que se passou durante o jogo?

— como uma relação de comparação



*Exemplo 5:* Suzanne tem 3 francos no bolso. Berthyl tem 8. Quanto é que Suzanne tem a menos que Berthyl?

— como uma diferença entre transformações



*Exemplo 6:* Frédéric jogou duas partidas de berlinde. Na segunda ganhou 3 berlindes. Ele já não se lembra do que se passou na primeira partida. Mas quando ele, no fim, conta os berlindes, apercebe-se de que ganhou 8 berlindes ao todo. O que é que se passou na primeira partida?

— poderiam ser propostas outras categorias de problemas, por exemplo:

(Ver figura 7 na página seguinte)

Pode-se facilmente imaginar as dificuldades que as crianças podem encontrar na extensão da significação da subtração a estes diferentes casos, a partir da sua concepção primitiva da subtração como «diminuição».

Cada um dos casos atrás evocados supõe um cálculo relacional (cálculo sobre relações) distinto; e, no entanto, todos estes cálculos relacionais conduzem à escolha da mesma operação aritmética 8-3.

Os investigadores começam a conhecer bastante bem os meios através dos quais as crianças abordam estes diferentes problemas (Carpenter, Moser & Romberg, 1981) e as

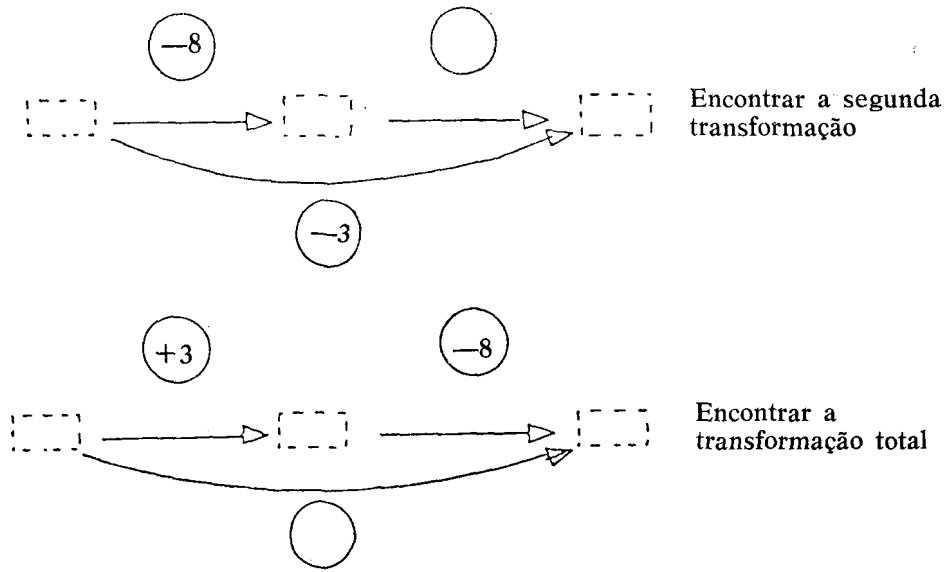
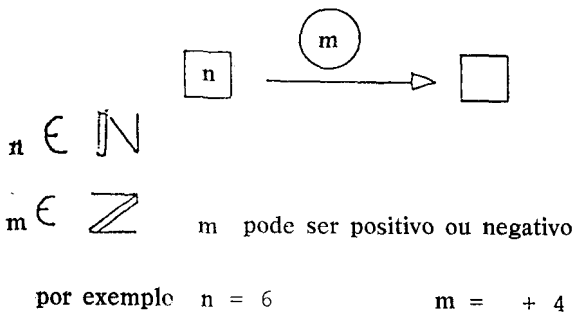


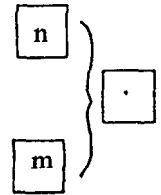
Fig. 7

etapas por que passam, no decurso dos longos anos do ensino elementar... e do ensino secundário. A maior parte das crianças depara com dificuldades, na adição e na subtracção de transformações ou de relações, até ao fim do ciclo dos liceus e mesmo para além dele.

Observam-se conflitos importantes e duradouros entre as concepções das crianças e os conceitos do professor de matemática. Por exemplo, num grande número de problemas, as concepções das crianças são melhor representadas por um modelo de operação unário que pelo modelo da lei de composição binária. Com efeito, a adição pode muitas vezes ser encarada segundo o modelo de uma operação externa de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{N}$  (se se raciocinar com inteiros).



e não segundo o modelo da lei interna em  $\mathbb{N}$ , que apenas reflecte bem a composição de duas quantidades



$$n, m \in \mathbb{N}$$

por exemplo  $n = 6$   $m = 4$

As transformações no tempo e as relações de comparação não podem ser adequadamente representadas por uma composição de duas quantidades (lei binária interna), pois elas envolvem números relativos.

Por outro lado, o modelo da operação unária está mais próximo da concepção primitiva das crianças (partir de um estado inicial, agir). Veremos outras consequências deste desfasamento entre concepções do sujeito e conceitos matemáticos quando abordarmos as representações simbólicas.

Os professores não deveriam ignorar o facto de as concepções dos alunos serem

modeladas pelas situações da vida quotidiana e pela sua «primeira compreensão» das relações novas com que deparam. Eles têm de saber com que é que lidam, e conhecer ou reconhecer melhor as concepções mais primitivas, os erros e as incompreensões que se lhes seguem, o modo pelo qual elas mudam ou podem mudar: através de que situações? De que explicações? De que etapas?

Os problemas de ensino das matemáticas não se resolvem por definições, e as concepções erradas dos alunos só podem mudar verdadeiramente se entrarem em conflito com situações que elas não permitem tratar. É essencial que os professores possam perspectivar e dominar o conjunto de situações susceptíveis que levem e ajudem os alunos a «acomodarem» os seus pontos de vista e os procedimentos a novas relações (a inversão, a composição e a decomposição de transformações, por exemplo) ou dados novos (grandes números, decimais, fracções...). É a única maneira de levar os alunos a analisarem as coisas com mais profundidade e a revelar ou ampliarem as suas concepções.

*A resolução do problema é a origem e o critério do saber operatório.* Devemos ter sempre esta ideia em mente e sermos capazes de proporcionar aos alunos situações que visem alargar a significação de um conceito e pôr à prova as competências e as concepções dos alunos. É essencial tanto para uma teoria das situações como para uma teoria do conhecimento operatório. Esta declaração pode parecer excessivamente virada para as aprendizagens práticas, mas não o é; concepções e competências são duas faces de uma mesma moeda; as competências estão sempre ligadas a certas concepções mesmo se são fracas e fragmentadas. Não há procedimento que se possa desenvolver e sobreviver por si próprio, livre de todas as representações das relações de que trata ou que implica. Reciprocamente um conceito ou um teorema que não possam

ser utilizados em situações-problema em que são pertinentes permanecem vazios de sentido.

Assim, não existem só problemas práticos. Existem também problemas teóricos como, por exemplo, a extensão da multiplicação aos números relativos: a multiplicação de dois números negativos não pode ser reduzida a um problema prático verdadeiramente significativo da multiplicação, salvo se se considerar a utilização do cálculo algébrico como um problema prático. Digamos que muito mais que a coerência dos cálculos o problema eminentemente teórico aparece também como um problema prático. Esta dialéctica não é apenas um simples efeito retórico: prática e teoria estão em última análise indissolúvelmente ligados.

## 2. UMA ABORDAGEM DESENVOLVIMENTALISTA

*As concepções e as competências desenvolvem-se ao longo de um período de tempo.* Isto não é verdade apenas para as estruturas gerais do pensamento mas também para os conteúdos dos conhecimentos. Por exemplo, os conceitos de fracção e de relação têm as suas raízes nas actividades que têm um significado para os alunos de 7 a 8 anos, quando se trata de valores simples como  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{4}$ ; e, entretanto, o conceito de número racional é uma fonte durável de dificuldade para os alunos de 15 ou 16 anos e para muitos adultos. No que concerne às estruturas aditivas ainda que alguns princípios da adição e da subtracção sejam compreendidos pelos alunos de 3 ou 4 anos, 75% dos alunos de 15 anos falham em problemas como os seguintes (Marthe, 1982):

*Exemplo 7:* Jean recebeu 45 francos da sua avó. Em seguida vai a um grande armazém e compra coisas diferentes. Quando conta o seu dinheiro, nota que tem 37 fran-

cos a menos do que tinha antes de receber o dinheiro da avó, Quanto gastou?

*Exemplo 8:* O senhor Dupont é viajante comercial. Conheça por descer ao longo do vale do Loire, 35 km para Oeste; depois parte para Este. Quando pára, encontra-se a 47 km a Este do seu ponto de partida de manhã. Qual é a distância percorrida durante a segunda parte do seu trajecto?

Ora os mesmos alunos de 15 anos receberam um ensino sobre as relações de Chasles em geometria que são directamente pertinentes para o exemplo 8.

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$$

$$\overline{AB} = \text{abs}(B) - \text{abs}(A)$$

assim como um ensino de algebra que lhes deveria permitir resolver qualquer equação da forma:

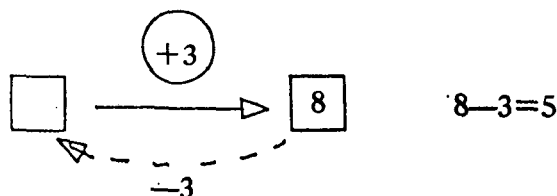
$$a + x = b \Rightarrow x = b - a$$

Não contando com a dificuldade que existe em conceber plenamente as transformações e as relações que estão implicadas nos exemplos 7 e 8.

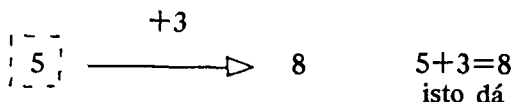
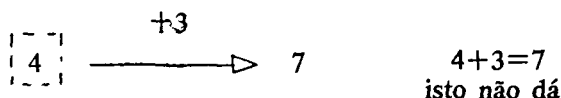
A descrição de estadios gerais de desenvolvimento, como os descritos por Piaget ou por outros psicólogos do desenvolvimento não permite compreender o desenvolvimento das «competências-conhecimentos» implicados nos problemas de subtracção acima citados. São necessários modelos bastante mais finos, directamente associados ao contexto matemático dos problemas.

A primeira prioridade é, portanto, reconhecer a variedade das classes de problemas possíveis, de analisar com cuidado a sua estrutura e as operações de pensamento necessárias para as tratar. Por exemplo, não é a mesma operação de pensamento inverter uma transformação directa (exemplo 3), encontrar um complemento (exemplo 2), ou encontrar uma diferença (exemplo 5). Tam-

bém não é a mesma operação, no exemplo 3, inverter a transformação



ou formular uma hipótese sobre o estado inicial, e corrigi-la depois do ensaio.



A evidência, estes dois «raciocínios» não têm a mesma força; o segundo tem apenas um valor local e depende muito dos valores numéricos tomados pelas variáveis. Os pequenos números inteiros, alguns números redondos (300-800) permitem resolver certos problemas através de procedimentos não canónicos. Um meio possível de levar os alunos a pesquisar e dominar os procedimentos com maior poder e concepções mais gerais, é justamente mudar os valores numéricos, e utilizar, por exemplo, números grandes ou números decimais (Brousseau, 1981).

Evidentemente, que isto não é independente do desenvolvimento cognitivo dos alunos; e a descrição da complexidade relativa dos problemas e dos procedimentos assenta largamente sobre uma abordagem desenvolvimentalista (ou psicogenética) da aprendizagem das matemáticas. É de salientar, ao mesmo tempo, que esta descrição, para ter sentido, não deve considerar um conjunto restrito de problemas, nem um período muito curto do desenvolvimento das crianças ou da escolaridade. Podemos encontrar,

com efeito, desníveis de vários anos entre crianças para a mesma competência; e as condutas observadas para um problema, só adquirem o seu sentido se as pudermos reportar a condutas observadas noutros problemas (da mesma categoria ou de categoria diferente).

Existem fortes correlações, fortes hierarquias e também numerosas situações metafóricas no tratamento dos problemas numéricos. É esta consideração que me conduziu à convicção que é necessário, para compreender o desenvolvimento e a apropriação dos conhecimentos, estudar conjuntos bastante vastos de situações e conceitos ou seja *campos conceptuais*. Estudar a aprendizagem de um conceito isolado, ou de uma técnica isolada, não tem sentido, praticamente.

Antes de explicar o que entendo por «campo conceptual» e por «teorema em acto», sobre o exemplo das estruturas aditivas, queria concluir brevemente este parágrafo acerca do desenvolvimento.

A lentidão do desenvolvimento dos conhecimentos é perigosamente subestimada pelos professores, pelos pais e pelos programas. Por exemplo, considera-se frequentemente que um capítulo de matemáticas estudado deve estar compreendido, pelo menos por uma parte importante dos alunos, pelo que no ano seguinte podemos considerá-lo como adquirido. Todas as investigações empíricas mostram, pelo contrário, que será muito mais sensato voltar às mesmas coisas ano após ano indo um pouco mais profundamente, introduzindo situações cada vez mais complexas contendo novos aspectos, mais poderosos, de um mesmo conjunto de conceitos, eventualmente um conceito novo. As actividades de resolução do problema ou do tratamento de novas situações deveriam ser largamente privilegiadas, uma vez que é verdade que existem diferentes categorias de problemas, e que apelam ao domínio de propriedades diferentes de um mesmo conceito. É um aspecto essencial para uma abordagem desenvolvimentalista.

### 3. OS CONCEITOS DE «TEOREMA-EM-ACTO» E DE «CAMPO CONCEPTUAL»

É largamente reconhecido, em educação, que a actividade dos alunos deve ser favorecida porque é o único meio que lhes permite construir ou apropriar-se de um saber operativo. No entanto, não se reconhece em que é que esta acção em situação favorece a formação do conceito. Neste ponto falta-nos clarificar um problema teórico essencial.

Os matemáticos e os professores sabem em geral o que é um invariante: uma propriedade ou uma relação que é conservada sobre um certo conjunto de transformação. Por exemplo em geometria, a rotação e a simetria conservam certas propriedades das figuras, a homotetia não conserva as mesmas propriedades bem como a projecção. Mas os matemáticos e os professores nem sempre reconheceram o facto bem estabelecido pela psicologia cognitiva desenvolvimentalista (e por Piaget em primeiro lugar) que existem numerosos invariantes cuja identificação pelas crianças dá lugar a uma laboriosa e progressiva construção, enquanto que o adulto não imagina que isso possa constituir um problema.

Piaget, identifica o primeiro de alguns destes invariantes e, nomeadamente, invariantes espaciáveis (Piaget, 1948) e invariantes quantitativos (Piaget, 1941, 1978):

- o cardinal de uma colecção quando se muda a disposição espacial.
- a quantidade de sumo de laranja quando se transfere de um copo largo para um estreito.
- etc....

Não é evidente, para a criança pequena, que há mais sumo de laranja quando este sobe mais alto (no copo estreito)?

Os invariantes constituem um tema teórico recorrente na obra de Piaget, e, este,

por isso não reconheceu plenamente a importância dos invariantes mais numerosos em matemáticas e em física: os invariantes relacionais. Por «invariante relacional», designo uma relação que permanece invariante para um conjunto de transformações de operações ou de variações.

Tomemos um exemplo nas relações de parentesco: para uma criança não é fácil perceber a ideia que a relação «filho de» é verdadeira ao mesmo tempo para ele e seu pai, para ele e sua mãe, o seu amigo Mathieu e os pais de Mathieu, e até o seu próprio pai e os seus avós: como é que o seu pai pode ser ao mesmo tempo pai e filho?

Problemas semelhantes são levantados pelas relações espaciais (atrás, a oeste de...), as relações de ordem entre grandezas e entre números (maior que, múltiplo de, n maior que...) e por outras relações.

Ao lado destas relações binárias as crianças encontram, mesmo em idades precoces, relações do mais alto nível lógico a que chamamos normalmente teoremas: por exemplo se Pedro nasceu antes de Janine e Janine antes de Robert, Pierre nasceu antes de Robert; se Joël e André estão face a face, o braço direito de Joël está em frente do braço esquerdo de André; se se conta uma colecção A e depois uma colecção B obtém-se o mesmo resultado que se se contar a colecção B e depois a colecção A.

A criança encontra um grande número destes teoremas assim que actua sobre o real e que resolve problemas no espaço, no tempo, no domínio das quantidades e das grandezas. Estes «teoremas-em-acto» não são, evidentemente, expressos sob uma forma matemática, nem mesmo às vezes sob qualquer outra forma. É por esta a razão que eu os chamo «teoremas-em-acto». A maior parte das vezes apenas têm uma validade local para as crianças e são associados a certos valores de variáveis, constituindo isto uma primeira base que poderá ser alargada em seguida.

O fim essencial de uma análise cognitiva das tarefas e das condutas é identificar tais teoremas-em-acto, mesmo se isto não for fácil, e se não for fácil de chegar a um acordo sobre os critérios comportamentais destes teoremas.

Tomemos o exemplo do terceiro axioma da teoria da medida.

$$\forall X, Y \quad m(X \cup Y) = m(X) + m(Y)$$

, dado que a operação seja adequadamente escolhida.

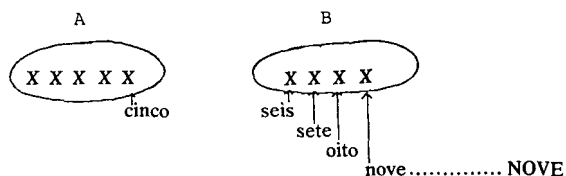
No caso das quantidades discretas e dos cardinais, este axioma torna-se

$$\forall X, Y \quad \text{card}(X \cup Y) = \text{card}(X) + \text{card}(Y)$$

dado que a operação de união seja uma união disjunta ( $X \cap Y = \emptyset$ ). Um tal axioma é utilizado necessariamente por uma criança quando, para pôr a mesa, conta as pessoas que estão na sala e as pessoas que estão no jardim, depois soma os dois números para saber quantas pessoas há ao todo. É um procedimento mais económico (e socialmente mais aceite) que juntar todas as pessoas no jardim para contar o conjunto.

Realizaram-se numerosos trabalhos sobre as primeiras aprendizagens da adição que nos mostram a emergência progressiva de tal teorema-em-acto.

O procedimento que consiste em não contar o todo quando se contou já as partes, mas a «antecipar a contagem» (*counting on*) partindo do cardinal do primeiro conjunto e contando tantas vezes quantas os elementos do segundo conjunto.



constitui uma etapa crucial no reconhecimento, pela criança, da propriedade das medidas acima enumeradas.

Este procedimento implica, de resto, um outro teorema importante

$$\forall m, n \quad m \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{+1} m+n$$

n vezes

Este procedimento de «antecipar a contagem» é uma etapa intermediária decisiva entre o procedimento que consiste em contar o todo, e o procedimento que consiste

em adicionar  $m$  e  $n$ . Para mais detalhes podemos reportarmo-nos a Fuson (1981).

Assim, há muitos outros axiomas e teoremas implicados na construção do conceito de número natural como medida de quantidades discretas. Alguns destes são percebidos e apropriados desde os 3 ou 4 anos de idade, outros somente aos 6 ou 7 anos; outros são ainda difíceis para as crianças de 9 anos.

$2 \xrightarrow{+1} 3$ $3 \xrightarrow{+1} 4$ $\dots$	quaisquer que sejam os objectos contados
$2 \xrightarrow{+2}$	é equivalente a $2 \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1}$
$2 \xrightarrow{+3}$ $\dots$	é equivalente a $2 \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1}$
$n \xrightarrow{+2}$	é equivalente a $n \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1}$
$m \xrightarrow{+n}$	é equivalente a $m \xrightarrow{+1} \xrightarrow{+1} \dots \xrightarrow{+1}$ (n vezes)
$2 \xrightarrow{+5}$	é equivalente a $5 \xrightarrow{+2}$

- o número de elementos de uma colecção não depende da sua disposição espaciável (conservação)
- $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$  (ver acima)
- $A \subset B \Rightarrow card(A) < card(B)$  (inclusão)

Muitos outros teoremas podem ser identificados, sendo necessários para resolver os problemas de adição ou de subtração como os dos exemplos 1 a 8 mais acima. Será fastidioso enumerá-los mas são de uma grande diversidade.

A paisagem das estruturas aditivas é muito mais complexa do que se espera através de um breve olhar. O mesmo se verifica nas estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1983).

Isto resulta ao mesmo tempo que a diversidade das situações de adição e de subtração, que a diversidade dos procedimen-

tos de tratamento e, veremos mais adiante, que a diversidade das representações simbólicas. Isto resulta também da muito progressiva e lentíssima compreensão, pelas crianças, das propriedades das relações em jogo.

É esta diversidade que me levou a falar de *campo conceptual*. Um conceito pode ser definido, com efeito, como um *triplet* de três conjuntos (S, I, J):

S: o conjunto de situações que dão sentido ao conceito;

- I: o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito;
- J: o conjunto das representações simbólicas que podem ser utilizadas.

Abordarei, mais adiante, o problema das representações simbólicas. Limitar-me-ei aqui a três considerações essenciais para a compreensão do que é um campo conceptual e as razões pelas quais é necessário estudar os tais campos e não os conceitos isolados.

- Uma situação dada não põe, geralmente, em execução todas as propriedades de um conceito. Se queremos fazer os alunos encontrar todas estas propriedades é preciso fazer, necessariamente, referência a uma diversidade de classes de problemas.
- Uma dada situação não põe habitualmente em jogo um único conceito; a sua análise requer, a maior parte das vezes, vários conceitos, e as dificuldades encontradas pelos alunos derivam, em geral, de vários conceitos. Por exemplo, os problemas da adição e de subtracção podem implicar os conceitos de medida, de transformação, de comparação, de diferença, de inversão, de operação unária, de operação binária, de número natural, de número relativo, de função, de abcissa e ainda de outros.
- A formação de um conceito, particularmente se o considerarmos através das actividades de resolução de problema, cobre, em geral, um período de tempo muito longo, com muitas interacções e desníveis. Não se pode compreender a significação dos erros ou dos procedimentos de uma criança de 13 anos se não se conhece de que maneira são formadas as suas concepções e competências na idade de 8 ou 9 anos, ou mesmo de 4 ou 5 anos, e

a maneira como estas concepções e competências evoluíram através de uma mistura de situações, de definições, de interpretações e de representações simbólicas.

É um facto que os alunos tentam dar sentido às novas situações e novos conceitos aplicando, adaptando-os, os seus conhecimentos anteriores. Como poderiam fazer de outro modo?

A consequência principal destes três pontos é que os psicólogos e os didácticos não devem tomar como objecto de estudo objectos muito pequenos, mas, pelo contrário, campos conceptuais bastante largos. À falta disto o risco maior é de não poder compreender o processo complexo e laborioso pelo qual as crianças e os adolescentes dominam (ou não dominam) as matemáticas.

*Um campo conceptual* pode ser definido como *um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão.*

Esta definição não se quer rigorosa; ela reenvia muito mais para um conjunto de situações que para um conjunto de conceitos. A descrição de um campo conceptual requer ao mesmo tempo a análise das situações (ou dos problemas), a análise dos procedimentos de tratamento utilizados pelos alunos, os propósitos que têm e suas argumentações, as representações simbólicas que utilizam. O uso de uma representação simbólica pode ser uma ajuda eficaz, mesmo crucial, podendo também dar lugar a graves erros de interpretações.

Mas antes de abordar a questão das representações simbólicas, é necessário fazer ainda duas chamadas de atenção:

— O desenvolvimento dos conhecimentos práticos e teóricos de uma criança faz-se através de campos conceptuais: alguns são de ordem matemática (as estruturas aditivas, as estruturas multiplicativas, o espaço...), outros são de ordem física (a dinâ-

mica, a electricidade...) ou económica (as compras e os preços, os ganhos e as perdas...), outros são de ordem lógica (classificações, lógica de proposições e operações booleanas...). Estes campos conceptuais não são independentes mas interagem entre eles.

— Os teoremas-em-acto evocados mais atrás englobam uma grande variedade de conteúdos e permitem avaliar e analisar, de maneira rigorosa, os conhecimentos da criança: quais são operatórios e quais não são? Com efeito, é necessário sublinhar que certos conhecimentos apreendidos e pretensamente conhecidos dos alunos podem não ser utilizáveis pelas crianças: teoremas que não são teoremas-em-acto. Ao contrário existem conhecimentos operatórios construídos espontaneamente pela criança que nunca tomam a forma de verdadeiros enunciados: teoremas-em-acto que não são teoremas. Um dos problemas do ensino e da didáctica é favorecer a transformação dos teoremas em teoremas-em-acto e reciprocamente.

#### 4. A REPRESENTAÇÃO DAS RELAÇÕES ENTRE SIGNIFICADOS E SIGNIFICANTES

Recordemos, em primeiro lugar as principais categorias de relações implicadas nas estruturas aditivas.

Os esquemas utilizados no quadro I remetem para símbolos diferentes, para a representação das composições binárias, e para transformações e comparações; o mesmo para a representação dos números naturais (medidas) e dos números relativos (transformações, comparações, dívidas ou créditos, abcissas...).

(ver *Quadro I* na página seguinte)

Os exemplos 1 a 8, propostos neste artigo, não reenviam a nenhuma relação do tipo V ou do tipo VI. Nós apenas abordamos, aqui, uma parte das estruturas aditivas. O qua-

dro I mostra uma grande variedade de problemas, sobretudo se se considera que, para cada relação, existem várias classes de problemas.

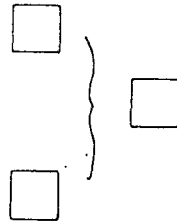
Tomemos a relação II: ela dá lugar a seis classes de problemas dado que se procura o estado final, a transformação, e o estado inicial, e dado que a transformação é positiva ou negativa. Quatro destes problemas apelam para uma subtracção, os dois outros para uma adição. Na relação IV, o número de classes de problemas é muito maior porque o signo das transformações intervêm para cada uma dentre elas assim como o valor absoluto (para mais detalhes ver Vergnaud, 1981).

A escolha de esquemas facilita a comunicação, porque estes permitem distinguir casos que os alunos justamente consideram como distintos. Uma representação algébrica faz perder muita informação porque identifica sob o mesmo sinal (+, —, =) conceitos elementares relativamente diferentes uns dos outros.

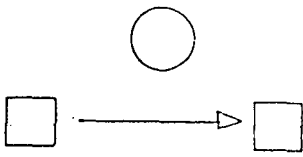
Enumeremos algumas das identificações pelas quais a álgebra adquire a sua força, e confunde ao mesmo tempo objectos que, muito frequentemente, permanecem diferentes para os alunos.

- Identificação dos números naturais aos inteiros positivos (mesma coisa para os decimais ou os reais).
- Identificação à mesma operação de adição (representada pelo sinal +) da soma de duas medidas, e a aplicação de uma transformação positiva, da composição de duas transformações, e a inversão de uma transformação negativa, etc...
- Identificação à mesma operação de subtracção (representada pelo sinal —) da aplicação de uma transformação negativa, da diferença entre medidas, entre estados, entre transformações, da inversão de uma transformação positiva, etc...

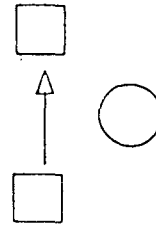
**QUADRO 1**  
Principais relações aditivas



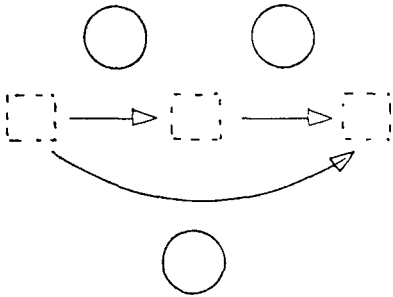
I Composição de medidas



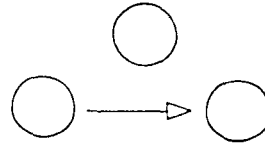
II Transformação duma medida



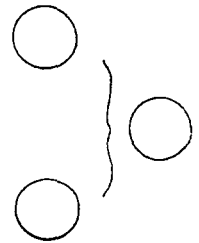
III Comparação de medidas



IV Composição de transformações



V Transformação duma relação



VI Composição de relações

Legenda:



medida: número sem signo



transformação ou relação: número com signo



composição de estados { estados-medidas  
estados-relativos



transformação (mudança de estado)



relação (entre estados)

— Identificação de diferentes significações do sinal de igualdade: é o mesmo que, dá como resultado, é equivalente a.

Tudo isto é perfeitamente legítimo e necessário mas sob que condições, com que explicações e a que nível escolar?

A relação II é caracterizada por um aspecto dinâmico (transformação no tempo), a presença de uma operação unária positiva ou negativa, a presença de uma relação parte-todo entre estados. Estas são duas situações relevantes da relação II que estão na origem das concepções primitivas da criança: a adição, é uma quantidade que cresce, e a subtracção é uma quantidade que decresce (Starkey e Gelman, 1981). Pode-se, portanto, esperar dificuldades assim que as crianças têm que alargar a outras classes de problemas e a outras relações as suas concepções da adição e da subtracção. Por exemplo, as relações I e II não comportam o aspecto temporal. A relação III não comporta a relação parte-todo.

Estas considerações têm relações estreitas com o problema das representações simbólicas.

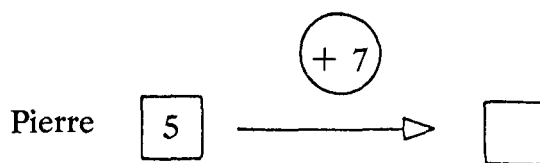
Tomemos ainda três exemplos de problemas:

Exemplo 9: Pierre tem 5 berlindes. Joga uma partida com os amigos e ganha 7 berlindes. Quantos berlindes tem agora?

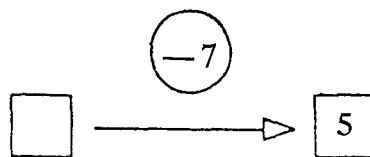
Exemplo 10: Robert acaba de perder 7 berlindes. Tem agora 5 berlindes. Quantos berlindes tinha ele antes de jogar?

Exemplo 12: Thierry acaba de jogar duas partidas de berlindes. Na segunda partida perdeu 7 berlindes. Quando conta os seus berlindes, no fim, aperecebe-se que ganhou 5 berlindes. O que se passou na primeira partida?

É interessante saber que o problema «Robert» é resolvido 1 a 2 anos mais tarde que o problema «Pierre» e que o problema «Thierry» tem 75 % de fracassos na *sixième*. Isto pode-se explicar pelo facto de que o problema «Pierre» consiste em encontrar um estado final.

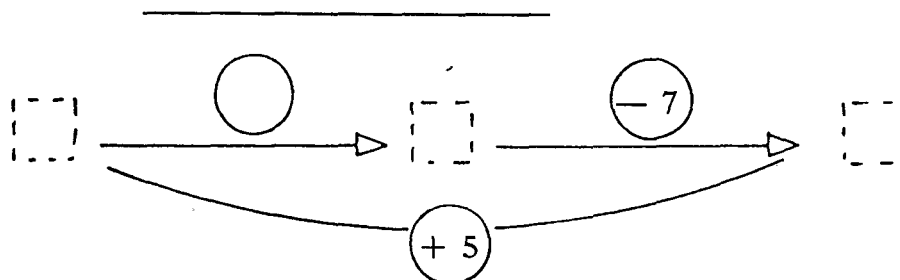


enquanto que o problema «Robert» consiste em encontrar um estado inicial

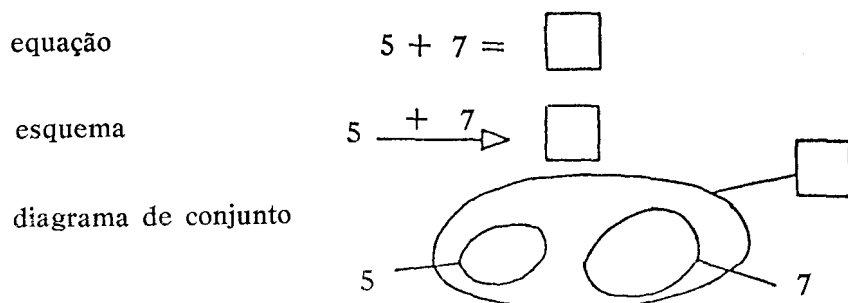


e que o problema «Thierry» consiste em encontrar uma transformação, no caso mais complexo da composição de duas transformações sucessivas.

Representar estes três problemas por equações e por diagramas de conjuntos põe em evidência dificuldades muito desiguais.

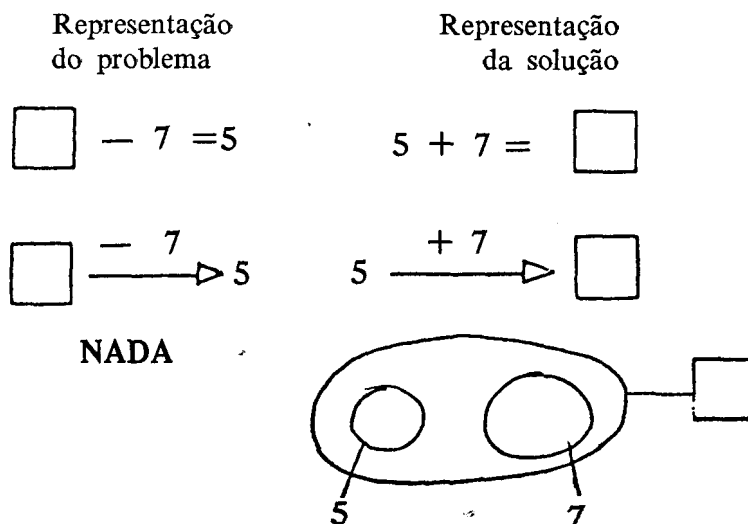


Por exemplo, pode-se representar o problema «Pierre» assim:



Estas três representações são aceitáveis e representam ao mesmo tempo o problema e o procedimento da resolução.

O mesmo não se passa para o problema «Robert».

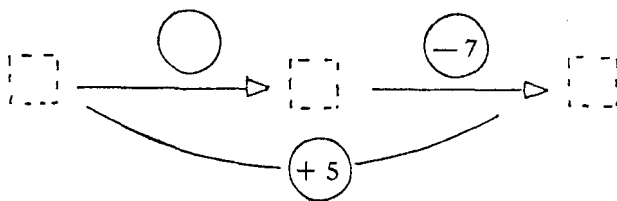


Vê-se que a representação do problema «Robert» e a do procedimento de resolução são diferentes. As crianças têm dificuldade em representar simbolicamente o problema; isto raramente lhes é ensinado. Por outro lado o problema «Robert» não pode ser representado por um diagrama englobante, porque este simbolismo não permite representar as transformações negativas.

A situação é pior para o problema «Thierry»: as representações correctas do problema são uma equação em  $\mathbb{Z}$

$$x + (-7) = (+5)$$

e o esquema da composição de transformações



a solução que os alunos dão habitualmente

$$5 + 7 = 12$$

(quando eles a encontram). Não tem nada a ver com a representação do problema.

Tomemos um último exemplo (exemplo 12):



Entre as soluções dadas pelos alunos, retemos as quatro seguintes:

- A  $23 + 31 = 54 - 14 = 40$
- B  $23 + 31 = 54$   
 $54 - 14 = 40$
- C  $31 - 14 = 17 + 23 = 40$
- D  $14 - 31 = 17$   
 $17 + 23 = 40.$

A solução A representa um tratamento completamente aceitável do problema: partir do estado final, juntar o que tinha sido perdido e separar os que foram ganhos. Mas a escrita viola a simetria e a transitividade do sinal de igualdade.

A solução B não viola estas propriedades. Ela pode ser considerada como melhor. Mas, com efeito, é essencialmente o mesmo procedimento que A. Como A, representa o procedimento de resolução e não o problema. O sinal de igualdade é provavelmente interpretado como o anúncio do resultado (isto dá...) e não como uma relação de igualdade.

A solução C leva a um outro comentário. Ainda que viole também a simetria e a transitividade do sinal de igualdade este procedimento assenta sobre um raciocínio diferente das soluções A e B: primeiro compõem-se as transformações e aplica-se depois o inverso da transformação encontrando assim o estado final.

Exemplo 12: Juliette jogou ao berlinde de manhã e de tarde. De manhã ganhou 14 berlindes. De tarde perdeu 31 berlindes. Quando conta os berlindes à noite, conta 23. Quantos tinha ela de manhã antes de jogar?

O esquema do problema é o seguinte:

A solução D que repousa sobre o mesmo raciocínio que C, revela uma nova falta ao nível da escrita:  $14 - 31 = 17$ . Mas esta falta assenta de facto sobre a pesquisa da diferença entre uma transformação positiva (+14) e uma transformação negativa (-31). Terá, o aluno, direito de ficar contente com a sua solução?

Vemos, assim, que existem muitas fontes de desníveis entre significantes e significados nas estruturas aditivas. Alguns sistemas simbólicos não permitem representar todos os problemas, ou não permitem distinguir entre a representação dos problemas e a representação das soluções. Enfim, alguns sistemas simbólicos veiculam significações matemáticas *standard*. Como ajudar os alunos a preencher estas lacunas?

## 5. CONCLUSÃO

A conclusão será breve. A análise precisa dos conteúdos conceptuais dos problemas de adição e de subtração leva a distinguir várias relações muito diferentes umas das outras, e uma grande diversidade de problemas, de procedimentos, de representações simbólicas.

O desenvolvimento das concepções e das competências da criança é um percurso complexo através deste conjunto. Para perceber tal percurso é preciso analisar, em

detalhe, as condutas dos alunos em situação, as suas formulações, os seus procedimentos, os afastamentos entre as exigências do professor e as tentativas dos alunos.

A paisagem das estruturas aditivas é complexa: as dificuldades encontradas pelos alunos ao nível do «Collège» e mesmo do liceu são testemunha disso. O percurso neste campo conceptual maciço comporta muitas metáforas, incompreensões e mal entendidos, e estranhas relações entre significantes e significados que se ligam desde a escola primária. Se os actos contam mais que as palavras e que os escritos, é necessário dar uma grande importância aos teoremas-em-acto descobertos ou compreendidos intuitivamente pelas crianças em situação. Mas não se explica sem recorrer a palavras e a sinais sobre o papel; as ciladas são inúmeras, e reenviam-nas para as múltiplas significações da adição e da subtracção. Como podem os professores não estarem prevenidos?

#### BIBLIOGRAFIA

- BROUSSEAU, G. (1981) — «Problèmes de didactique des décimaux», *Recherches en didactique des mathématiques*, 2, 37-125.
- CARPENTER, J. P.; MOSER, J. M. e ROMBERG, T. A. (Eds.) (1981) — *Addition and Subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale, N. J.; Lawrence Erlbaum.
- FUSON, K. (1981) — An analysis of the counting-on solution procedure in addition. In: *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*, Carpenter, T. P.; Moser, J. M.; Romberg, T. A. (Eds.), Hillsdale, N. J.; Lawrence Erlbaum.
- MARTHE, P. (1982) — *Problèmes de type additif et appropriation par l'élève des groupes additifs*. These de troisième cycle. Paris, Ecoles des Hautes Etudes en Sciences Sociales.
- PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. (1941) — *La genèse du nombre chez l'enfant*, Genève, Delachaux et Niestlé.
- PIAGET, J. e INHELDER, B. (1948) — *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris, PUF.
- PIAGET, J. e INHELDER, B. (1978) — *Le développement des quantités physiques chez l'enfant*, Genève, Delachaux et Niestlé.
- STARKEY, P. e GELMAN, R. (1981) — The development of addition and subtraction abilities prior to formal schooling in arithmetic. In *Addition and Subtraction, a cognitive perspective*. Carpenter, T. P.; Moser, J. M.; Romberg, T. A. (Eds.); Hillsdale, N. J.; Lawrence Erlbaum.
- VERGNAUD, G. (1981) — *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne, Peter Lang.
- VERGNAUD, G. (1981) — A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In *Addition and Subtraction: a Cognitive Perspective*. Carpenter, J. P.; Moser, J. M.; Romberg, T. A. (Eds.); Hillsdale, N. J.; Lawrence Erlbaum.
- VERGNAUD, G. (1983) — Multiplicative structures. In *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Lesh, R.; Landau, M. (Eds.). Academic Press.