INSTITUTO SUPERIOR DE PSICOLOGIA APLICADA
Departamento de Psicologia Educacional

O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL EM ALUNOS DO 6º ANO DE ESCOLARIDADE

ESTRATÉGIAS E DIFICULDADES CONCEPTUAIS

ISOLINA OLIVEIRA

INSTITUTO SUPERIOR DE PSICOLOGIA APLICADA
Departamento de Psicologia Educacional

O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL EM ALUNOS DO 6º ANO DE ESCOLARIDADE

ESTRATÉGIAS E DIFICULDADES CONCEPTUAIS

ISOLINA OLIVEIRA

INSTITUTO SUPERIOR DE PSICOLOGIA APLICADA
Departamento de Psicologia Educacional

O CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL EM ALUNOS DO 6º ANO DE ESCOLARIDADE

Estratégias e Dificuldades Conceptuais

ISOLINA OLIVEIRA

Tese apresentada no Instituto Superior de Psicologia Aplicada para obtenção do grau de Mestre em Psicologia Educacional

Orientadora: Professora Doutora Glória Ramalho

1994

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos à minha orientadora, Professora Doutora Glória Ramalho, pelos conselhos e disponibilidade que sempre manifestou ao longo da realização deste trabalho.

Aos alunos e aos professores de Matemática que tornaram possível este estudo, mediante uma colaboração desinteressada, desejo manifestar o meu apreço. A sua boa vontade e interesse foram essenciais na realização do trabalho experimental. Aos Conselhos Directivos das escolas agradeço também a abertura manifestada.

Ao João pela paciência e disponibilidade para me ajudar na organização e arranjo do trabalho.

Finalmente quero agradecer a todas(os) as(os) amigas(os) que, de um modo ou doutro, contribuíram para que este estudo fosse efectuado com muito prazer.

RESUMO

O interesse pela investigação da aprendizagem em Matemática tem vindo a aumentar nas últimas décadas, ao mesmo tempo que ocorrem mudanças nas sociedades industrializadas. Na realidade, a sociedade industrial tem vindo a dar lugar à sociedade da informação, o que naturalmente exige a definição de novos objectivos para a educação. É neste contexto que se propõe uma outra visão sobre a alfabetização matemática, acentuando-se não só a necessidade de enfatizar determinados conteúdos mas e, ainda, que se modifiquem capacidades e processos que os alunos devem desenvolver. Tentando dar resposta a essa necessidade, nos últimos vinte anos, começa a surgir uma colaboração mais estreita entre psicólogos educacionais e educadores matemáticos, destacando-se um novo campo de estudo, a Psicologia da Educação Matemática.

Em Portugal, o insucesso em Matemática que, como se sabe, tem vindo a condicionar as opções vocacionais que os alunos fazem no final da escolaridade obrigatória, é uma questão que preocupa professores e psicólogos. Considero que a colaboração entre uns e outros é fundamental, mas apesar de ter aumentado está ainda longe daquilo que seria desejável.

A grande finalidade deste estudo é compreender como funciona o pensamento dos sujeitos quando estes são postos a resolver situações ligadas à Matemática, em particular, aos números racionais. Mais especificamente os objectivos são os seguintes: investigar a capacidade do(s) aluno(s) para compreender o conceito de fracção, o conceito de unidade em situações relativas aos números racionais, a adição de fracções, a noção de equivalência de fracções e ainda a capacidade para lidar com situações que envolvem o conceito de proporcionalidade.

O trabalho foi realizado com alunos do 6° ano de escolaridade, constituindo dois grupos - alunos com bom desempenho e alunos com mau desempenho - provenientes de três turmas de escolas de Lisboa. As entrevistas decorreram em contexto escolar, já que se trata de uma investigação sobre aprendizagens escolares e, nesse sentido, é fundamental uma ligação às práticas dos professores. De facto, o objectivo último deste estudo é contribuir para mudanças fundamentadas de práticas pedagógicas e, deste modo, facilitar o sucesso escolar em Matemática.

A análise de dados quantitativos, traduzidos em percentagem de respostas certas, permite verificar que há diferenças no desempenho das diversas componentes dos números racionais estudadas, que o conceito *ratio* funciona como um elemento discriminatório em termos de idade e que os contextos concretos das tarefas são facilitadores da resolução, fazendo emergir outras estratégias, relativamente aos contextos abstractos. Os alunos com mau desempenho recorrem com maior frequência ao uso de materiais manipulativos e à representação gráfica do que os alunos com bom desempenho que preferem a representação matemática. Em termos gerais, as principais dificuldades conceptuais observadas reenviam para a transposição de concepções sobre os números inteiros para os números racionais, para a incompreensão da relação parte-todo, para o não reconhecimento da unidade de referência e ainda a dificuldade em ter em conta o sentido da co-variação.

Os resultados deste estudo dão-nos indicações sobre o modo como os alunos compreendem, dum modo geral, os números racionais. No entanto, a complexidade destes conduz, por um lado, à necessidade de estudar outras componentes não abordadas neste estudo e, por outro, é importante aprofundar, através de análises qualitativas mais finas, o funcionamento cognitivo e sócio-cognitivo dos alunos que revelaram, ainda, muitas dificuldades em lidar com os números racionais.

Este estudo que abre novas perspectivas de investigação, torna possível a elaboração de estratégias de ensino facilitadoras de aprendizagens matemáticas, contribuindo assim para a introdução de práticas inovadoras que conduzam a uma melhor apropriação de saberes por parte dos alunos.

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS E QUADROS

> "Toute la formation du maître, tout son effort doivent tendre à lui donner une meilleure connaissance de l'enfant et à lui permettre d'ajuster en permanence les modalités de son action pédagogique".
>
> Vergnaud (1981)

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Desde os anos 70 que tem vindo a aumentar o interesse pela investigação da aprendizagem em Matemática. Weil-Barais & Vergnaud (1990) argumentam que o interesse pelos campos científicos (matemática, física) ocorre ao mesmo tempo que as sociedades industrializadas atravessam um período de crise e a mudança tem conduzido ao desenvolvimento de novos programas de investigação interdisciplinares nestas áreas.

Na realidade como se acentua nas "Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar" do *National Council of Teachers of Mathematics*, os países industrializados têm vindo a experimentar a mudança de uma sociedade industrial para uma sociedade da informação o que conduz à necessidade de novos objectivos da educação. Neste sentido propõe-se uma nova visão da alfabetização matemática e sublinha-se que se alteraram não só os aspectos da matemática a transmitir aos alunos mas ainda os conceitos e processos que eles devem dominar.

Em Portugal a comunidade dos Educadores Matemáticos, particularmente através da Associação dos Professores de Matemática tem influenciado as decisões tomadas sobre o ensino da Matemática. Como exemplo aponte-se a análise e discussão realizada em 1988, aquando da reforma curricular, sobre a renovação do currículo de matemática e que se traduziu na publicação de vários documentos onde se equacionam os grandes objectivos para o ensino da Matemática nos próximos anos.

Por outro lado, o elevado insucesso em Matemática tem conduzido ao questionamento das metodologias de ensino e alertado para a necessidade de se considerarem as convicções/crenças que os alunos têm sobre a própria disciplina e que levam muitas vezes a uma perda de confiança nas suas próprias capacidades. É interessante verificar como os novos programas do 2° ciclo procuram reflectir esse aspecto ao introduzir a necessidade dos professores avaliarem "a atitude dos alunos em relação à matemática, em particular a sua confiança em fazer matemática", bem como "a cooperação do trabalho de grupo".

No que diz respeito aos programas de Matemática assumem-se como finalidades para o ensino básico (1°, 2° e 3° ciclo) o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de raciocínio e de resolução de problemas.

Reconhece-se que há uma tomada de consciência cada vez maior sobre a importância de encarar estas questões como se pode verificar através do número crescente de investigações que se têm vindo a realizar nestas áreas. No entanto, parece que nem sempre as conclusões desses estudos têm a oportunidade de serem aceites e introduzidas na prática pedagógica numa tentativa séria de alterar o "estado de coisas" em Matemática.

Um aspecto que tem sido estudado pela Psicologia Educacional, na investigação sobre a aquisição de conhecimentos matemáticos, refere-se aos hiatos (*gaps*) que existem entre os invariantes do sujeito, construídos na sua interacção com o meio, e os invariantes que constituem o conhecimento matemático. Segundo Vergnaud (1990) é fundamental conhecer mais sobre esses invariantes, especialmente se resistem à intervenção do ensino, uma vez que tal conhecimento tornaria possível a determinação correcta dos obstáculos cognitivos que os sujeitos teriam de ultrapassar.

As investigações em concepções permitem um conhecimento mais aprofundado das dificuldades reais que a aprendizagem de um dado conceito coloca. Com o estudo das concepções dos alunos pretende-se apontar as dificuldades e descontinuidades nos seus processos de pensamento quando abordam os conceitos desenvolvidos no campo da matemática e determinar em que medida concepções anteriores podem ser usadas para gerar novas concepções (Vergnaud,1990). Daí ter-se estruturado o presente trabalho de investigação como mais uma tentativa centrada nas ideias dos alunos sobre os números racionais, assunto integrado nos programas do 2° ciclo e cuja abordagem constitui, sem dúvida, um dos temas mais polémicos dos curricula do ensino básico de Matemática. A investigação desenvolveu-se tendo por finalidades:

1. Determinar que diferenças existem na compreensão de diversas componentes do conceito de número racional.

2. Detectar se a idade tem influência na compreensão de diversas interpretações do conceito de número racional

3. Averiguar se contextos diferentes de apresentação das tarefas influenciam o desempenho.

4. Pesquisar as concepções erróneas (*misconceptions*) relativas ao conceito de número racional, atendendo às diversas componentes estudadas.

Neste capítulo, faz-se a apresentação do contexto do estudo, de seguida enunciam-se as questões exploratórias que conduziram a investigação e finalmente apontam-se algumas razões que justificam a pertinência deste trabalho.

1.1 CONTEXTO DO ESTUDO

Nas duas últimas décadas tem aumentado o interesse pela investigação da aprendizagem em Matemática e a análise de tarefas matemáticas tem vindo a interessar cada vez mais os psicólogos educacionais.

Até aos anos 70 o debate acerca do conhecimento matemático foi conduzido entre matemáticos e educadores matemáticos e referia-se essencialmente ao conteúdo e métodos de ensino. Nos últimos anos a discussão foi alargada aos psicólogos educacionais, particularmente aos cognitivistas. No diálogo havido entre uns e outros ressalta uma grande preocupação sobre o que significa compreender matemática e procura-se identificar teoricamente diferentes espécies de compreensão.

A investigação tem usado os métodos da psicologia na análise do conhecimento matemático e numerosos estudos têm procurado analisar os processos cognitivos envolvidos na matemática.

É particularmente no seio do *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (IGPME), reunido pela primeira vez em 1976, na Alemanha, (cuja conferência foi realizada em 1994 em Portugal) que aquela discussão tem tido lugar. Naturalmente que os trabalhos de Piaget, sobre o crescimento do pensamento lógico e matemático, exerceram forte influência na aproximação da Psicologia e da Educação Matemática e na criação do IGPME.

Em Portugal, no final dos anos sessenta por iniciativa de Sebastião e Silva, no Centro de Investigação Pedagógica da Fundação Calouste Gulbenkian um grupo de professores procura produzir materiais para o ensino primário, numa perspectiva piagetiana. É contudo em 1990, com o projecto coordenado por Leandro de Almeida e direcção de Ana Paula Mourão e

António Barros Oliveira, em que se tenta explicar o insucesso em Matemática e se organiza e avalia um programa de intervenção, que se estabelece uma real e efectiva colaboração entre a Psicologia Educacional e a Educação Matemática.

Na realidade, a interligação entre a investigação em Educação Matemática e a Psicologia é muito menor do que na maioria dos países (Ponte, 1993). Este autor considera que a fragilidade desta relação tem sido um elemento empobrecedor do progresso da investigação nesta área.

Refira-se e, apenas, como exemplo que no Reino Unido em 1971 Richard Stemp edita um livro cujo título *The Psychology of Learning Mathematics* traduz a interligação entre as duas disciplinas. Mais recentemente o estudo *Concepts in Mathematics and Science project (CSMS)* reflecte bem a influência que a psicologia cognitiva tem tido na investigação sobre a aprendizagem da Matemática (Brown, 1992).

Em França, nos últimos anos, têm-se revelado extremamente importantes, para o desenvolvimento das investigações sobre a aprendizagem e o ensino da Matemática, as contribuições da epistemologia genética de Piaget, da noção de obstáculo e da escola de Genebra de Psicologia Social (Artigue & Douady, 1986). Devem salientar-se aqui as reflexões teóricas de Vergnaud, não só a nível dos saberes ensinados, onde introduz a noção de campo conceptual, mas também a nível do sujeito que aprende, tendo criado a noção de teorema-em-acção para designar as propriedades das relações que a criança vai construindo à medida que resolve problemas e que nem sempre é capaz de as explicitar ou justificar.

Neste interface de colaboração entre a Psicologia e a Educação Matemática, as questões a investigar são as mais diversas: estudar o desenvolvimento cognitivo, definir objectivos cognitivos para a educação, estabelecer hierarquias de aprendizagem com vista a estruturar o currículo e conceber instrumentos de diagnóstico para os professores (Streenfland, 1986).

Numa outra dimensão interessa aos investigadores responder a questões, tais como: Como distinguir e reconhecer obstáculos epistemológicos? Como ter em conta esses obstáculos? Em que medida se deve fazer? Como ajudar a ultrapassar o obstáculo? Em que medida, em que condições, as interacções podem ser geradoras de mudança? (Bednarz & Garnier, 1989).

No quadro dos campos conceptuais interessa colocar as seguintes questões: Quais são os aspectos mais facilmente compreendidos pelos alunos? Que grandes etapas se podem observar? Quais são as dificuldades mais duráveis? Como caracterizar essas diferentes dificuldades? Há obstáculos epistemológicos claramente identificáveis? (Vergnaud, 1989).

Para responder a estas e outras questões os educadores têm cada vez mais consciência da necessidade de uma abordagem multidisciplinar para o ensino da matemática que envolva várias disciplinas como a Psicologia, a Epistemologia, a Linguística, a Antropologia e as Ciências da Educação.

Perante a situação de escolher a problemática a desenvolver no âmbito do Mestrado em Psicologia Educacional tornou-se claro para a autora que as questões a investigar deviam estar relacionadas com a construção dos saberes e, em particular, a aquisição de conhecimentos matemáticos. Este interesse resulta do facto de, ao leccionar Matemática, ter verificado como é alarmante o insucesso e, como parece tantas vezes difícil para os alunos compreender matemática.

Entende-se que compreender um assunto envolve muito mais do que aprender com compreensão o conteúdo básico. Na realidade, o que se pretende significar quando se fala em compreender? Comprender para uma criança, é estabelecer e tornar a ligar sob a sua própria responsabilidade fenómenos ou factos deixados independentes, por sua vez, pelo professor, pela situação, pela sua linguagem e pelos conhecimentos aprendidos (Brosseau, 1989).

Quando se ensina Matemática é muito importante distinguir entre a compreensão e a representação da compreensão. Muitos avanços em Matemática resultaram da criação de representações que se revelaram hábeis, como a notação decimal, e que inicialmente funcionaram como modelos externos de ideias que já eram conhecidas (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983).

Estudos recentes no âmbito do desenvolvimento da cognição matemática, efectuados em diversos ambientes culturais, apontam para a necessidade de se considerar a Matemática como uma forma cultural de conhecimento. Neste sentido, como afirma Abreu (1993) o desenvolvimento da cognição matemática deve ser encarado em termos de conhecimento e de valores. Estas concepções são consistentes com as ideias de Perret-Clermont e Brossard (1988) e Doise (1988), segundo os quais a cognição é um processo influenciado socio-culturalmente, não sendo independente do contexto e da cultura.

Na área da Matemática, os números racionais constituem um dos tópicos em relação aos quais o seu ensino e aprendizagem se tem revelado, ao longo dos tempos, uma frustação para professores e alunos.

A importância do seu estudo releva de três perspectivas diferentes: numa perspectiva prática, na medida em que a capacidade para tratar com este to facilita a compreensão e permite lidar com muitas situações práticas; perspectiva psicológica porque constituem um vasto campo no qual as is podem desenvolver e alargar as estruturas mentais necessárias ao olvimento intelectual e numa perspectiva matemática porque a sua compreensão forma as bases nas quais se apoiam as operações algébricas mais tarde estudadas (Behr et al., 1983).

À data a que esta investigação se realizou o ensino dos números racionais era introduzido nos Programas do 2° ciclo do Ensino Básico, iniciando-se a sua abordagem através do conceito de fracção. De facto, é pouco realçada a relação das fracções com conceitos afins, como as fracções decimais, as percentagens, os *ratios* e as escalas. Por outro lado, enfatizavam-se as práticas com fracções, a comparação e a ordenação de fracções, a aplicação das regras algorítmicas, mais do que a compreensão do conceito. Usavam-se como modelos na visualização de fracções o rectângulo, o círculo e, em menor escala, a recta numérica.

Numa breve revisão sobre o ensino das fracções, Streefland (1982) menciona outras abordagens que foram sendo mais ou menos enfatizadas ao longo dos anos 60 e 70, salientando a importância atribuída à equivalência de fracções, no começo dos anos 70 e, poucos anos antes, à fracção como operador (baseava-se na interpretação dos números naturais como *mappings* que ampliavam ou diminuíam e a composição das duas espécies de *mappings* conduzia a fracções). De qualquer modo, o ponto de partida era a fracção e considerava-se secundariamente a fracção como *ratio*, isto é, como uma relação entre uma parte e o todo de uma certa grandeza, em que as subdivisões eram relacionadas com a unidade envolvida. Caracterizando o ensino das fracções, nesse período, Streenfland assinala os seguintes aspectos: 1) ausência de contextos significativos, quer como fonte quer como domínio de aplicação; 2) o uso isolado de modelos e padrões; 3) a pouca atenção a conexões conceptuais com domínios afins como as fracções decimais, *ratios*, escalas e percentagens, (segundo Vergnaud, 1981, citado pelo autor); 4) a importância atribuída aos algoritmos.

No domínio das investigações realizadas pela Universidade de Michigan, de 1968 a 1975, Payne (1976) na revisão que faz refere uma incidência das diversas abordagens nos algoritmos com fracções e no uso de materiais manipulativos. Assim, surgem estudos que comparam diferentes abordagens sobre a divisão de fracções, como os realizados em 1968 por Bidwell; sobre a multiplicação de fracções e sobre a utilização de diagramas ou materiais manipulativos, estudos efectuados em 1969 por Greer; sobre diferentes sequências envolvendo fracções equivalentes e dois tipos de materiais, como os de Bohan, em 1970 e ainda os estudos de Coburn, em 1973, sobre uma abordagem às fracções equivalentes envolvendo o *ratio* ou usando regiões. Na realidade, havia a preocupação de identificar as maiores ou menores dificuldades dos alunos em cada uma destas investigações, mas a ênfase era colocada na comparação de diferentes algoritmos para uma dada operação com fracções.

Ainda segundo Payne, de 1973 a 1975, salienta-se o estudo *Initial Fraction Concepts, Symbols and Language* (IFS) (Galloway, 1975; Muangnapoe, 1975; Payne, et al., 1974; Williams, 1975), em que se observa já uma preocupação com o que a criança está a aprender tendo em conta uma determinada sequência de ensino. Para isto contribuiu o trabalho de Bloom sobre a mestria para a aprendizagem e o de Greeno sobre a resolução de problemas usando modelos de processamento de informação. Greeno participou mesmo no ensino e no desenvolvimento do projecto e elaborou uma estrutura psicológica para a investigação de fracções, cujas ideias principais se podem resumir do seguinte modo:

- conceitos quantitativos são procedimentos para trabalhar com grandezas representadas espacialmente (sugerindo então um conjunto de imagens e palavras como "regiões" e "congruência" a usar no projecto IFS), isto é, o conceito de quantidade fraccional poderia ser ensinado como um conjunto de procedimentos para manipular a grandeza espacial;

- a representação espacial é uma componente importante da resolução de problemas;

- o processo de obter fracções equivalentes, usando regiões e diagramas, é descrito como um processamento espacial, defendendo que o procedimento de multiplicar/dividir numeradores e denominadores pelo mesmo número conduz a um diferente conceito de fracção equivalente, isto é, é visto como sendo uma diferente estrutura cognitiva;

- há uma relação entre algumas rotinas de processamento espacial e uma rede de conceitos primariamente verbais; esta relação entre representação espacial e regras verbais para o cálculo podem existir na memória semântica.

Assumindo a complexidade inerente ao conceito de fracção, outros autores defendem a necessidade de identificar características que possam ser ensinadas nos primeiros anos de escolaridade. Assim, Novillis (1976), baseando-se nas concepções de Gagné sobre o desenvolvimento de uma hierarquia de conceitos e após analisar o conceito de fracção, parte de um conjunto de subconceitos complexos e relacionados e propõe uma hierarquia a que chamou *A Hierarchy of Selected Subconcepts of the Fraction concept* (HSSFC), descrevendo o comportamento associado a cada conceito.

Como argumenta Kieren (1976), para compreender os números racionais é necessário ter uma experiência adequada com as suas muitas interpretações e, de facto, muitos materiais escolares tratam apenas os números racionais como objectos de cálculo. Os aspectos algébricos das operações com racionais são pouco enfatizados mas, no entanto, a criança tem de lidar com a noção de equivalência, é confrontada com uma operação "+", não de um modo natural mas por razões axiomáticas, com um sistema em que "+" e "x" são duas operações bem diferentes (respectivamente análogas adicionar comprimentos e à composição de funções) e tem ainda de trabalhar com determinadas propriedades, nomeadamente a noção de inverso.

Procurando classificar as diversas interpretações dos números racionais Kieren (1976) introduz a ideia de que estes consistem em vários constructos (fracções, fracções decimais, classes equivalentes de fracções, *ratio*, operadores, medidas ou pontos numa recta numérica e elementos de um campo quociente) e defende que a compreensão do conceito de número racional depende da compreensão de todos esses constructos. Mais recentemente Kieren (1980a) assume que um completo desenvolvimento do conceito implica a compreensão de quatro subconstructos: medida, quociente, *ratio* e operador multiplicativo.

Behr et al. (1983) retomam essa classificação propondo alterações e aceitam a noção de partição e o subconstructo parte-todo dos números racionais como básicos na aprendizagem dos outros constructos. Segundo os autores, um aluno que compreende fracções significa, em parte, que é capaz de expressar as ideias de fracção, apresentadas numa região circular, usando regiões rectangulares ou usando símbolos escritos.

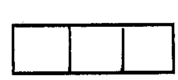
No sentido de contribuir para a compreensão do desenvolvimento dos modelos conceptuais das crianças, na aprendizagem dos números racionais, Behr et al. (1983) propõem uma estrutura teórica, que será descrita no capítulo 2 deste estudo.

Muitas situações didácticas são conceptualmente pluridimensionais. Vergnaud que procura classificar problemas e não conceitos afirma que para resolver problemas os alunos precisam, no seu quotidiano de usar muitas vezes tópicos logicamente distintos mas psicologicamente interdependentes. No sentido de enquadrar as investigações relativas a actividades cognitivas complexas, o autor propõe a teoria dos campos conceptuais, considerando as estruturas multiplicativas como um dos campos. Essas estruturas implicam multiplicações e divisões e, nesse sentido, é possível integrar o conceito de fracção, de *ratio* e os números racionais.

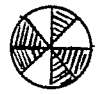
Ohlsson (1987) considera os números racionais numa perspectiva semântica, elabora uma estrutura para explicar os significados dos conceitos nesse campo e ressalta as relações semânticas entre eles. Começa por considerar um par ordenado de números inteiros que podem ser interpretados como quantidades ou como parâmetros em operações, isto é, o número de vezes que pode ser repetido. Este autor identifica quatro interpretações de fracções (o símbolo na forma *x/y*): função quociente, número racional, um vector binário e uma espécie particular de composição de funções. A interpretação quociente de *x/y* como número racional é identificada com duas aplicações - fracções e medidas. Neste caso a aplicação fracção é semelhante à noção parte-todo mas a aplicação medida é diferente do conceito de medida do número racional no sentido de Kieren (1976) ou Behr et al. (1983). As aplicações da interpretação vector binário são: a) *ratio* como comparação de duas quantidades - quantidade intensiva; b) *ratio* entre quantidades para diferentes espaços de medida, como a densidade; c) *rate*, o *ratio* em que a quantidade referente é o tempo; d) proporção que adapta o conceito parte-todo da fracção quando as partes são usadas na forma composta (ex: 3/4 de uma pizza é visto como uma fatia igual em tamanho a três fatias de 1/4).

Esta perspectiva, segundo Behr, Harel, Post & Lesh (1992), não acrescenta nada de novo às anteriores e a interpretação de *x/y* como composição de funções corresponderia à interpretação do número racional como operador (segundo Kieren, 1976).

Hart (1981, 1984) tem desenvolvido vários estudos sobre tópicos matemáticos ensinados nas escolas secundárias ingleses, numa perspectiva de desenvolvimento curricular. Entre esses assuntos, as fracções, o *ratio* e a proporção foram estudados através da aplicação de testes em larga escala, em que se analisaram os erros e os métodos usados pelas crianças para resolverem os problemas. Assim, foi possível definir grupos e níveis de compreensão e estabelecer hierarquias em cada um dos tópicos. Por exemplo, para o estádio 1 (crianças de 12-13 anos), que inclui os níveis mais fáceis de muitos dos tópicos, são apresentadas as seguintes questões relativamente a fracções:

1. Pinta dois terços 

2. Que fracção está sombreada?



3. Numa padaria $\frac{3}{8}$ de farinha é usada no fabrico de pão e $\frac{2}{8}$ de farinha é usada para bolos. Que fracção de farinha foi usada?

Segundo Hart (1981), estas questões testam a compreensão da notação usada em fracções e as primeiras ideias sobre a sua adição. Ao conhecimento dos números inteiros junta-se agora a noção de parte-todo.

Em relação ao conceito de *ratio* e proporção no estádio 1 as questões referem os *ratios* 2:1 e 3:1 e a criança deve ser capaz de determinar "metade de" ou o "dobro de". Num dos problemas que envolve um recipiente para oito pessoas é pedido para calcular as quantidades de ingredientes para quatro pessoas. Outra questão refere-se à tarefa que Piaget utilizou no estudo do raciocínio proporcional e que consiste em determinar a quantidade de alimento que é necessário dar a enguias de comprimentos diferentes, sendo que essa quantidade é proporcional ao comprimento da enguia. A versão descrita por Hart tem duas formas:

1 - objectos discretos e enguias com o comprimento na relação 1:2:3

2 - quantidade contínua e enguias com o comprimento na relação 2:3:5

1. Há 3 enguias A, B e C no aquário do Zoo.

15 cm

A

10 cm

B

5 cm

C

As enguias são alimentadas até ficarem fartas com arenques e o número depende do seu comprimento. Se C é alimentado com dois arenques, quantos arenques são necessários para as enguias A e B ficarem fartas?

Se B come 12 arenques, quantos arenques são necessários para alimentar A?

Se A obtém 9 arenques, quantos arenques são precisos para alimentar B?

Após a realização deste levantamento sobre as principais investigações e conceptualizações dos números racionais é possível, não só verificar que há diferentes perspectivas, mas ainda concluir pela importância de que se reveste o seu estudo. Se, como afirma Behr et al. (1992) essa abordagem multidisciplinar revela vigor, também é verdade que essa diversidade tem criado dificuldades na comunicação.

Com a presente investigação pretende-se conhecer obstáculos ao nível da construção do conceito de número racional, apoiando-se para isso na análise das produções dos aprendentes e das concepções subjacentes. A escolha deste conceito decorre das muitas dificuldades manifestadas na sua aprendizagem, como os professores do 2° ciclo afirmam, constituindo, por isso, um problema em didáctica da matemática. Como referem Behr et al. (1992) se há consenso no que diz respeito aos obstáculos que a aprendizagem do conceito de número racional provoca, o mesmo não se pode dizer em relação ao modo como se pode facilitar essa aprendizagem.

Trata-se de um primeiro estudo sobre desenvolvimento cognitivo realizado com crianças portuguesas, que tem como objecto de estudo os números racionais. As duas investigações anteriores (Amaro, 1985) e (Fernandes, 1990) realizadas no domínio dos números racionais comparam métodos de ensino diferenciados.

De entre os diversos estudos que abordam os números racionais são de realçar os de Kieren (1976), de Noelting (1980) sobre a noção de *ratio*, de Behr, Lesh, Post & Silver (1983), de Hart (1981) e de Vergnaud (1983). Neste sentido, constituem um quadro de referência nas análises dos resultados e são desenvolvidos no capítulo 2 -" O Megaconceito Número Racional".

Porque o objectivo principal deste estudo é compreender melhor o funcionamento cognitivo das crianças, na situação de aprendizagem em Matemática, adoptou-se como referência teórica a perspectiva dos campos conceptuais que atribui um papel primordial aos conceitos, procurando conhecer os aspectos mais facilmente compreendidos pelos alunos e as dificuldades mais duráveis. Neste sentido, esteve ainda presente a problemática das noções de obstáculo epistemológico e conceptual.

1.2 QUESTÕES DO ESTUDO

A investigação foi realizada com alunos do 2° ciclo do ensino básico, divididos em dois grupos, seleccionados em três escolas da área de Lisboa e teve como ponto de partida as questões de estudo que a seguir se enunciam:

Questão 1- Há diferenças na realização média dos alunos, com bom desempenho e com mau desempenho, em tarefas que envolvem cada um dos subconstructos?

Questão 2- O contexto concreto é facilitador da resolução da tarefa? Os alunos com mau desempenho obtêm melhores resultados nas tarefas concretas?

Questão 3- De que modo a idade tem influência nas competências relativas aos diversos constructos? Os alunos com nível etário mais elevado realizam melhor, qualquer que seja a tarefa?

Questão 4- A forma de apresentação (contexto concreto ou contexto abstracto, fracção arquimediana ou fracção não arquimediana, quantidades contínuas ou quantidades discretas) da tarefa condiciona a estratégia a utilizar pelos alunos?

Questão 5- Os alunos com bom desempenho utilizam preferencialmente alguma estratégia de resolução?

Questão 6- Quais são as concepções alternativas que os alunos manifestam relativamente ao conceito de número racional, atendendo às diversas componentes estudadas? Que obstáculos se colocam à sua aprendizagem?

Resumindo, pretendia-se com este estudo obter dados que reflectem em parte a capacidade do(s) aluno(s) para compreender o conceito de fracção, o conceito de unidade em situações relativas aos números racionais, a adição de fracções e a noção de equivalência de fracções. E ainda a capacidade do aluno para lidar com situações que envolvem o conceito de proporcionalidade com quantidades contínuas e com quantidades discretas e finalmente o modo como seria capaz de usar os diversos sistemas representacionais.

1.3 IMPORTÂNCIA DO ESTUDO

Pelo que se descreveu ao longo deste capítulo torna-se clara a relevância de um estudo que assume as finalidades atrás expostas. Em Portugal, no âmbito da Psicologia Educacional os estudos realizados sobre a construção de conceitos matemáticos são poucos e, em particular, com alunos deste nível etário. Por outro lado, os psicólogos que trabalham em contexto escolar têm, muitas vezes, que se confrontar com situações em que os alunos são indicados como tendo dificuldades de aprendizagem em Matemática. Neste contexto, parece importante que aqueles procurem conhecer as concepções dos alunos, nomeadamente a nível de continuidades e rupturas na construção de saberes matemáticos, o que lhes permitirá retirar implicações úteis e assim participar mais eficazmente em intervenções que se pretendem multidisciplinares e clarificadoras de aprendizagens.

De facto, parece-nos que o estudo das dificuldades que o ensino e a aprendizagem da Matemática provocam e que se traduzem, em última instância, na rejeição pelos alunos da própria disciplina, com o risco de se tornarem analfabetos matemáticos, constitui um vasto campo e motivo de investigação para os Psicólogos Educacionais.

Resta acrescentar que trabalhando a autora como professora de Matemática no 2° ciclo lhe pareceu importante que os resultados pudessem vir a ser não só integrados na sua prática, mas também divulgados junto de docentes de Matemática, particularmente os do ensino básico. Neste sentido, o presente estudo pretende contribuir para a elaboração de modelos de intervenção didáctica que visem uma modificação do "estado de coisas" no ensino da Matemática.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

2.1 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEPTUAIS

Como Vergnaud (1990a) define, a Teoria dos Campos Conceptuais é uma teoria psicológica da conceptualização do real que pretende explicar como o saber se constrói partindo do seu conteúdo conceptual. A teoria dos campos conceptuais privilegia modelos que atribuem um papel essencial aos conceitos, no que se distingue da psicologia piagetiana que se centra nas estruturas lógicas. Como refere o autor, esta abordagem coloca no mesmo plano objectos matemáticos que, apesar de terem o mesmo estatuto lógico, remetem para diferentes problemas de conceptualização.

É neste contexto que se pode situar o presente estudo que pretende contribuir para a compreensão do processo de construção do conceito de número racional.

2.1.1 A Formação de Conceitos

Ao longo dos tempos os psicólogos educacionais têm-se preocupado com o estudo do desenvolvimento dos alunos, procurando criar instrumentos que o avaliem. São exemplo disso o quociente de inteligência, os estados piagetianos, os estilos cognitivos. No entanto, segundo Vergnaud (1988) estes estudos têm minimizado a especificidade dos conhecimentos e não permitem compreender as *décalages* em tarefas que aparentemente têm a mesma complexidade estrutrural.

Por outro lado, certos desempenhos que se pensava serem característicos de um estádio podem ser obtidos por crianças mais jovens, dependendo da experiência e das aprendizagens da criança.

Partindo da dificuldade de interpretação dos fenómenos de *décalage* em problemas, Bastien (1987), um dos autores que durante o nosso Mestrado se debruçou sobre estas questões, propõe um modelo geral sobre o funcionamento cognitivo da criança na resolução de problemas, considerando que com a teoria de Piaget é difícil encontrar um quadro apropriado à interpretação do que se chama procedimento.

Vergnaud (1989) argumenta que as tarefas consideradas isomorfas não o são de facto, se se tiver em conta as informações de que dispõe o aluno e as operações de pensamento que exigem. Dum ponto de vista geral, poderão ser isomorfas mas aplicando-se a diversos conteúdos e com diferentes valores de variáveis de situação naturalmente não conduzem a condutas idênticas. De facto, essas situações podem ser objecto de aprendizagens escolares e extra-escolares muito diferentes.

Um campo conceptual é um domínio amplo, mas ao mesmo tempo específico que reenvia para a experiência da criança, escolar ou não escolar. Um campo conceptual define-se como um conjunto de situações problema cuja resolução implica conceitos, procedimentos e representações de diversos tipos mas em estreita conexão (Vergnaud, 1983). São exemplo, as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas. A criação de tal estrutura torna possível estudar a aquisição de conceitos interligados que cobrem grandes domínios de conhecimento numa perspectiva psicogenética. As proximidades entre conceitos, situações ou representações facilitam o estudo das filiações e descontinuidades do desenvolvimento cognitivo, através de situações sistematicamente classificadas e analisadas. Na resolução de problemas de uma mesma classe os alunos usam normalmente procedimentos, concepções e representações simbólicas diferentes que sendo por vezes erradas nem por isso deixam de ser úteis na medida em que contribuem para a emergência de soluções.

Numa dada situação o sujeito não põe em jogo todas as propriedades de um conceito e, normalmente na resolução de um problema estão envolvidos muitas vezes vários conceitos. A formação de um conceito atravessa várias fases de interacção e de desníveis por um período longo de tempo.

Na definição pragmática de um conceito é preciso identificar as situações de referência que lhe conferem sentido. É necessário ter em conta, por um lado, o conjunto das situações que constituem a referência das suas diferentes propriedades e por outro, o conjunto dos esquemas postos em acção pelos sujeitos nessas situações. Assim, situação e conceitos estão em estreita relação, a situação contribui para a formação de conceitos e são estes que vão permitir enfrentar situações novas.

Vygotsky distingue conceitos "científicos" de conceitos "do quotidiano", em que na formação dos primeiros intervem fortemente o discurso dos adultos e os segundos estão particularmente ligados a actividades diversificadas. No entanto, em qualquer caso, a conceptualização reenvia para o reconhecimento de objectos, de propriedades, de relações e de proposições.

Segundo Vergnaud (1989) os conceitos "científicos" estão organizados em sistemas que pressupõem um "tecido conceptual já largamente elaborado" pelo pensamento espontâneo do aluno e exigem na sua formação uma organização sistemática e mediação. Esta mediação faz-se, na construção dos conceitos matemáticos, através dos materiais manipulativos e sobretudo através dos símbolos.

Na conceptualização do real a acção operatória é muito importante, mas não é tudo. Na realidade, não se discute a veracidade ou falsidade de um enunciado totalmente implícito e a identificação dos diversos aspectos da realidade não se faz sem a ajuda de palavras, de enunciados, de símbolos e de signos. O uso de representações (significantes explícitos) é indispensável à conceptualização.

Mas, o que caracteriza a noção de representação? É interessante recordar aqui, que no grupo de trabalho organizado por Janvier e Vergnaud (1994), no PME XVIII, as representações foram consideradas constructos teóricos fundamentais em Psicologia da Educação Matemática. E podem abranger: a) situações ou conjunto de situações físicas, externas, que podem ser descritas matematicamente ou vistas como envolvendo ideias matemáticas; b) sistemas simbólicos estruturados externamente, que incluem sistemas linguísticos, notações e constructos matemáticos; c) representações internas e sistemas de representação que envolvem, por exemplo, representações individuais da ideia de fracção, de ratio, de proporção ou ainda as teorias da representação cognitiva.

Para Vergnaud (1981a) a representação não se reduz à noção de símbolo ou de signo mas abrange também a de conceito. É fundamental distinguir os significantes (símbolos ou signos) daquilo que representam, isto é, dos significados que são de ordem cognitiva e psicológica. Neste sentido, o conhecimento é constituído por símbolos e conceitos que reflectem a realidade (não toda) e a actividade do sujeito nesse mundo material.

A representação só é funcional se reflecte certos aspectos da realidade e se permite operar a nível dos significantes e dos significados, isto é, se obedece a critérios de ordem sintática e de ordem semântica.

Assim, um conceito é definido em função de um conjunto de:

(S) - <u>situações</u> que dão sentido ao conceito numa variedade de caminhos - constituem a referência;

(I) - invariantes operacionais (propriedades, relações, teoremas-em-acção, etc) que são progressivamente apropriados e utilizados na análise das situações contribuindo para a operacionalidade dos esquemas - constituem o significado;

(φ) - representações simbólicas, conjunto das formas linguísticas e não linguísticas (esquemas, linguagem, espaço, álgebra, representação imaginada, etc.) que são usados para comunicar, indicar e representar simbolicamente os invariantes, as suas propriedades, as situações e os procedimentos - constituem o significante.

Pode, então, esquematizar-se:

Situação — referência

CONCEITO

$C = (S, I, \varphi)$

Invariante ———— Formas "linguísticas" e "não-linguísticas"

(ordem cognitiva e psicológica) (símbolos e signos)

Significado $\longleftrightarrow$ Significante

Figura 1 - O Modelo de Vergnaud sobre a Formação de Conceitos

Particularizando para o conceito matemático, Artigue & Douady (1986) indicam:

- a noção matemática tal como é definida, numa determinada época, no contexto do saber instituído;
- o conjunto dos significantes associados ao conceito, representações simbólicas e icónicas;
- a classe dos problemas em que adquire sentido;
- os instrumentos, como os teoremas, os algoritmos específicos.

Os processos cognitivos e as respostas são função das situações com as quais os sujeitos são confrontados. Ora, num campo conceptual há uma variedade de situações e os conhecimentos dos sujeitos são modelados pelas situações que conferem sentido aos conceitos e procedimentos que se quer ensinar. Compreende-se, assim, a importância que a escolha das situações na introdução de um conceito pode ter na significância atribuída a este.

Há, no entanto, que considerar diferentes aspectos relativamente às situações. Pode acontecer que o aluno possua competências necessárias ao seu tratamento, recorrendo a comportamentos automatizados que correspondem a um único esquema. Mas há casos em que isso não se verifica, o aluno pode necessitar de tempo para reflectir, explorar, tentar, isto é, o processo envolve descoberta e, então, requer vários esquemas no tratamento da situação, esquemas que podem entrar em conflito e conduzir ou não à resolução do problema.

A noção de esquema - totalidade dinâmica organizadora da acção do sujeito para uma classe de situações específicas - aplicar-se-ia mais facilmente ao primeiro conjunto de situações do que ao segundo em que o sujeito procura várias estratégias. No entanto, também neste caso o funcionamento cognitivo do sujeito assenta num conjunto de esquemas disponíveis, ao mesmo tempo que vai descobrindo novos aspectos e eventualmente novos esquemas (Vergnaud, 1990).

Esta questão coloca-se essencialmente quando a criança ou o adolescente enfrentam situações novas. Ou, dito de outro modo, como ampliar a noção de esquema, como aplicar o esquema a uma classe maior?

O autor fala de generalização, *transfert*, descontextualização e refere que, muitas vezes, a diferença entre as situações é apenas parcial. Os esquemas são esboçados e podem não ser pertinentes. Um esquema pode ser decomposto em elementos distintos por forma a ser recomposto de outro modo e adicionado de elementos cognitivos suplementares. A generalização do esquema passa, assim, pelo reconhecimento de invariantes.

Há necessidade do sujeito reconhecer analogias e diferenças de acordo com critérios, de identificar diferenças entre as situações, para as quais o esquema já foi operatório, e as novas situações. É neste contexto que as crianças vão descobrindo novos aspectos e novos esquemas, <u>em situação</u>.

Em *L'enfant, la mathematique et la réalité*, Vergnaud refere que os esquemas são do mesmo tipo lógico do algoritmo, que se entende como uma regra ou conjunto de regras que, perante qualquer problema de uma dada classe, conduz a uma solução, se ela existe, ou então mostra que não tem solução (1981a). Mas, porque há classes de situações bem definidas para as quais não há algoritmo, o autor propõe a noção de regras de acção, isto é, regras que gerem as condutas dos sujeitos numa dada situação.

Esta noção é retomada em 1990 no texto *La Théorie des champs conceptuels* quando o autor procura evidenciar a importância do esquema na psicologia cognitiva e na didáctica. Aparecem, assim, interrelacionados quatro elementos - as regras de acção e as antecipações, os invariantes operatórios e as inferências - que constituem o esquema.

Atente-se na seguinte esquematização:

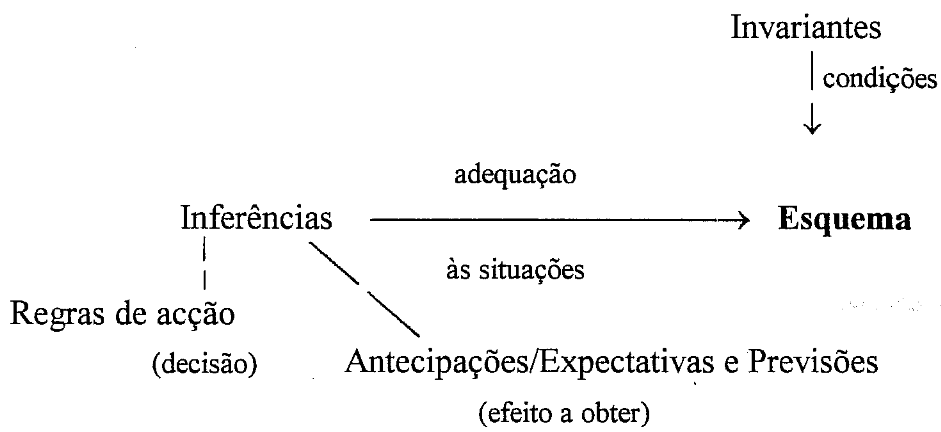


Figura 2 - Relação entre o Esquema e os seus Elementos

Os invariantes operatórios permitem aos esquemas encontrar as condições do seu funcionamento. As inferências assumem a forma de cálculo e permitem que os esquemas se adequem aos valores actuais das variáveis de situação e, assim, contribuem para a adaptação a situações novas. As regras de acção, resultantes dos cálculos inferenciais, permitem decidir as acções a executar e finalmente as antecipações que também resultam dos cálculos inferenciais, dizem respeito à solução a obter. São as antecipações ou previsões que dão conta da funcionalidade dos esquemas.

Um esquema assenta sempre numa conceptualização implicíta e a sua aceitação depende da adequação dos invariantes, do conhecimento, implícito ou explícito, que a criança tem das relações entre o algoritmo e as características do problema a resolver. Se o esquema se revela ineficaz, pelo uso de invariantes errados ou por falta de análise, o sujeito tende a modificá-lo.

Perante uma nova tarefa o aluno faz uso das suas competências e concepções. As primeiras organizadas em esquemas, apoiam-se no conhecimento do real e podem estudar-se através das acções em situação do sujeito. As segundas não são analisadas como esquemas, organizam-se em objectos, propriedades, relações e proposições e exprimem-se através da linguagem e de outras representações simbólicas.

Os invariantes são componentes cognitivos dos esquemas e estabelecem a ligação com as concepções.

As concepções e as competências desenvolvem-se ao longo de um período de tempo, quer se refiram às estruturas gerais do pensamento, quer aos conteúdos dos conhecimentos. Por exemplo, o conceito de fracção inicia-se aos 7/8 anos com actividades que envolvem valores como 1/2 ou 1/4, mas o conceito de número racional constitui ainda uma fonte de dificuldades aos 15/16 anos.

2.1.2 Teorema-em-acção e Conceito-em-acção

Os conhecimentos que fazem parte dos esquemas são designados, pelo autor, por teorema-em-acção e conceito-em-acção, ou usando uma expressão mais abrangente, invariantes operatórios.

Na apropriação dos invariantes operatórios a acção do sujeito é decisiva uma vez que se situa no plano do significado e do conceito. Não tendo em consideração as explicações verbais do sujeito, o uso que faz das palavras e dos símbolos, corre-se o risco de tomar por conceito, a palavra ou o signo que designa o conceito.

A automatização (conduta observável, por exemplo na realização do algoritmo da adição, em muitas crianças do 1°ciclo, sem que sejam capazes de explicitar as regras) é uma das manifestações mais visíveis do carácter invariante da organização da acção. Mas a automatização não significa necessariamente que o sujeito não tenha o controle das condições que tornam possível tal operação. De facto, todos os nossos comportamentos assumem uma parte de automaticidade e uma parte de decisão consciente.

Assumindo que a linguagem é extremamente importante na aprendizagem consciente, Vergnaud defende, no entanto, a necessidade de distinguir explicitação de tomada de consciência e, por outro lado, se se considera a explicitação antes ou depois da descoberta da acção. Antes da acção, tanto pode tratar-se de uma tomada de consciência sem explicitação como de uma explicação verbal, enquanto que depois da acção trata-se mais de uma análise que evidencia muitas vezes um trabalho de explicitação verbal.

Em situações de aprendizagem das competências matemáticas, observa-se a aquisição de numerosos conhecimentos-em-acto, que não serão explicitadas serião mais tarde e, por vezes anos. Por exemplo, a adição e a subtracção por contagem, nas crianças, são ocasião para elas descobrirem numerosos teoremas-em-acto, que não explicitam. É o que acontece quando as crianças contam 3+6 e substituem por 6+3 (contar a partir do maior), que traduz a comutatividade da adição. Estas evidências fazem supor que há sempre algo de implícito nos esquemas.

Procurando uma aproximação às posições de Vygotsky, Vergnaud chama a atenção para a semelhança entre conceito inconsciente e os invariantes operatórios, sendo que, apesar destes não serem explicítos, podem assumir uma forma consciente ou inconsciente.

Quando se fala num conceito assume-se necessariamente uma representação através de significantes, pois só assim se torna possível uma discussão sobre o referido conceito. Contudo o significante não é o conceito, há um outro aspecto que não se esgota no significante - são os invariantes que o sujeito reconhece na sua acção sobre o mundo real e que, como se referiu, podem ser conscientes ou inconscientes.

Estritamente ligada à noção de invariante é a de teorema-em-acção, isto é, as relações de alto nível lógico que a criança vai construindo à medida que actua sobre o real e que resolve problemas no espaço, no tempo, no domínio das quantidades e das grandezas (Vergnaud, 1986). Aqui a expressão "em acção" pretende significar que o sujeito nem sempre é capaz de explicitar ou justificar as propriedades das relações utilizadas na resolução da situação.

Para ilustrar a referida noção, Vergnaud apresenta o exemplo da criança que, ao pôr a mesa, conta as pessoas que estão na sala e as pessoas que estão no jardim, somando de seguida os dois números para saber quantas pessoas há ao todo. A criança não conta o todo quando já contou as partes, isto é, a criança antecipa a contagem (procedimento *counting on*).

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B \quad \text{porque} \quad A \cap B = 0$$

Os teoremas-em-acção englobam uma grande variedade de conteúdos, não são expressos numa forma matemática ou de outra qualquer, mas estão associados a certos valores de variáveis podendo constituir um ponto de partida. Certos conhecimentos aprendidos pelas crianças podem não ser utilizados por elas e, neste sentido, não constituem teoremas-em-acção, assim como outros, construídos por elas, nunca tomam a forma de verdadeiros enunciados, são teoremas-em-acção que não são teoremas.

O conceito de cardinal, de estado inicial, de transformação e outros são imprescindíveis na conceptualização das estruturas aditivas. Não são de tipo proposicional, isto é, não se pode afirmar acerca desses conceitos se são verdadeiros ou falsos. Raramente são explicitados pelos alunos ainda que construídos por eles na acção - são conceitos-em-acção.

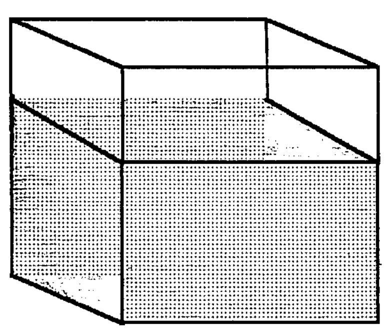
Muitos alunos usam as propriedades da função linear em diferentes momentos da sua experiência, com a noção de proporção, de multiplicação e de divisão. Essas propriedades constituem teoremas-em-acção, os alunos não são capazes de explicar porque as utilizam.

Conceito-em-acção não é um conceito e teorema-em-acção não é um teorema. Se na ciência se pode discutir a pertinência dos conceitos e dos teoremas uma vez que são explícitos, com os invariantes operatórios isso não é possível.

Como refere Vergnaud (1990a) conceitos e teoremas explícitos formam a parte visível do *iceberg* da conceptualização, sendo que a parte escondida é formada pelos invariantes operatórios que viabilizam aqueles. Do mesmo modo não se pode falar dos invariantes operatórios integrados nos esquemas sem a ajuda das categorias de conhecimento explícito.

Veja-se uma possível representação do *iceberg* da conceptualização, em que a parte não sombreada corresponde aos conhecimentos explícitos e a parte sombreada aos conhecimentos implícitos nas condutas do sujeito em acção.

Conceitos e Teoremas



Invariantes Operatórios: Teoremas-em-acção e Conceitos-em-acção

Figura 3 - O *Iceberg* da Conceptualização

2.1.3 A Importância da Teoria dos Campos Conceptuais em Didáctica da Matemática

Segundo Vergnaud (1991), a função do psicólogo que se interessa pela aprendizagem das matemáticas é estabelecer classificações, descrever procedimentos, formular conhecimentos-em-acção, analisar a estrutura e a função dos enunciados e das representações simbólicas, de tal modo que tenham sentido matemático.

Numa filiação construtivista, na teoria dos campos conceptuais consideram-se as relações entre o "sub-sistema sujeito que aprende" e o "sub-sistema saber ensinado", mas "os conteúdos não são considerados como o substracto sobre o qual se vai desenvolver a investigação de uma organização e de uma hierarquização de estruturas mentais gerais, e a noção de campo conceptual está lá, precisamente para, de alguma forma, reabilitar os conteúdos do conhecimento" (Artigue & Douady, 1986).

O pensamento consiste em operações conceptuais e pré-conceptuais sobre os significados e em operações simbólicas sobre os significantes. A actividade do sujeito traduz-se através de símbolos, conceitos, noções que reflectem o mundo material. Os vários sistemas simbólicos como, por exemplo, os esquemas, a linguagem, o espaço, a representação imaginada, têm ligações entre eles e com o próprio significado. A criança raciocina fazendo uso, simultaneamente, das diferentes representações, passando de umas às outras e de uma situação real à representação.

Esta perspectiva apresenta semelhanças com a defendida por Behr et al. (1983), objecto de análise no próximo capítulo, quando evidenciam diferentes sistemas representacionais como os materiais concretos, os desenhos, os símbolos "falados" e escritos, referindo-se às diferentes representações dos números racionais.

Na descrição de um campo conceptual é preciso fazer a análise das situações e dos procedimentos dos alunos que incluem as concepções, as argumentações e as representações simbólicas que utilizam. Por isso, defende-se o estudo das condutas em situação.

Tal como para um conceito, nas concepções dos sujeitos também se consideram diversas componentes:

- a classe das situações-problema que dão sentido ao conceito para o aluno;

- o conjunto dos significantes que ele é capaz de lhe associar, nomeadamente as imagens mentais, as expressões simbólicas;

- os utensílios, teoremas, algoritmos de que dispõe para manipular o conceito (Artigue & Douady, 1986). As autoras que consideram a noção "concepção do sujeito" como essencial, associam-na a um estado de conhecimento do sujeito, num determinado momento e em relação a um dado conceito.

Neste contexto torna-se fundamental investigar as situações-problema que conferem significado e função a um conceito (Vergnaud, 1986a). A operacionalidade de um conceito deve ser provada através de diversas situações e só a análise de uma grande variedade de condutas e de esquemas permite compreender em que consiste, do ponto de vista cognitivo, um determinado conceito. Acentue-se que, numa perspectiva psicológica e didáctica, Vergnaud (1990a) entende conceito como um conjunto de invariantes utilizáveis na acção.

O conceito de número racional é abordado numa variedade de aspectos, quando se considera a aplicação do que tem sido aprendido, constituindo um bom exemplo do que anteriormente se disse.

Outros conceitos como, o de número, o de função, também só se compreendem através de uma diversidade de problemas práticos e teóricos. Cada um desses conceitos tem várias propriedades, cuja pertinência é variável segundo as situações a tratar, alguns podem ser compreendidos muito cedo, outros só mais tarde. Tomemos, como exemplo, a facilidade revelada em tarefas que envolvem quantidades discretas e contínuas para as fracções 1/2 (alunos do 5° ano resolvem-nas completamente) ou 1/4 e a dificuldade manifestada para outras fracções, como 3/4 e 2/5.

Na compreensão do conceito de número racional estão envolvidas várias componentes, sendo que "a divisão do todo em partes" é hoje aceite pelos investigadores como a primeira experiência dos sujeitos com fracções. Esta é a razão porque autores, como Kieren (1976) e ainda Behr et al. (1983), defendem que a aquisição desse conceito é básico para a compreensão do conceito de número racional.

Num campo conceptual há que considerar, em primeiro lugar, um conjunto de situações e, depois o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas. Esta abordagem permite gerar uma classificação que assenta na análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos postos em jogo. Veja-se o que Vergnaud (1990a) identifica como etapas na elaboração do campo conceptual das estruturas multiplicativas, assim designado porque implica multiplicações ou divisões. Assim, para a sua análise contribuem, entre outros, o conceito de proporção simples e múltipla, função linear e n-linear, relação escalar directa e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fracção, número racional, múltiplo, divisor, etc e teoremas, tais como, as propriedades de isomorfismo da função linear e as propriedades que dizem respeito ao coeficiente constante entre duas variáveis linearmente ligadas.

Na realidade, quando se pretende estudar a psicogénese dos conteúdos dos conhecimentos há necessidade de proceder a uma decomposição do conhecimento em largos e coerentes domínios, não fazendo sentido estudar em separado aspectos em relação aos quais os alunos encontram relações.

A teoria dos campos conceptuais ao privilegiar os modelos que atribuem papel essencial aos conceitos matemáticos, não exclui a pertinência da forma dos enunciados e do número dos elementos postos em jogo.

Pela repercussão que tem em Didáctica da Matemática evidencia-se o modo como nesta perspectiva se interliga a formação de conceitos e a resolução de problemas. Ao defender-se que a resolução de problemas deve funcionar como fonte e critério de conhecimento e, portanto, o conhecimento conceptual deve aí ser imerso, rejeita-se a ideia de que a resolução de problemas consiste numa nova combinação de acções e de regras e que a formação de conceitos consiste na emergência de novas categorias, novos modos de conceptualizar a realidade. Aceitar esta última posição conduz a subestimar o papel que a representação e os conceitos desempenham na resolução de problemas e, por outro lado, o papel que estes assumem na formação de conceitos.

2.2 A NOÇÃO DE OBSTÁCULO NA CONSTRUÇÃO DO SABER MATEMÁTICO

Ao longo dos tempos a análise dos erros tem sido abordada de diferentes modos. Actualmente é amplamente utilizada pelos investigadores como um meio de fazer inferências sobre a natureza dos processos mentais no pensamento matemático, perspectivando-se o erro como uma concepção alternativa e não como uma insuficiência.

2.2.1 A Análise do Erro em Matemática

Numa breve referência histórica da análise dos erros, Greer (1989) e Mulhern (1989) assinalam que os primeiros estudos consistiam em considerar apenas o número de respostas incorrectas para um determinado problema. Posteriormente passou-se a classificar os erros e com esta categorização foi possível começar a fazer inferências sobre os factores que podem conduzir ao erro.

Há investigações que utilizam tarefas em que se modificam determinados aspectos e os padrões de erros identificados dão indicações sobre como é que as estratégias de resolução de um problema estão a ser usadas. A apresentação a alunos de duas tarefas que diferem apenas num aspecto ajuda a detectar padrões de erros e a fazer inferências sobre processos subjacentes. Um outro método de pesquisa consiste em elaborar tarefas relacionadas com uma outra em relação à qual o aluno teve um desempenho correcto.

De qualquer modo, a análise dos erros-padrão resulta sempre de uma prévia identificação de erros sistemáticos.

Nos primeiros estudos, o principal objectivo era fornecer informações aos professores sobre o maior ou menor grau de dificuldade de um dado assunto e, em consequência, construir programas de tal modo que o tempo dedicado à prática de determinados exercícios dependia daquele.

Mas é sobretudo quando se encara o processamento de informação como modo de abordar o pensamento matemático e a resolução de problemas que começam a desenvolver-se os métodos indirectos de observação dos processos mentais.

No estudo dos processos mentais consideram-se várias técnicas de análise dos erros, como os procedimentos *buggy*, a análise racional da tarefa e a simulação em computador. Nesta perspectiva está subjacente a ideia de criar informação com fins de diagnóstico, embora nem sempre esteja presente a natureza profunda do pensamento matemático.

Num estudo exaustivo sobre a utilização e a génese dos algoritmos (adição e subtracção), Fayol (1990) conclui que, quer para o psicólogo quer para o professor, o estudo dos *bugs* revela-se de grande interesse, na medida em que é possível determinar se os erros cometidos estão ligados aos algoritmos ensinados. Partindo das diversas investigações sobre a subtracção escrita, este autor estabelece duas categorias de erros: as chamadas respostas falsas (8-3=4) e os erros sistemáticos ligados a uma compreensão incompleta ou defeituosa dos procedimentos a utilizar, os *bugs*. Verifica que estes erros variam de um sujeito para outro e, no mesmo, podem mudar de um momento para outro. Após ter adquirido ou não um certo procedimento, o aluno confrontado com a situação fica num impasse, porque se esqueceu ou porque não tinha aprendido o modo de resolução. O que acontece normalmente é que o sujeito inventa um solução, recorrendo a diversas estratégias mais ou menos pertinentes e mais ou menos estáveis, constituindo assim regularidades.

O estudo de Célia Maria Alverca, de 1990, realizado no âmbito do mestrado em Psicologia Educacional, sobre a ocorrência de erros na resolução de situações problemáticas na Matemática, com crianças do 1° ciclo, pode inserir-se nesta perspectiva.

Segundo Fayol (1990), a dificuldade em responder à questão: "o que significa dominar um conceito?" reenvia para a necessidade de estabelecer uma tipologia hierárquica de erros, de dispor de um modelo procedimental que forneça uma representação das operações a utilizar e da sua organização sequencial.

Nas investigações que estudam as diferenças nos processos de pensamento dos aprendentes e dos especialistas faz-se uma categorização dos erros, perspectivando-os, muitas vezes, como insuficiências. Weil-Barais & Vergnaud (1990) defendem que, em vez disso, as concepções dos sujeitos podem ser vistas como estruturas assimiladas que ao entrarem em conflito com outras concepções, como, por exemplo, as ensinadas na escola, geram mais tarde desiquílibrios nas estruturas cognitivas. Os autores falam de *bias* cognitivo para se referirem às concepções dos alunos que na resolução de determinadas classes de problemas, em Matemática e Física, constituem respostas sistemáticas, regularidades, não correspondendo às expectativas do professor.

Brousseau (1989) chama a atenção para a questão das diferentes estratégias que os alunos adoptam na resolução de tarefas matemáticas, muitas vezes, bem diversas das expectativas dos professores e que não podem ser equacionadas como erros.

No contexto de sala de aula, Schubauer-Leoni (1989) considera fundamental distinguir os erros que dependem do funcionamento e da descodificação que os alunos fazem do que está implícito numa relação pedagógica-didáctica. Sendo assim, defende que a problemática do erro deve ser encarada segundo o ponto de vista do aluno, do professor e do investigador. Numa teoria psico-social dos factos didácticos, a autora considera que há vários "níveis de obstáculos no processo de aculturação escolar" e interessa, então, conhecer de que natureza são os obstáculos que o sujeito didáctico encontra e em que situações de aprendizagem.

Parece, assim, de considerar outro tipo de erros, para além dos que resultam de dificuldades conceptuais, os que podem ser atribuídos a ideias dos alunos acerca dos problemas e das expectativas dos seus professores. Só deste modo se explica determinadas respostas que os alunos dão aos chamados problemas "absurdos", em que há uma quebra do "contrato didáctico", entendendo-se por contrato didáctico o que determina, em parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro vai ter de gerir e aquilo que, de uma forma ou de outra, será responsável perante o outro (Brousseau, 1982 citado por Artigue & Douady, 1986).

Na última década tem vindo a ser defendido, quer pelos investigadores, quer pelos professores, a ideia que os erros podem funcionar como um bom instrumento na diagnose das dificuldades de aprendizagem e consequentemente contribuir para o delineamento de estratégias de remediação. É óbvio que é preciso saber distinguir as razões inerentes a cada tipo de erro para que se não façam interpretações apenas do foro cognitivo em situações em que o cognitivo foi modelado por causas externas com o fim de manter coerências.

Acresce ainda que a interpretação dos erros pode significar um meio de motivar e explorar situações em matemática. Na realidade, como refere Borasi (1987), na história da matemática muitas vezes os erros feitos inicialmente foram ponto de motivação para a revisão da metodologia da disciplina. Tentando fundamentar porque os erros podem ser motivadores numa situação de aprendizagem, a autora aponta os seguintes motivos:

-os erros apresentam um estímulo natural para a acção, mostram que os resultados não foram alcançados e, portanto, alguma coisa tem de ser feita;
- podem dar informação valiosa sobre as causas do insucesso e, nesse sentido, sugerir alternativas;
- os erros não só permitem identificar insuficiências na estratégia escolhida para alcançar um determinado objectivo, mas também apontam as fragilidades e as limitações de estratégias válidas;
- podem ajudar a identificar características específicas do contexto e, assim, mostrar que a abordagem já realizada era inadequada e necessita de ser redefinida.

2.2.2 A Natureza dos Obstáculos

Muitas vezes os professores apontam o "bloqueio em matemática" como modo de explicação para as dificuldades manifestadas pelos alunos no decorrer da aprendizagem. Como consequência, a sua atitude perante respostas erradas é de surpresa e conduz, normalmente, como forma de ultrapassar esse bloqueio, à repetição de exercícios por parte dos alunos. Partindo da ideia de que determinado conteúdo foi bem trabalhado nas aulas, têm dificuldade em entender porque é que os alunos erram. Assim, os professores avançam com explicações como, a falta de atenção, a falta de estudo e ainda as dificuldades de aprendizagem daqueles.

Essa opinião pode resultar da convicção de que a "matemática não é para todos", havendo, assim, alunos que não são capazes de aprender matemática, porque ocorrem obstáculos que se revelam, para alguns, intransponíveis. Deste modo, há alunos que vão desistindo da disciplina, ao longo dos vários anos, "incapazes de aprender matemática".

Neste contexto, os erros são vistos pelos professores como mais ou menos graves, resultando uns da total incompreensão de um assunto e, neste caso, são normalmente sistemáticos, difíceis de ultrapassar, logo "não vale a pena insistir", enquanto outros erros podem ocorrer por falta de atenção, sendo geralmente aleatórios.

Há erros que resultam de uma aplicação correcta e constante de um procedimento sistematicamente deficiente ou ainda podem surgir quando o aluno usa procedimentos defeituosos e possui concepções alternativas que nem sempre são reconhecidas pelo professor. Muitas vezes os alunos inventam os seus próprios métodos não formais para resolver problemas que podem conduzir a sòluções correctas. Outras vezes os alunos fazem uma generalização abusiva de propriedades e regras aprendidas.

Para os investigadores o estudo dos erros, em particular quando são sistemáticos, é muito importante. A sistematicidade tem subjacente uma causa, podendo significar que os alunos estão a utilizar procedimentos inválidos ou baseados em concepções alternativas.

Como se referiu, o interesse destes estudos resulta do facto de ser possível fornecer aos professores informações sobre os erros dos alunos, permitindo a ajuda no diagnóstico e na interpretação das dificuldades de aprendizagem daqueles.

Num estudo sobre como as concepções dos alunos entram em conflito e mudam no processo de aprendizagem da matemática, Meissner (1986), descreve três tipos de conflitos cognitivos que podem estar na origem de determinado tipo de erros. Assim, este autor refere a ocorrência de conflitos que podem ser explicados pela idade, são os chamados conflitos de desenvolvimento. Outros são resultantes de hiatos entre dois tipos de conceitos (espontâneos e científicos, no sentido de Vygotsky) e um terceiro tipo surge quando o aprendente excede os limites de um conceito. Pode acontecer que o aluno não tenha consciência do conflito conceptual e, neste caso, vai tentando através de algumas pistas explicar o seu comportamento, resistindo à mudança e persistindo no seu ponto de vista. Se o conflito se torna consciente para o aluno então vai tentar adaptar ou mudar o seu conceito.

Contudo, a problemática do erro assume uma nova perspectiva no processo de construção dos saberes quando Brosseau introduz a noção de obstáculo em didáctica. O termo obstáculo, usado com frequência pelos professores, parece, no entanto, nem sempre significar o mesmo.

Tal como nos diz Vergnaud (1989a) há necessidade de clarificar o conceito e, para isso, distingue dificuldades conceptuais de erros didácticos e dos verdadeiros obstáculos epistemológicos. Assim, segundo este autor, só há verdadeiro obstáculo quando as novas concepções contradizem concepções anteriores bem arreigadas no aprendente, podendo estas ressurgir a qualquer momento. Neste sentido, não se ultrapassa um obstáculo epistemológico sem que se proceda à sua análise para mudar de concepção e compreender a relação entre as concepções anteriores a as novas.

A maneira como se ensina pode ajudar a reforçar determinados obstáculos em vez de facilitar a sua ultrapassagem e, neste caso, fala-se de erros didácticos dos professores. É o que acontece, por exemplo, quando o aluno na resolução de problemas que envolvem uma operação foi treinado a escolher a operação em função de determinados vocábulos, fazendo uma transformação sintática das relações evidenciadas.

Há, no ensino da Matemática, numerosos exemplos de como uma situação menos adequada conduz a determinadas concepções que perduram no tempo e impedem mesmo novas integrações de conceitos. Veja-se o exemplo apontado por Vergnaud (1989a), no ensino do cálculo da área, em que a utilização com frequência de situações de revestimento da região considerada por unidades de área pode reforçar a concepção primitiva e consistente de que a multiplicação é a iteração da adição, podendo prolongar o ponto de vista uni-dimensional da área.

Vergnaud (1989a) considera, no domínio do saber matemático, três grandes dificuldades conceptuais e que podem ser encaradas como obstáculos:

- a rejeição do modelo exclusivo do número enquanto medida de uma grandeza ou de uma quantidade;
- a rejeição do modelo exclusivo da multiplicação como adição iterada de um mesmo número;
- a rejeição da ideia da utilidade do controle sistemático do sentido físico das expressões matemáticas utilizadas (ruptura aritmética-álgebra).

Brosseau (1989) chama a atenção para o facto de já se terem identificado diversos obstáculos, que são fundamentalmente cognitivos (ontogénicos, epistemológicos, didácticos e mesmo culturais), e analisado as suas causas, mas que, apesar disso, há ainda muito por investigar nesta área, particularmente as relações entre obstáculos que coexistem.

Os obstáculos não provêm somente da natureza do homem, dos conhecimentos ou do modo como se ensina, outros estariam ligados a uma certa evolução cultural e ainda dos conhecimentos didácticos e epistemológicos. Assim, os obstáculos ontogénicos estão relacionados com as limitações do sujeito num dado momento do seu desenvolvimento. Muitas vezes os conhecimentos científicos tomados como referência não correspondem aos problemas colocados e as representações não são identificadas na cultura. Está-se, neste caso, perante um obstáculo cultural. Os didácticos reenviam para decisões didácticas mal escolhidas e os epistemológicos são obstáculos que desempenharam um papel essencial no formação histórica dos conhecimentos e a sua rejeição deve-se ao facto de serem integrados explicitamente no saber transmitido.

O mesmo autor sugere a necessidade dos investigadores encontrarem os erros recorrentes e mostrar que eles se reagrupam à volta de concepções. É possível duas concepções que funcionam como obstáculo uma em relação à outra coexistirem num mesmo aluno, e uma concepção inicial pode não ser rejeitada, mas reforçada, apesar de, aparentemente, a quantidade de informação *a priori* ser suficiente.

Nesta perspectiva, um obstáculo é encarado como uma concepção, um conhecimento e não como uma falta de conhecimento ou uma dificuldade. Há um contexto no qual um dado conhecimento conduz a uma resposta, que é diferente fora desse contexto.

Quando se considera a história de um conceito, a maior parte dos obstáculos não está ligada a uma dificuldade, parece mais uma passagem obrigatória. Alguns desses obstáculos funcionam mesmo como "um patamar indispensável de integração", como uma etapa no decurso da elaboração do saber, um nível de estruturação do pensamento (Giordan, 1989)

Há obstáculos que são evitáveis através de indicações didácticas adequadas, outros não devem ser evitados porque o processo como são ultrapassados implica que vão sendo integrados em conhecimentos posteriores.

2.2.3 Dificuldades Conceptuais na Aprendizagem em Matemática

O estudo das concepções assume uma importância fundamental em didáctica uma vez que os erros observados nos alunos podem agrupar-se em torno dessas.

Segundo Weil-Barais & Vergnaud (1990), o termo concepção, em investigação, está ligado à descrição do significado dos conceitos (propriedades, invariantes relacionais, invariantes operativos) e quando um dado domínio de conhecimento é abordado os significantes são evocados. Por exemplo, que concepções têm as crianças sobre os números racionais? Que sistemas representacionais usam?

Usando as metodologias desenvolvidas no contexto da resolução de problemas é possível definir invariantes cognitivos, em relação aos quais os sujeitos podem estar mais ou menos conscientes.

Contudo, as afirmações do sujeito, isto é, o que ele é capaz de explicar, é insuficiente para compreender o seu conhecimento. Há, no entanto, respostas que são sistematicamente dadas em determinadas classes de problemas. Pode detectar-se a presença de um obstáculo através do que o aprendente diz e/ou faz nos esquemas de acção e não somente, nem principalmente nas declarações do sujeito.

Perante estas evidências, Vergnaud (1989a) aponta um conjunto de situações em que concepções anteriores funcionam como obstáculo à aprendizagem de novos conceitos. É o que acontece, por exemplo, no início do estudo da álgebra, relativamente a ideias anteriores do conceito de número. Os números são encarados como grandezas (cardinal, comprimento, área, dinheiro, quantidades físicas) e não como uma relação entre grandezas. Consequentemente um resultado não pode ser negativo.

Outras dificuldades são avançadas pelo autor, como a que resulta dos alunos lerem expressões da esquerda para a direita, levando-os a considerar, muitas vezes, como situações modelo das expressões algébricas as que progridem no tempo de um estado inicial à esquerda para um estado final à direita. Com esta concepção, o sinal idêntico não significa uma relação de igualdade simétrica e transitiva que é necessária à compreensão de equações, mas antes uma relação que liga um processo de produção a um resultado .

Na realidade, as fontes de erro são variadas. Alguns erros podem derivar do uso de significantes que adquiriram um certo significado num dado contexto (no dia-a-dia, ou algumas vezes aprendido num nível mais baixo de escolaridade ou noutras áreas do saber) e um significado diferente noutro contexto. Pode não se tratar, como muitas vezes os professores pensam, de uma questão de vocabulário ainda não memorizado ou ainda como resultado de uma dificuldade em adquirir sistemas formalizados matemáticos ou gráficos.

Outra fonte de erro diz respeito aos modos de compreensão dos problemas que os alunos preferem e que é normalmente a acção e o domínio do acontecimento. Embora um dos objectivos para estudar matemática seja adquirir instrumentos conceptuais para pensar e compreender o mundo real, esse objectivo só é alcançado por meio de desvios que estão muito longe do tipo de processamento realizado sobre a informação de assuntos retirados do seu contexto, desvios que envolvem conceitos altamente específicos e modos de controle do pensamento (Rostand, 1985, citado por Weil-Barais & Vergnaud, 1990).

Neste sentido a tarefa do psicólogo educacional é primordial na medida em que pode evidenciar em que é que o pensamento do sujeito psicológico difere dos processos de pensamento desenvolvidos em disciplinas, como a matemática. Tais análises tornam possível determinar que tipos de mudança devem ocorrer e estudar os vários caminhos possíveis nos quais a transição de um processo de pensamento para o próximo pode ser conseguido .

Na aprendizagem dos conceitos dos números racionais há sérias dificuldades que é preciso estudar, ou seja, há concepções que é preciso conhecer e tentar saber porque emergem.

Conhecem-se vários tipos de hiatos que ocorrem com fracções. Exemplo disto é o que acontece com alunos do 6°ano de escolaridade que transformam facilmente a fracção 8/12 na equivalente 2/3, mas quando têm que escolher entre 8/12 ou 2/3 de um chocolate preferem 8/12 porque dizem ter maior número de bocados.

Na aquisição de conhecimentos sobre os números racionais, as concepções que os alunos foram elaborando acerca dos números inteiros podem funcionar como obstáculo à aprendizagem daqueles. Na verdade, para que esta aconteça os alunos terão que modificar ou reorganizar ideias que já tinham assumido como verdadeiras. A ideia da multiplicação conduzir sempre a obter "coisas maiores" pode impedir o aluno de considerar o produto de 0,23 por 0,75.

O uso do modelo dos números inteiros funciona também como obstáculo às concepções dos decimais. Por razões de escrita e de estrutura, este obstáculo é mais difícil de ultrapassar que o que os opõe às concepções dos racionais. Veja-se como exemplo o seguinte: na sua prática, os alunos procuram fazer arredondamentos para efectuar operações, tentando aproximar-se do modelo dos inteiros (ex: 225,43:25,02 pode ser considerado pelo aluno 225:25), no entanto, esse procedimento pode não resultar (ex: 0,84:0,20). Outros exemplos podem ser apontados, como as concepções das fracções relativamente ao aspecto medida e ao aspecto relação.

Segundo Brosseau (1989), muitas vezes o que acontece não são os conhecimentos ensinados que faltam, mas antes os instrumentos pessoais da compreensão do aluno, ou seja, ele não compreende porque é que tem de mudar. Neste sentido aprendizagens precoces podem aumentar as possibilidades de transformar um saber necessário em obstáculo intransponível.

Veja-se, na adição dos números racionais, um erro muito frequente nos alunos do 2° ciclo:

$$2/3 + 5/7 = 7/10$$

Esta concepção, que a maior parte das vezes é assumida como erro, pode conter informação valiosa sobre as dificuldades específicas que os alunos encontram na aprendizagem das fracções e sobre as suas concepções de fracção e de regras.

Uma análise mais fina deste erro pode conduzir a colocar as seguintes questões: qual é a regra alternativa que o aluno está a aplicar para adicionar fracções e porque é que ele faz isso?

Parece claro que o aluno está a adicionar separadamente os numeradores e os denominadores. Mas, quais são as razões? O aluno pode estar a confundir a regra para adicionar com a regra para multiplicar fracções, pode estar a tentar operar com fracções como se adicionasse números inteiros. Sabe-se que muitos alunos vêem a fracção como dois números separados por uma linha e, então, não parece tão sem sentido que a adição de duas fracções se faça operando sobre os numeradores e sobre os denominadores, separadamente e, por fim, se desenhe uma linha entre as respostas.

Hart (1981) verifica que muitas crianças com 12-13 anos de idade equacionam as fracções como pares de números naturais não relacionados, tratando-os separadamente. Como é evidente, estas inferências têm repercussões na realização dos algoritmos, particularmente na adição e subtracção de fracções com denominadores diferentes.

Borasi (1987) adianta outras explicações que têm em conta situações da vida real, nas quais tal procedimento de operar parece apropriado, como quando se faz o registo dos resultados de um jogo (por exemplo, se hoje ganhaste 2 em 3 jogos e amanhã ganhas 5 em 7, ao todo ganhaste 7 em 9 jogos e não 29/21 - na situação anterior está a tratar-se com fracções e nesta com *ratios*). Para fracções e *ratios* usam-se normalmente as mesmas palavras e símbolos (*n* sobre *m* ou *n*/*m*) e isso faz crer que são essencialmente o mesmo objecto matemático.

O tratamento desta questão tornar-se-á mais fácil se o professor assumir o erro como concepção e fôr capaz de colocar hipóteses sobre essas concepções e identificar as mais relevantes em cada aluno. É claro que esta posição tem implicações no processo de ensino das fracções, e em sentido mais lato, na didáctica da matemática.

2.3 O "MEGACONCEITO" NÚMERO RACIONAL

O estudo dos números racionais começou por uma grande incidência relativamente ao seu ensino. No entanto, na última década a investigação sobre os números racionais tem o seu enfoque na aprendizagem e as abordagens são diversas. Pela sua relevância, destacam-se os trabalhos de Kieren, de Vergnaud, de Behr, Lesh, Post & Silver e de Hart.

2.3.1 Diferentes Perspectivas dos Números Racionais

Segundo Wagner (1976, citado em Kieren,1980b) os números racionais podem ser interpretados como um mega-conceito que envolve muitos elementos interrelacionados.

Desde há muitos anos que os educadores se têm preocupado com o ensino dos números racionais. Mais recentemente essa preocupação estendeu-se também à aprendizagem, ou seja, procura conhecer-se como é que um sujeito constrói o seu conhecimento sobre os números racionais. Este interesse é tanto mais importante, quanto na maior parte das vezes os programas não são desenvolvidos com base na análise do modo como as crianças e os adolescentes pensam acerca dos assuntos.

Segundo Behr et al.(1992), o estudo dos números racionais tem sido abordado segundo diversas perspectivas: linguística (Nesher), ciência da cognição (Greeno), ciência dos computadores (Ohlsson), psicologia do desenvolvimento (Vergnaud), ciência (Karplus e Schwartz), desenvolvimento curricular em Educação Matemática (Hart) o que torna extremamente enriquecedora a discussão, mas dificulta a comunicação.

Há investigações que têm como preocupação a identificação de estádios no processo de pensamento sobre os números racionais em crianças, em que se defende uma diferenciação gradual e a integração progressiva de subconstructos considerados isoladamente. Estudos, como o de Kieren & Ganson (1979), em que se procura observar se o desempenho num dado estádio em tarefas que envolvem um subconstructo corresponde ao desempenho num nível comparável em tarefas que envolvem um outro subconstructo. Outros em que se estudam as relações entre aptidões específicas e a compreensão básica de números racionais.

Em 1831, De Morgan (citado por Kieren, 1980b) escreve que as fracções constituem um tópico extremamente difícil, considerando o conceito de fracção como um conjunto de algoritmos, particularmente a adição. Uma análise dos programas curriculares vigentes até 1991, permite ver como estes reflectem esta posição que Kieren chama de conhecimento superficial (*behavioral surface*) do constructo de número racional. Este autor considera esta visão, em que faltam a nível mais elevado constructos de suporte, como responsável pela incapacidade funcional do sujeito em lidar com os números racionais.

Mais tarde (anos 70), o movimento da matemática "moderna" procura alterar esta situação e o que se observa nos curricula e nos manuais escolares é a focalização no quociente e na equivalência de fracções, mas ainda sem preocupações de interligar os diversos constructos, isto é, os conceitos são desenvolvidos isoladamente. De certo modo, manteve-se uma perspectiva superficial de conhecimento.

Quando se fala do conhecimento que os alunos têm dos números racionais, habitualmente pensa-se no domínio que possuem de situações parte-todo e de determinadas relações, como equivalência e *ratio*. Os números racionais são fundamentais na medição de quantidades contínuas e estão também envolvidos em comparações quantitativas de duas grandezas (*ratio*). As concepções dos alunos sobre os números racionais decorrem das suas ideias de fracção e razão (*ratio*) e ainda sobre os decimais que são também importantes no desenvolvimento daquele conceito.

No estudo da didáctica dos números racionais deve ter-se presente a sua definição em matemática - elementos de um campo quociente infinito, consistindo em classes equivalentes infinitas e os elementos dessas classes equivalentes são fracções - mas ainda o papel que assumem em situações reais e em situações de aprendizagem.

Do ponto de vista da história da matemática a construção dos números racionais foi tardia. Por outro lado, quando as fracções são aplicadas a situações do mundo real são vistas do ponto de vista pedagógico e então assumem numerosas "personalidades" (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992).

Vergnaud (1983) considera que o principal problema para os alunos é que os números racionais são números e as entidades envolvidas nas estruturas multiplicativas não são números "puros" mas medidas e relações. O autor salienta ainda que os números racionais têm um duplo sentido: são quantidades e, assim podem ser adicionadas - estruturas aditivas - mas são também funções (relação entre quantidades) que podem ser compostas (1/2 de 2/3 de uma dada quantidade é 2/6 da quantidade inicial) apresentando então uma estrutura multiplicativa. Com os números inteiros é possível aplicar o número a quantidades discretas, com os números racionais a quantidades contínuas.

Segundo Ohlsson (1988), apesar das dificuldades associadas às fracções, serem essencialmente de natureza semântica (por exemplo: "qual a significação de 2 combinada com a de 3 para gerar a significação de 2/3?"), são também resultado de muitas ideias relacionadas entre si que só parcialmente são sobrepostas.

O ensino e a aprendizagem dos números racionais constitui um problema para professores e alunos. Como consequência dos maus resultados dos alunos no desempenho de tarefas com números racionais alguns teóricos e também professores têm vindo a defender o adiamento da sua introdução para níveis mais elevados de idade, nomeadamente para o período das operações formais. É claro que esta posição não considera como uma alternativa a possibilidade de um ensino melhor para crianças mais novas.

O conceito de número racional é dos mais complexos e importantes que os alunos do ensino básico estudam. A importância do seu estudo pode ser vista segundo várias perspectivas: a) numa perspectiva prática porque a capacidade de lidar com estes conceitos melhora a capacidade para compreender e tratar com situações do mundo real; b) numa perspectiva psicológica porque providenciam um campo no qual as crianças podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual; c) numa perspectiva matemática, porque a compreensão destes conceitos constitui a base na qual assentam mais tarde as operações algébricas (Behr et al., 1983).

Muitas dificuldades em álgebra podem ser devidas a uma incompleta compreensão de ideias adquiridas anteriormente sobre fracções.

Os números racionais permitem trabalhar uma variedade de situações do mundo real e estão relacionados com outros conceitos matemáticos como os números inteiros, números reais, medida, transformações geométricas, álgebra, etc.

É neste sentido que consideramos importante continuar a investigar nesta área, tentando conhecer melhor as concepções dos alunos, tendo em vista o desenvolvimento de novas didácticas.

2.3.2 Definições e Natureza dos Números Racionais, segundo Kieren

Numa primeira análise dos números racionais Kieren (1976) considera sete interpretações: fracções, decimais (como extensão natural dos números inteiros), classes equivalentes de fracções (1/2, 2/4, 3/6, ...), medidas (pontos numa recta numérica), quocientes (números na forma $x = p/q$ em que x satisfaz a equação $qx = p$), operadores (são operadores multiplicativos que aumentam, diminuem) e números *ratio* (são números na forma p/q em que p e q são inteiros e $q \neq 0$). Deste conjunto de conceitos, salienta cinco ideias que representam cinco padrões de pensamento, que não são matemática, nem psicologicamente independentes: parte-todo, quociente, medida, *ratio* e operador.

Segundo Kieren (1988) falar dos números racionais implica considerar a sua natureza: multiplicativa (sistema de composição de operadores) e aditiva (sistema de "vectores"). Esta dupla natureza faculta uma fonte de modelos matemáticos para quatro importantes situações da vida real: na medida de fenómenos contínuos, na divisão de quantidades contínuas (lado aditivo), na quantificação de certas comparações qualitativas, como as misturas ou quando algebricamente relaciona qualidades como a distância ou o tempo (lado multiplicativo). Os sistemas simbólicos associados com os racionais, fracções ou decimais, são úteis na descrição de situações parte-todo.

Nesta altura, os programas curriculares apresentavam os números racionais, em particular as suas representações, na forma de fracção e de decimal, e na sua introdução enfatizava-se o conceito parte-todo.

Piaget, Inhelder & Szeminska (1973) considera que para a compreensão operacional da componente espacial parte-todo da fracção são necessários os seguintes critérios:

1- a região "todo" ser vista como divisível;

2- o "todo" pode ser dividido em qualquer número de partes que seja preciso;

3- o conjunto das partes deve corresponder ao "todo" (a criança após uma dada partilha não pode ignorar as restantes partes)

4- o número de partes não corresponde necessariamente ao número de cortes;

5- as partes têm de ser iguais em tamanho;

6- as partes devem ser vistas como um todo (um sexto de um todo pode ser obtido dividindo cada metade em terços)

7- o todo é conservado, mesmo quando é cortado em peças.

Na discussão sobre como as crianças adquirem e usam o conceito de número racional, numa primeira conceptualização, Kieren (1980a) argumenta que é necessário considerar quatro subconstructos: medida, quociente, *ratio* e operador, em que os dois últimos formam a base para a natureza multiplicativa dos números racionais. Defende ainda que na base da construção destes subconstructos estariam dois processos ou mecanismos construtivos: a partição e a equivalência, como se pode ver na Figura 4. Os alunos capazes de realizar a partição são também capazes de realizar comparações e de reconhecer equivalências.

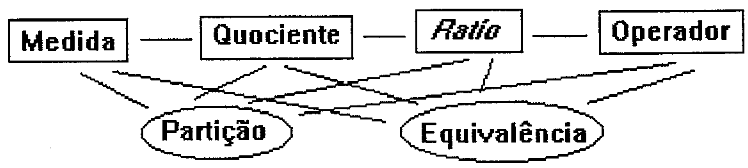


Figura 4 - Os Subconstructos e os Mecanismos Construtivos dos Números Racionais

Posteriormente, Kieren (1988) ao teorizar sobre a construção do conhecimento matemático, identifica cinco *faces* (o aspecto matemático, o psicológico, o uso da linguagem, o visual e os mecanismos construtivos). O mecanismo construtivo indica a importância de certos instrumentos de pensamento na construção proto-matemática e dos objectos matemáticos (a contagem é o mecanismo construtivo clássico usado na construção do conhecimento dos números inteiros).

O aspecto visual refere-se ao papel que as imagens físicas, figurais e mentais têm na construção e na aplicação das ideias matemáticas.

A linguagem tem uma função de orientação, mas o seu uso informal não orienta para um conjunto de frases formais, antes é utilizada em acções, em pensamentos no sentido concreto e associada a imagens. Kieren (1988) fala-nos do "uso informal da linguagem" que pode incluir, mas é diferente do "uso da linguagem informal", argumentando que é o referente e a relação com a acção/objecto/pensamento que determina a formalidade.

Na construção do conhecimento dos números racionais, a equivalência e a partição são mecanismos construtivos que operam ao longo dos quatro subconstructos para ampliar imagens e construir ideias matemáticas.

No modelo, que Kieren (1988) chama de "Modelo Intuitivo", a intuição tem um papel fundamental e é caracterizada de acordo com o esquema:

Mecanismos Construtivos

Imagens —— Uso Informal da Linguagem

(Adaptado de Kieren, 1988)

Figura 5 - Caracterização da Intuição na Construção do Conhecimento Matemático

Segundo o modelo há um conhecimento pessoal, nuclear, o conhecimento etnomatemático (segundo d'Ambrosio, 1985, citado por Kieren, 1988), que é quantitativo, espacial, e/ou padrão orientado na natureza, que se constrói porque se vive num dado ambiente (ou aprendemos com um adulto em relação a uma dada tarefa), e não é o conhecimento escolarizado, nem é identificado como sendo matemática.

As ideias mais primitivas de fracção ou racional é "metade de", "um quarto" e está associada ao mecanismo construtivo "dividir equitativamente" que é, por sua vez, o percursor da noção de partição (dividir uma quantidade em partes de igual tamanho ou número). Este conhecimento pode ser considerado o conhecimento pré-número racional.

A partição, que nos números racionais tem um papel semelhante ao contar nos números naturais, está inicialmente associada à igualdade entre as partes, posteriormente está relacionada com a quantidade e o número (o tamanho da parte está relacionada com o tamanho da região/objecto e com o número de partes), e, mais tarde, está ligada à actividade formal de divisão e factorização. A noção de partição é ainda fundamental quando um aluno compara números racionais ou procede à sua adição porque está a comparar duas partições (quando transforma no mesmo denominador, gera um conjunto de fracções equivalentes).

No esquema da Figura 6 é possível visualizar as relações entre o mecanismo construtivo - a partição - e outros conceitos fundamentais na construção do conhecimento pré-número racional.

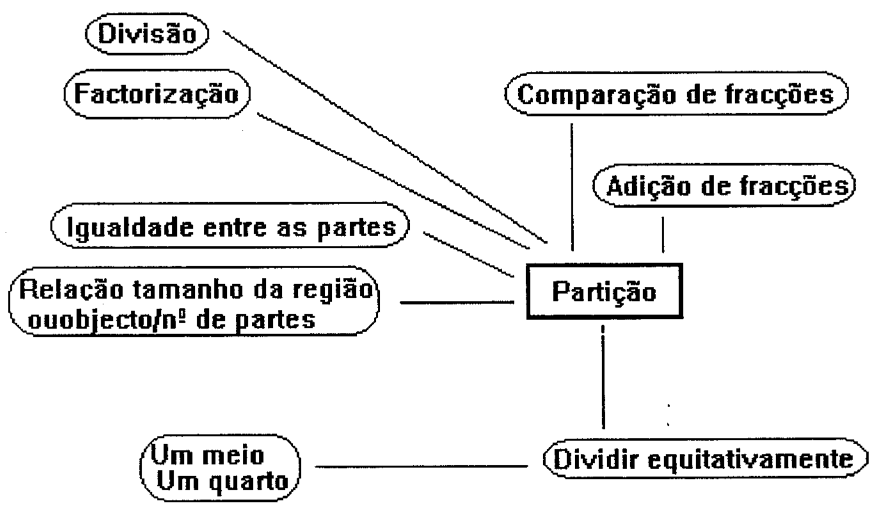


Figura 6 - Relação entre a Partição e outros Conceitos Associados ao Conhecimento dos Números Racionais

O esquema da reversibilidade, a capacidade de lidar com a inclusão de classes, com a comparação de dois conjuntos de dados e a proporcionalidade constituem mecanismos necessários ao desenvolvimento do conhecimento dos números racionais. A aquisição da noção de inclusão de classes parece central na capacidade de identificar a unidade, aspecto considerado chave nos subconstructos parte-todo, quociente e medida.

A comparação de dois conjuntos assume um papel importante no desenvolvimento das classes equivalentes, particularmente na composição de operadores, e finalmente o esquema da proporcionalidade que é fundamental na noção de *ratio* e equivalência.

Na Figura 7 esquematiza-se a hipótese proposta pelo autor relativamente à relação dos subconstructos dos números racionais com outros conceitos matemáticos.

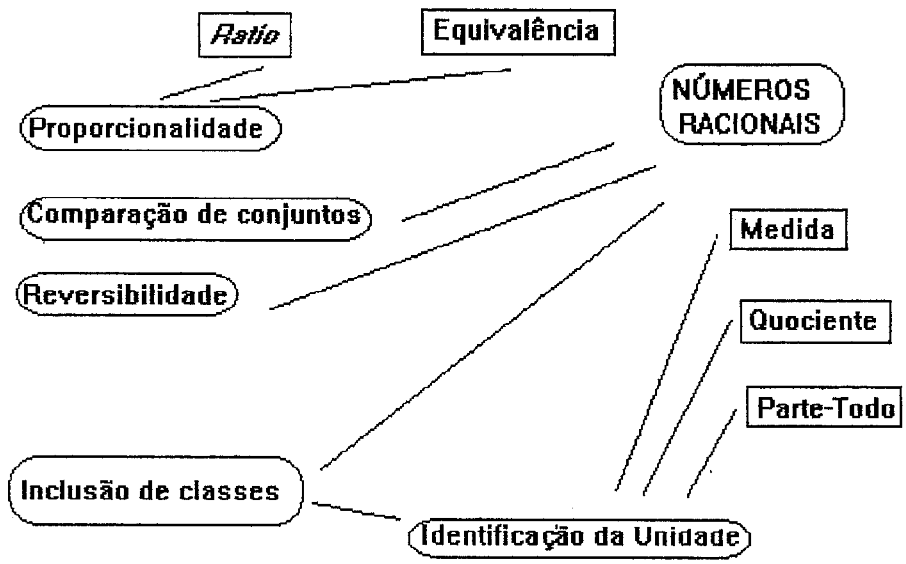


Figura 7 - Relação entre os Subconstructos dos Números Racionais e outros Conceitos Matemáticos

Como consequência dos seus estudos, Kieren conclui que há um pensamento padrão sobre os racionais que está presente quando um sujeito está a construir o conceito geral - número racional - e que é sustentado pelo uso de mecanismos construtivos (experiência) e de desenvolvimento (maturação).

Freudenthal (1973) sugere que o conhecimento do número racional reenvia para a noção de divisão e considera também que o sujeito constrói o conceito de número racional usando os mecanismos da partição e da equivalência.

Relativamente à noção de equivalência, Kieren (1980a) argumenta que se desenvolve de um nível informal para um nível mais formal. Inicialmente assume uma forma aditiva e quantitativa (por ex: face à pergunta "quanto é 3/4 mais 1/2?" normalmente uma criança responde "1/2 é 1/4 + 1/4 e tomo mais 1/4 para 1 e ainda tenho mais 1/4, então é $1\frac{1}{4}$"), para mais tarde se focalizar nos pares e finalmente se fixar no reconhecimento de que a equivalência significa uma classe inteira de fracções.

Os quatro subconstructos e os dois mecanismos vão-se desenvolvendo ao longo do tempo no sujeito, então a cada um deles estaria associada uma estrutura cognitiva. Kieren (1980b) argumenta que o domínio completo do conceito de número racional requer não só a compreensão progressiva de cada um desses subconstructos mas também a compreensão de como os vários subconstructos se interrrelacionam.

É, assim, que partindo daqueles mecanismos e constructos primitivos se vão desenvolvendo os subconstructos do número racional baseados na experiência e que podem ser vistos como uma variedade matemática desse conceito. A interpretação medida que implica seleccionar a unidade conveniente, cobrir a região com réplicas da unidade e proceder à contagem destas. Se não é possível revestir totalmente a região, então, a parte não coberta é dividida e uma das partes é agora usada como padrão para cobrir a parte restante e este processo repete-se se aquela parte não foi ainda totalmente revestida. Há naturalmente uma correspondência entre essa partição e a sua representação numérica e simbólica.

Os números racionais também podem ser pensados como quocientes, isto é, o número x que satisfaz a equação $ax = b$, em que a e b são números inteiros e $a \neq 0$, é um número racional. Os números racionais surgem assim como respostas a questões de divisão e estão mais enraízados na experiência.

Os números racionais são também números *ratio* quando se afirma que numa mistura de 1 colher de açúcar para 3 de água, "um quarto" é açúcar. Kieren chama a atenção para o facto de neste subconstructo a equivalência assumir um significado multiplicativo (o dobro, o triplo) com um carácter de "semelhante" mas não de "o mesmo". Assim, a medida 3/4 e 6/8 de uma unidade representa o mesmo, mas a razão 3 para 4 e 6 para 8, apesar de semelhantes, correspondem a fenómenos diferentes.

Os números racionais podem ser definidos como operadores (por ex: posso usar o operador 1/3 para traduzir uma parte de um canteiro dividido em três partes iguais, ocupar 1/4 dessa parte com malmequeres e traduzir a situação dizendo que os malmequeres semeados ocupam 1/4 de 1/3, ou seja, 1/12 do canteiro). Este subconstructo dá origem à estrutura multiplicativa dos números racionais.

Finalmente um outro subconstructo dos números racionais - a componente parte-todo - que, por um lado, dá origem ao nome fracção (números quebrados). É também do contraste parte-todo que deriva a linguagem dos números racionais (3/4 - três-quartos e ainda 0.75 - setenta e cinco centésimas). Esta linguagem é baseada na ideia de um par ordenado que resulta do contraste parte-todo.

No curriculum português, vingente na altura deste estudo, o constructo parte-todo assume o papel central e o conceito de número racional só é relacionado com os números quando é posto num contexto de medida e a sua conexão com o lado multiplicativo dos racionais é incidental. Mas, a criança pode ser capaz de dizer "três-quartos" para representar uma dada situação e não ser capaz de dizer se as partes têm o mesmo tamanho ou ainda de realizar a significância quantitativa de "três-quartos". Kieren considera como inapropriada a experiência com este subconstructo apenas, sem relação com os anteriores, o que levaria a uma compreensão insuficiente dos números racionais.

No modelo teórico apresentado para a construção do conhecimento matemático, Kieren (1988) fala da existência de uma rede ideal e pessoal sobre o conhecimento do número racional. Nesta rede considera seis níveis de conhecimento em que o primeiro se refere a constructos locais e restritos, de nível factual, o segundo compreende os constructos de partição, equivalência e identificação de unidades divisíveis, no terceiro inclui os constructos medida, quociente, ratio e operador. No quarto considera o conhecimento das relações escalar e funcional de que dependem o conceito de fracção e de equivalência, no quinto ocorre a síntese de todos os constructos acompanhada da construção do campo conceptual multiplicativo. O nível de conhecimento mais elevado, em que os números racionais são vistos como elementos de um campo de quociente infinito, permite não só provar teoremas, mas também explicar vários fenómenos de todos os níveis anteriores.

Kieren (1988) descreve ainda o conhecimento dos números racionais como obedecendo a uma estrutura constituída por quatro anéis concêntricos, em que o primeiro consiste no conhecimento básico que se adquire como resultado de se viver num determinado ambiente - o que d'Ambrosio (1985, citado em Kieren, 1988) chama conhecimento etnomatemático. O segundo anel reenvia para um nível de conhecimento intuitivo e segundo Kieren a escola deve partir deste saber adquirido na experiência do dia-a-dia para a aquisição do saber. O terceiro refere-se à linguagem, aos símbolos e aos algoritmos. Finalmente o quarto representa o conhecimento axiomático.

O modelo que se pretende dinâmico e interactivo, assume que um aluno compreende os números racionais quando é capaz de dominar qualquer um dos quatro subconstructos e interrelaciona pensamento e acção de um nível com pensamento e acção de outros níveis. Salienta ainda que a questão da hierarquia não se coloca tão explicitamente, realçando que são os subconstructos no seu todo que formam a base para o amadurecimento do funcionamento e não cada um tomado individualmente.

2.3.3 Definições e Natureza dos Números Racionais, segundo Behr, Lesh, Post & Silver

Para a compreensão dos números racionais foram identificados sete sub-constructos (Behr et al., 1983): o número racional como decimal, como uma relação parte-todo, como *ratio*, como quociente (indicando uma divisão), como operador e ainda como medida de quantidades contínuas ou discretas.

A compreensão de número racional implica não só a compreensão de cada um dos subconstructos mas também do modo como se interligam.

Behr et al. (1983) redefinem as categorias de Kieren (1976) propondo que os números racionais podem ser interpretados através de, pelo menos, sete subconstructos (fazem a distinção entre *ratio* e *rate*), que se descrevem a seguir:

-<u>Fracção</u> (fraccional measure) - corresponde à reconceptualização da noção parte-todo, isto é, quanto há de uma quantidade relativamente a uma dada unidade dessa quantidade. Quando se diz 2/3 (dois terços) de um chocolate, "terços" refere-se ao objecto a contar e "dois" à quantidade a ter em conta. As fracções nem sempre descrevem relações parte-todo. Por exemplo, se se diz 3/2 de uma pizza, a "parte" é maior do que a unidade ou ainda quando a fracção é usada para descrever conjuntos de objectos discretos mais do que quantidades contínuas a unidade pode não ser singular.

-<u>Decimal</u> - são enfatizadas propriedades associadas com o sistema de numeração decimal (os números racionais são representados na base 10 reproduzindo decimais).

-<u>*Ratio*</u> - quando 2/3 se lê "dois para três" está a indicar-se a relação entre duas quantidades distintas, por exemplo, bombons para meninas (raramente se adicionam).

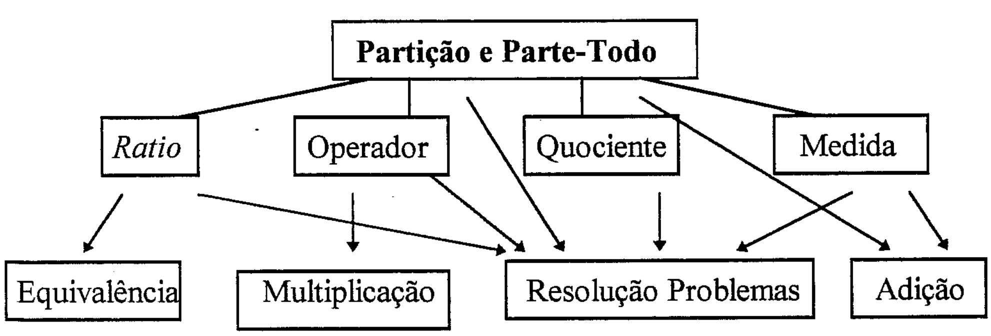
-<u>*Rate*</u> - define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades, por exemplo a velocidade relativamente à distância e ao tempo. Quando se diz "2/3 km por hora" entende-se 2/3 como coeficiente para o ratio de duas quantidades. (os *rate* podem ser adicionados mas os *ratios* não).

- Quociente - indica quociente, isto é, *a/b* é interpretado como *a* a dividir por *b*. Por exemplo: há 2 bombons e 3 meninos e se os bombons são divididos igualmente pelas 3 crianças, quanto cabe a cada um? 2/3 lê-se "2 a dividir por 3" e / significa divisão, o que acontece em determinadas situações como $(m+n)/p=x$ ou quando se pretende transformar 2/3 em decimal.

- Operador - corresponde ao conceito função do número racional, funciona como um transformador para formas geométricas (por exemplo, em ampliações), para medidas quantitativas (ex: câmbios), para números ou conjuntos.

- Coordenada linear - corresponde à interpretação medida de Kieren. Os números racionais são interpretados como pontos numa recta numérica (ex: 2/3 é visto como um ponto na recta numérica). Neste contexto, os números racionais são um subconjunto dos números reais, mais do que apenas uma extensão dos números inteiros. No sistema de coordenadas cartesiano 2/3 pode ser visto como uma linha que contem todos os pares ordenados (x,y) em que $x/y = 2/3$.

Estes autores defendem que os conceitos partição e parte-todo (baseado em quantidades contínuas e discretas) são constructos fundamentais no desenvolvimento do conceito de número racional e devem ser ponto de partida para o ensino dos outros subconstructos. Sugerem ainda que o subconstructo *ratio* é o mais natural para desenvolver o conceito de equivalência e os subconstructos operador e medida para o desenvolvimento da compreensão da multiplicação e da adição, como se esquematiza na Figura 8.



Adaptado de Behr et al. (1983)

Figura 8 - Esquema Conceptual para o Ensino dos Números Racionais

Lesh, Landau & Hamilton (1983) propõem uma estrutura teórica no sentido de contribuir para a compreensão do desenvolvimento dos modelos conceptuais das crianças, em particular, na aprendizagem dos números racionais.

Esses autores definem modelo conceptual como sendo uma estrutura que consiste em:

1) redes intra-conceitos de relações e operações que o aluno deve coordenar de modo a fazer julgamentos sobre o conceito;

2) sistemas inter-conceitos que ligam e/ou combinam as redes intra-conceitos;

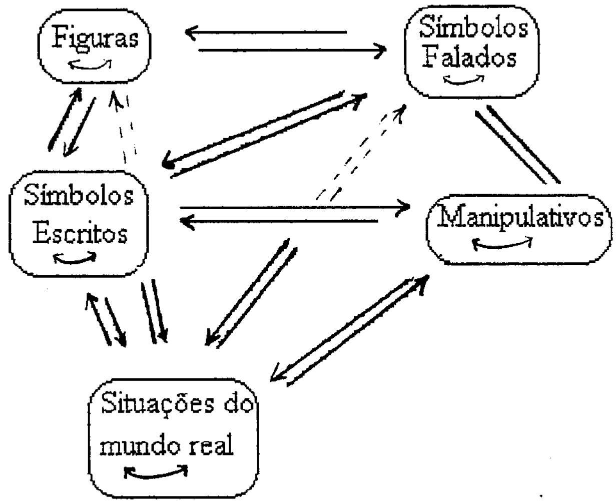
3) sistemas de representações (ex: símbolos escritos, linguagem oral, modelos figurais estáticos - esquemas, gráficos, diagramas, modelos manipulativos - materiais concretos, ou guiões (*scripts*) do quotidiano) combinados com sistemas de transferências entre os diversos modos e as transformações intra-modos de representação;

4) sistemas de modelação de processos, isto é, mecanismos dinâmicos que permitem o desenvolvimento dos três primeiros componentes e a sua adaptação a situações reais.

Os dois primeiros componentes do modelo reenviam para o que se chama a compreensão da ideia do aluno. Os sistemas representacionais têm a ver com os diferentes aspectos da estrutura do conceito, distinguindo-se pela sua capacidade em manipular de um modo simples e económico ideias e dados relevantes. O quarto componente contém processos que tornam possível a adaptação da situação real à compreensão existente e vice-versa e ainda a mudança do modelo de modo a preencher lacunas, eliminando inconsistências internas e resolvendo conflitos dentro do próprio modelo.

As componentes 1 (redes intra-conceito) e 3 (sistemas de representação) dos modelos conceptuais são preponderantes na aprendizagem dos números racionais. Os sistemas de representação foram desenvolvidos por Lesh (1979, citado em Behr et al., 1983) que considera as relações entre eles interactivas e não lineares.

As transferências entre os diferentes modos e dentro do próprio modo representacional são explicitadas através da Figura 9.



Modelo adaptado de Behr et al. (1983)

Figura 9 - Um Modelo Interactivo para usar Sistemas Representacionais

Nos modelos conceptuais dos números racionais os sistemas inter-conceitos têm três componentes: 1) redes intra-conceito associadas às diferentes interpretações dos números racionais (ex: fracções parte-todo, *ratio*, *rate*, decimais e operador); 2) ligações entre essas redes (incluindo compreensão da semelhança e/ou diferença das interpretações); 3) operações que, entre outras coisas, tornam possível a transformação de um dado número racional em diferentes formas.

Os sistemas inter-conceitos estabelecem a ligação entre as ideias dos números racionais e outros conceitos como a medida, a divisão dos números inteiros e os conceitos de geometria intuitiva relacionados com a área e a recta numérica.

Nas crianças mais novas aqueles sistemas inter-conceitos associados aos números racionais estão ainda pouco organizados e não completamente formalizados.

2.3.3.1 Compreensão da Ordem e da Equivalência nos Números Racionais

Num estudo realizado por Post, Wachsmuth, Lesh & Behr (1985) com alunos do 4º ano de escolaridade sobre a compreensão da ordem e equivalência dos números racionais foram identificados padrões em estratégias de resolução de tarefas. Estes autores propõem assim três características de pensamento que estariam relacionadas com o desempenho de tarefas envolvendo a ordem e a equivalência:

- flexibilidade de pensamento na coordenação das translações entre os modos de representação dos números racionais;

- flexibilidade de pensamento nas transformações no mesmo modo de representação;

- raciocínio que se vai tornando cada vez mais livre da concretização.

No primeiro caso a compreensão inicial de fracção (simbolizada pela forma *m/n*) das crianças deriva, não dos números naturais *m* e *n*, mas das concretizações através de figuras que são divididas em *n* partes iguais com *m* partes sombreadas ou de um conjunto *n* de objectos com *m* deles cobertos.

Para que possam fazer um juízo sobre a relação de ordem entre duas fracções como 2/5 e 2/3 a criança tem de reconhecer que a parte mais pequena da unidade (por ex: numa região circular) é sombreada. Ora segundo os autores este processo de translação não é fácil. Uma resposta que revela compreensão é: "dois quintos é menor que dois terços porque há duas partes em cada, mas as partes em dois quintos são mais pequenas, logo uma quantidade mais pequena da unidade fica sombreada em dois quintos". É a esta coordenação de informação que os autores referem como coordenação entre modos de representação de símbols matemáticos para concretização de fracções.

No segundo caso - flexibilidade de pensamento para fazer transformações no mesmo modo de representação - operar com símbolos matemáticos significa ser capaz de operar no modo simbólico e as operações com concretizações de fracções requer transformações dentro desse sistema. Por exemplo: para resolver 4/6 = ... /3 dentro do sistema simbólico pode ser feito através do algoritmo dividir 4 e 6 por 2. Ou reconhecer que 4/6 = 2/3 pode ser feito da mesma maneira. Este transformação envolve assim uma repartição física ou mental, isto é, imaginada.

A compreensão requer então as seguintes fontes de informação: a observação de que 4/6 e 2/3 têm igual quantidade coberta, a translação de quatro em seis - (4)/6 em 4/6 e de dois em três (2)/3 em 2/3 e ainda a capacidade para fazer a inferência 4/6 = 2/3. A facilidade com que a criança faz todas estas transformações está relacionada com a sua capacidade de compreensão das questões do nível simbólico da ordem e equivalência de fracções.

Para o terceiro caso - progressiva independência do pensamento relativamente às concretizações - os autores tomam o seguinte exemplo: ordenar 5/6 e 2/3. As crianças poderão eventualmente serem capazes de emitir um juízo baseado na relação (*ratio*) entre 5 e 6 e entre 2 e 3 sem fazer a inferência a partir de uma figura. Isto requer que observem que 5/6 é relativamente maior que 2/3 independentemente da unidade escolhida.

Post et al. (1985) sugerem que a necessidade de compreender os conceitos do número racional conduz as crianças a acomodações sucessivas de abstracções e o pensamento que inicialmente estaria direccionado para acções de concretização deve tornar-se sucessivamente mais independente destas. Estes autores consideram que a flexibilidade de pensamento nas transformações a nível das concretizações e nas transformações a nível das formas simbólicas constitui uma aptidão básica cognitiva no sucesso das tarefas que envolvem ordem e equivalência de fracções e que as crianças que têm dificuldades com as transformações a nível concreto também quase sempre têm dificuldades em realizar transformações significativas com símbolos matemáticos.

A compreensão dos alunos sobre a ordenação dos números inteiros pode dificultar a compreensão da ordenação com fracções. Os métodos de comparação utilizados para os números inteiros são inadequados para tratar com as tarefas de ordenação com fracções. Neste caso é exigido ao aluno um grau de compreensão mais complexo que envolve:

- entender que o tamanho da fracção depende da relação entre os dois números inteiros que compõem a fracção (*ratio*);

- há uma relação inversa entre o número de partes em que o todo é dividido e o tamanho de cada parte;

- quando as fracções têm denominadores iguais, há uma relação directa entre o número de partes consideradas e a ordem das fracções;

- quando as fracções têm numeradores e denominadores diferentes, as decisões acerca da sua ordem exige o uso extensivo e flexível da equivalência de fracções;

- a densidade de números racionais implica a noção de que não há próximo o que vai contra a própria intuição (Post et al., 1985).

Por outro lado, a linguagem pode também contribuir para algumas incompreensões. Assim, a palavra "mais" pode significar "mais partes" num todo dividido ou "mais área" coberta por cada parte e "maior do que" pode significar um maior número de partes no todo que foi dividido ou uma fracção de maior tamanho.

2.3.3.2 Os Subconstructos Parte-Todo e Medida

A interpretação parte-todo do número racional depende directamente da capacidade para dividir uma quantidade contínua ou um conjunto de objectos discretos em sub-partes ou conjuntos de igual tamanho.

Como acima se referiu, Kieren considera este subconstructo como um importante constructo gerador de linguagem. Há uma primeira compreensão do significado de "um meio", em crianças do primeiro e segundo ano de escolaridade.

O subconstructo parte-todo, baseado em quantidades contínuas ou discretas, constitui um constructo fundamental para o desenvolvimento do conceito de número racional. É considerado como o mais natural para crianças e o mais útil na introdução da adição de fracções, segundo Ellerbruch & Payne (1978) (citado por Behr et al., 1983).

Os modelos mais usados para representar fracções são a dobragem de folhas de papel, o rectângulo e o círculo, que envolve a compreensão da noção de área, conjuntos de objectos discretos e a recta numérica.

Os estudos de Novillis-Larson (1980, citado por Behr et al., 1983) realizados com crianças do 7ºano de escolaridade, em que foi usado o modelo da recta numérica demonstraram a dificuldade dos alunos em percepcionar a unidade de referência, particularmente quando o comprimento da recta tem duas unidades, 25% usam a linha toda como unidade. Os resultados indicam ainda que as crianças não associam "um terço" ao ponto da recta em relação ao qual a divisão faz corresponder "dois sextos".

Os trabalhos de Hiebert & Tonnessen (1978, citado por Behr et al., 1983) concluem que as crianças realizam melhor as tarefas que envolvem variáveis discretas do que as que envolvem variáveis contínuas, ao contrário dos estudos de Piaget, Inhelder & Szeminska (1973). Recorde-se que as tarefas consistiam em dividir igual e completamente uma quantidade por animais. Uma explicação possível, segundo Behr et al. (1983) é que as tarefas com quantidades contínuas requerem um esquema antecipatório bem desenvolvido, enquanto que as tarefas com quantidades discretas podem ser resolvidas simplesmente por partição. Podem ser resolvidas sem que o conjunto seja visto como um todo e sem antecipar a solução final.

Por outro lado, as estratégias usadas pelas crianças em tarefas que envolvem quantidades discretas são marcadamente diferentes das que utilizam nas tarefas de quantidades contínuas o que leva Behr et al. (1983) a pensarem que as estruturas cognitivas na resolução de problemas com números racionais relativas a um modelo discreto são diferentes das que se referem a um modelo contínuo.

2.3.3.3 O Número Racional como *Ratio*

Quando se fala em *ratio* está a traduzir-se uma relação que se refere à noção de uma grandeza relativa. Mais precisamente, considera-se um índice comparativo mais do que um número. Uma razão é vista como um par de valores para uma função linear (ex: quando se diz que na turma A há cinco raparigas para sete rapazes está a definir-se uma função linear y = f(x) com declive 5/7).

Se duas razões são idênticas isso significa que estão na proporção de uma para outra. Em Matemática, uma proporção é uma igualdade entre duas razões (ex: para o triângulo [ABC] a razão entre a base e a altura pode ser a mesma que a razão entre a base e a altura no triângulo [DEF] - neste caso um triângulo é proporcional ao outro), mas no discurso do quotidiano refere-se normalmente a "uma parte em relação a um todo". Por exemplo, quando numa dada classe há 15 alunos e 5 são raparigas, diz-se que a proporção de raparigas é de 5 para 15 (5/15).

Uma razão traduz quanto há de uma quantidade em relação a outra quantidade (por exemplo, a razão de raparigas e rapazes numa classe), em que o primeiro elemento se refere à primeira quantidade, o segundo à segunda e o valor da razão é a expressão numérica da comparação.

Segundo Ohlsson (1988) há ainda que distinguir *ratio* interno (que relaciona duas medidas da mesma dimensão, por exemplo, o tamanho de Lisboa em relação ao de Setúbal ou o *ratio* do comprimento e da largura de um rectângulo) e *ratio* externo (*rate*), que diz como é que uma quantidade cresce à medida que o tempo passa, isto é, relaciona medidas de diferentes grandezas, (por exemplo, o número de quilómetros percorridos em relação a um tempo). Segundo Streefland (1982) *rate* relaciona uma quantidade que é medida em relação a outra quantidade, como o tempo.

Nos programas curriculares portugueses, não é apresentada aquela distinção, a palavra usada é sempre a mesma - razão.

É possível considerar *ratios* em que as duas quantidades se referem a diferentes aspectos do mesmo objecto (ver os exemplos anteriores) e *ratios* em que as duas quantidades se referem a objectos diferentes (ex: quando se comparam as populações de dois países) e neste caso deve ser *ratio* interno enquanto no primeiro pode ser interno ou externo (ex: não posso comparar o peso de um livro com o comprimento de outro livro).

Para as quantidades discretas, o *ratio* exprime quantos elementos há no primeiro conjunto para cada elemento do segundo conjunto; para as quantidades contínuas, exprime quanto há da primeira quantidade para cada unidade da segunda quantidade.

É possível usar o *ratio* num conjunto de situações, como: a) achando o dobro ou a metade; b) multiplicar por um número inteiro; c) dada a razão por unidade, aplicar essa razão; d) encontrar a razão por unidade e aplicá-la; e) ampliar um desenho na razão de 2:1, 3:2, 5:3, etc; f) calcular uma razão (*ratio*) $a:b$ usando uma quantidade intermédia, c, isto é, dando a relação de a para c, b para c; g) usar um multiplicador fraccionário e h) em percentagens simples.

Relacionado com o conceito de razão está o de proporção e naturalmente o raciocínio proporcional. De acordo com Piaget & Inhelder (1975) o que caracteriza o raciocínio proporcional é o que diz respeito a uma relação entre duas relações, a chamada relação de segunda ordem. Karplus, Pulos & Stage (1983) sustentam que o raciocínio proporcional deve envolver a relação linear entre duas variáveis ($Y=mX$ e não $Y=(a/b)X+n$), então, tarefas caracterizadas pela relação Y=mX são consideradas como tarefas relativas a proporções. A proporcionalidade está ligada à compreensão da função linear, noção mais geral de isomorfismo de medidas, adoptada por Vergnaud.

Noelting (1980a; 1980b) estudou o raciocínio proporcional com tarefas que requeriam do sujeito a comparação de dois *ratios* (concentrado de laranja e água, para preparar bebidas com o mesmo ou diferente sabor), mais do que calcular uma resposta que produz um dado *ratio*. O autor usou o "Orange Juice Test" que consiste em 25 itens (copos de água e sumos de laranja - modelo discreto) para investigar a capacidade dos sujeitos, de 6 a 16 anos de idade, em comparar *ratios*. Cada item requer do sujeito comparar o sabor de uma mistura de sumo de laranja, feita com uma certo número de copos de sumo e um certo número de copos de água.

A resolução destes problemas (chamados problemas de comparação) conduz a dificuldades semelhantes às encontradas nos problemas a que falta um dos valores (*missing value problems*) (em A/B = C/D, são dados três valores e a meta é encontrar o terceiro valor). Assim, o raciocínio dos sujeitos foi sistematizado em quatro categorias: nenhum uso dos dados, comparações qualitativas, abordagens aditivas e iterativas e cálculo de *ratios*.

Noelting (1980) distingue três estados de pensamento sobre o *ratio* que, apesar de relacionados com a idade, observam-se também diferenças de pensamento entre os sujeitos que são classificados em cada um dos estádios. Assim, no primeiro estádio os sujeitos ignoram as proporções e tomam decisões baseadas na comparação dos termos (ex: na situação de comparar 2 quantidades de sumo e 2 de água com 3 quantidades de sumo e 4 de água, uma resposta correcta pode ser "há a mesma quantidade de sumo e água em A mas menos sumo em B" e uma resposta incorrecta "há mais sumo em B do que em A").

No segundo estádio as crianças comparam pares ordenados usando regras multiplicativas. No estádio IIA a criança compara (3,3) com (2,2) e diz "3 para 3 e 2 para 2" ou "as bebidas são diluídas igualmente". No estádio IIB a criança manipula uma equivalência mais geral de pares baseada numa simples comparação multiplicativa ((2,4) vs (6,12) - divide ambos por 3). Contudo, a criança não vê pares equivalentes como pertencendo a uma classe ou, então, usa procedimentos aditivos não conseguindo comparar pares não-equivalentes (ex: (3,1) = (5,2) porque (3,1) = (2,1) + (1,0) e (5,2) = (4,2) + (1,0) e (2,1) é o mesmo que (4,2).

No estádio III evidencia-se na criança a ideia de uma classe de pares ordenados e os jovens conseguem manipular comparações gerais através do uso de um par intermédio (ex: para a situação de comparar (3,1) com (5,2), "(3,1) é o mesmo que (6,2) mas é mais do que (5,2)". No nível mais avançado - estádio IIIB - os sujeitos usam como pensamento comum gerar pares equivalentes para comparar.

Na tarefa *Paper Clips*, em que os sujeitos tinham que explicar como encontravam a altura da figura do Sr. Tall, medida em clips e usando a altura das figuras do Sr. Tall e do Sr. Short, Karplus et al. (1983) agruparam os raciocínios em quatro categorias: incompleta ou nenhum uso dos dados, aditivo ou relações de diferença constante, de transição (iterativo, gráfico ou ou uso parcial de proporções) e uso explícito de *ratios* iguais.

Karplus et al. (1983) usaram quantidades contínuas e, tal como Noelting, identificaram várias categorias, vários níveis de funcionamento cognitivo:

- categoria I- incompleta, ilógica, operações quantitativas inapropriadas;

- categoria Q - qualitativa, ocorre a comparação qualitativa das quatro quantidades dadas, sendo usados termos como mais, menos;

- categoria A - aditiva, conjecturação para raciocínio aditivo, mais do que multiplicativo, os dados são usados para calcular e comparar diferenças;

- categoria P - proporcional, os dados são utilizados a um nível formal do raciocínio multiplicativo.

Com base nestes estudos Karplus et al. (1983) propõem para o raciocínio proporcional três níveis hierárquicos de estratégias: o nível mais elevado envolve a decisão de aplicar a proporcionalidade directa, a proporcionalidade inversa, o raciocínio aditivo ou outra relação numérica; o nível médio refere-se ao tipo de comparações numéricas ou combinações que podem ser feitas; o nível mais baixo diz respeito à realização de operações numéricas que são levadas a cabo.

Lesh, Post & Behr (1988) definem raciocínio proporcional como uma forma de raciocínio matemático que envolve o sentido de co-variação e de comparações múltiplas e a capacidade para armazenar e processar mentalmente várias peças de informação. Envolve métodos de pensamento qualitativo e quantitativo. Estes autores referem ainda que o raciocínio proporcional é a capacidade usada como significativamente marcante na mudança do nível concreto de pensamento para o nível formal, tal como é defendido pela psicologia da aprendizagem.

Numa sistematização sobre o tipo de problemas que envolvem raciocínio proporcional, Lesh et al. (1988), identificam os seguintes:

- problemas a que falta um valor, em A/B=C/D são dados três valores e pretende-se que seja encontrado o quarto;

- problemas de comparação, em A/B=C/D são dados os quatro valores e pretende-se saber se A/B > C/D, A/B=C/D ou A/B<C/D;

- problemas de transformação, em que é dada a equivalência A/B=C/D, um ou dois dos valores são aumentados ou diminuídos e pretende-se saber como a relação é modificada (>,<,=), ou é dada uma desigualdade A/B<C/D e o objectivo é descobrir o valor x, de modo que (A+x)/B=C/D.

- problemas de valor médio (*mean value problems*), em são dados dois valores e o objectivo é encontrar o terceiro, A/x=x/B;

- proporções que envolvem conversões de *ratios* para *rate*, para fracções (ex: o *ratio* entre o número de rapazes e de raparigas numa turma é de 15 para 12, que fracção da turma são rapazes?).

- proporções que envolvem designar unidades e números (ex: 3 quilómetros/ 2 segundos = x Km por hora);

- problemas de tradução Entre-Modo (Between-Mode translation problems), um *ratio* (ou *rate*, ou fracção, ou quociente) é apresentado num dado sistema de representação e o objectivo é representar a mesma relação mas usando outro sistema de representação.

2.3.3.4 O Número Racional como Quociente (indicando divisão e como elemento de um campo quociente)

Na interpretação parte-todo dos números racionais o símbolo *a/b* representa uma parte de uma quantidade inteira, de uma unidade.

Quando se considera o constructo *ratio* dos números racionais, o símbolo *a/b* representa a relação entre duas quantidades. Mas esse mesmo símbolo pode ser usado para representar uma operação, isto é, *a/b* é muitas vezes usado, em vez de $a{:}b$, o que indica uma divisão (ou o quociente), e corresponde a outra interpretação dos números racionais.

Esta assumpção traduz um nível de complexificação elevado, na medida em que aceitar que 6/3 e 3/4 indicam uma divisão corresponde à aceitação que 6/3 é equivalente a 2 e 3/4 a 0,75.

Por outro lado, os números racionais podem ser considerados como elementos de um campo quociente e, assim, usam-se para definir equivalência, adição, multiplicação e outras propriedades numa perspectiva puramente dedutiva. Todos os algoritmos são derivados de equações via propriedades do campo quociente (Kieren, 1976). E este nível, como referem Behr et al. (1983), exige estruturas intelectuais, não disponíveis em crianças do 2° ciclo porque relaciona os números racionais com sistemas algébricos abstractos.

2.3.3.5 O Número Racional como Operador

Interpretar o número racional como operador implica atribuir a p/q uma interpretação algébrica, isto é, ver p/q como uma função que transforma, figuras geométricas em figuras geométricas semelhantes mas que são p/q vezes maiores ou ainda um conjunto com n elementos num outro com np elementos e depois redu-lo a np/q. Se se aplica a um segmento de recta de comprimeto 1 o operador p/q, esse segmento é aumentado para p vezes o seu comprimento e depois diminuído por um factor q.

Nesta interpretação, o conceito de número racional pode ser visto como uma "máquina função", segundo Behr et al.(1983). Assim, por exemplo, 2/5 é visto como uma máquina de 2 para 5, um *input* de comprimento ou cardinalidade 5 produz um *output* de comprimento ou cardinalidade 2.

A interpretação operador é particularmente útil no estudo da equivalência de fracções e na operação multiplicação. A multiplicação de fracções envolve a composição de funções.

Vários estudos (Kieren & Nelson, 1978; Kieren & Southwell, 1979) realizados com o fim de investigar o desenvolvimento dos subconstructos operador e *ratio* e a relação entre eles, conduziram ao estabelecimento de três níveis, para cada um dos subconstructos. A análise das descrições indica que até aos doze anos de idade as crianças pensam sutractivamente e não multiplicativamente e ainda que as tarefas que envolviam 1/2 eram muito mais fáceis do que as que envolviam outras fracções. Segundo os autores a compreensão da partição (refere-se à divisão de um conjunto em subconjuntos) e das classes de equivalência constitui um mecanismo importante e subjacente ao desenvolvimento dos constructos *ratio* e operador.

Numa outra investigação, Kieren & Ganson (1979b), em que foram usadas tarefas que envolvem o subconstructo operador e o subconstructo *ratio* ("orange-juice" de Noelting, 1980), concluem que os alunos capazes de realizar a partição conseguem realizar comparações e reconhecer equivalências. Por outro lado, inferem que o nível de pensamento cognitivo necessário para realizar com sucesso as tarefas envolvendo o constructo operador é próximo do nível necessário à realização com sucesso das tarefas com *ratio*.

2.3.4 Definições e Natureza dos Números Racionais, segundo Vergnaud

Os números racionais reflectem um aspecto fraccionário, mas têm também um carácter proporcional ou *ratio*. Vergnaud (1983) considera os números racionais, com os seus vários subconstructos, como estruturas multiplicativas (conjunto das situações que requerem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação dessas operações), sendo particularmente evidente para os subconstructos *ratio* e operador.

Vergnaud (1983) integra o conceito de fracção e de *ratio* numa estrutura de três problemas-tipo: isomorfismo-de-medidas, produto-de-medidas e proporção múltipla.

O isomorfismo-de-medidas constitui uma estrutura em que ocorre uma proporção directa e simples entre dois espaço-medida (*measure-space*) M_1 e M_2 e abrange um conjunto de situações que incluem: divisão igual (pessoas e objectos), preço constante, velocidade uniforme ou velocidade média constante, densidade constante. O autor considera quatro tipos que são esquematizados do seguinte modo:

Esquema I		Esquema II		Esquema III		Esquema IV	
M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2
1	a	1	x=f(1)	1	a=f(1)	a	b
b	x	a	b=f(a)	x	b=f(x)	c	x

O primeiro esquema corresponde à chamada multiplicação, em que se pretende conhecer x, sendo dados a e b.

Exemplo 1: O Rui comprou 4 bolos a 70$00 cada um. Quanto teve que pagar?

a= 70 b=4 M_1=n° de bolos M_2=custo

Observando o esquema e o exemplo, considera-se o operador xb um operador escalar porque não tem dimensão, é um *ratio* de duas grandezas da mesma dimensão (b bolos é vezes mais do que 1 bolo e o custo de b bolos também é b vezes mais do que o custo de um bolo). No entanto, pode usar-se o operador função que consiste em transpôr b para x, multiplicando por a. Neste caso o operador tem dimensão, é o quociente de duas outras dimensões, por ex: escudos por bolo.

O segundo e terceiro esquemas referem-se à divisão *partitive* e *quotitive*, em que se pretende encontrar, respectivamente, $f(1)$ e x, sendo dados a e b.

Exemplo 2: A Joana quer dividir os seus bombons com a Ana e a Filipa. A mãe deu-lhe 12 bombons. Quantos bombons receberá cada uma?

a=3 b=12 M_1=n° de crianças M_2=número de bombons

Exemplo 3: O Pedro tem 750$00 para gastar e gostaria de comprar miniaturas de carros. Cada um custa 150$00. Quantos carros pode comprar?

a=150 b=750 M_1=n° de carros M_2=custo

O quarto esquema corresponde aos problemas chamados de regra de três, em que são dados *a*, *b* e *c* e se pretende calcular *x* que pode estar em qualquer uma das quatro posições. Para Vergnaud, os problemas da multiplicação e da divisão são casos especiais dos problemas de proporção directa.

Exemplo 4: O consumo do meu carro é 5,5 litros de gasolina por 100 km. Quantos litros de gasolina consome numa viagem de 5000 km?

a=100 b=5,5 c=5000 M_1=distâncias
M_2=consumo de gasolina

Neste sentido os problemas de multiplicação e divisão são casos simples dos problemas "regra de três".

Os problemas do tipo isomorfismo de medidas envolvem só duas variáveis e é modulado pela função linear, os do tipo produto de medidas e do tipo proporção múltipla envolvem três ou mais variáveis e o modelo da função é bilinear ou n-linear.

O produto de medidas é uma estrutura que consiste na composição cartesiana de dois espaços-medida, M_1 e M_2 com um terceiro, M_3. Há, assim três variáveis envolvidas e há uma forma canónica na escolha das unidades (por exemplo, no cálculo da área de um rectângulo - uma unidade de comprimento x uma unidade de comprimento = uma unidade de área). O produto de medidas descreve um conjunto de problemas que dizem respeito à área, ao volume, ao produto cartesiano e conceitos físicos como o trabalho.

A proporção múltipla é uma estrutura muito semelhante ao produto de medidas do ponto de vista das relações aritméticas: um espaço-medida M_3 é proporcional a dois diferentes espaços-medida independentes M_1 e M_2 (exemplo: a produção de leite de uma quinta é proporcinal ao número de vacas e ao número de dias considerado). O tempo aparece muitas vezes envolvido nestas estruturas porque intervem em muitos fenómenos. Nesta estrutura as grandezas envolvidas têm o seu significado intrínseco e nenhuma delas pode ser reduzida ao produto das outras.

Vergnaud (1983) que procura classificar problemas, ao contrário dos autores anteriores, que pretendem classificar conceitos, perspectiva a aquisição dos conhecimentos do ponto de vista psicológico. Os problemas, que envolvem diferentes espécies de grandezas e diferentes relações, requerem, muitas vezes, na sua resolução que se apliquem tópicos logicamente distintos, mas psicologicamente interdependentes. Este autor integra o estudo dos números racionais nas estruturas multiplicativas, afirmando que estas porque implicam multiplicações e divisões podem ser analisadas de um modo que conduz a fracções, *ratios* e números racionais.

Vergnaud chama a atenção para uma certa indefinição no uso de palavras como fracção e *ratio*. Assim, a palavra fracção (a notação *x/y*) pode ser usada como: a) uma parte fraccionária de um todo ("que fracção da pizza sobrou?" ou "como se adicionam fracções?", está a aplicar-se mais a ideia de número do que de um símbolo), que não pode ser expressa por um número inteiro de unidades; b) um par ordenado de símbolos *p/q*; c) uma relação ligando duas grandezas da mesma espécie. A palavra fracção raramente é usada para relacionar grandezas de espécies diferentes, usam-se preferencialmente as palavras *ratio* e coeficiente, embora a palavra *ratio* também se use na relação entre duas grandezas da mesma espécie e para o par ordenado *p/q*.

Desse modo, as concepções dos alunos sobre números racionais vêm necessariamente das suas concepções sobre fracções, *ratios* e ainda sobre os decimais.

Segundo Vergnaud (1983) o desenvolvimento de níveis mais formais no conhecimento dos números racionais só acontece quando as medidas, os operadores escalar e função perdem os seus aspectos dimensionais e quando se faz a distinção entre elemento e relação.

Em termos de desenvolvimento, Vergnaud acentua que o primeiro contacto da criança com fracções resulta da experiência de dividir o todo em partes, o que envolve uma relação directa entre as divisões e a grandeza a ser dividida (situação de isomorfismo de medidas).

O facto dessa grandeza poder ser discreta (por exemplo, um conjunto de berlindes a repartir) ou contínua (por exemplo o bolo, a pizza, o sumo, uma folha de papel a dividir) conduz a dificuldades conceptuais diferentes, que também dependem dos valores numéricos. Na realidade, no primeiro caso (os números inteiros podem ser associados a quantidades por contagem) a grandeza pode ser normalmente contada e as crianças podem associar-lhe números inteiros. No segundo caso não se conhece usualmente a medida da grandeza a ser dividida (por ex: o peso ou a área da pizza) e as fracções usadas para a representação (dividir um bolo por quatro pessoas requer dividir a unidade por quatro - 1/4) não podem ser associadas directamente a quantidades - exprimem uma relação entre duas quantidades.

Consequentemente o valor unitário (a divisão por pessoa) é expresso como uma quantidade na forma de fracção (um quarto, um quinto) no caso contínuo, enquanto também pode ser expresso por um número inteiro no caso discreto.

Vejam-se os esquemas de Vergnaud:

<u>caso contínuo</u>

porções	pizza	
1	um quarto	
		dividir em quatro
4	todo	

<u>caso discreto</u>

porções	conjunto de rebuçados		rebuçados	
1	um quarto		3	
		dividir		dividir
4	todo	em quatro	12	por 4

Através de operações de repartição a unidade fraccionária vai ganhando significado para a criança, mas outros passos são necessários até à completa compreensão do conceito de número racional. Vergnaud descreve esses passos do seguinte modo: fracções não arquimedianas *p/q* (menores ou maiores que 1), relações de equivalência e operações.

Introduz os conceitos de operador escalar, em que uma fracção liga duas quantidades da mesma espécie, da mesma dimensão, por isso, o quociente não tem dimensão, nem unidade, e operador função que corresponde ao quociente de duas outras dimensões.

Ligar duas quantidades pode implicar a comparação (que quantidade é maior do que outra?) ou o raciocínio proporcional. As comparações não envolvem sempre fracções e *ratios*, podem resolver-se através de diferenças.

No raciocínio proporcional, os alunos começam com o método aditivo e só mais tarde usam o multiplicativo.

Os esquemas seguintes mostram exemplos de operadores escalares (inteiro e fraccionário):

$$\begin{array}{c|c} 1 & f(1) \\ \times 4 \downarrow & \downarrow \times 4 \\ 4 & x \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} 1 & x \\ /4 \uparrow & \uparrow /4 \\ 4 & f(4) \end{array}$$

multiplicação divisão

$$\begin{array}{c|c} 5 & f(5) \\ \times 4 \downarrow & \downarrow \times 4 \\ 20 & x \end{array}$$

regra-de-três (operador inteiro)

Segundo Vergnaud, há duas categorias de *ratios* nos problemas de comparação e de proporção: caso inclusivo - uma quantidade é parte de outro, como acontece no exemplo 3/4 dos berlindes são azuis, ou caso exclusivo - não há relação de inclusão, como no exemplo "a colecção de carros miniatura do Pedro é três quartos da do João".

Há diferenças entre estas categorias:

- as fracções inclusivas ou *ratios* são sempre mais pequenas do que 1 (a não ser que se compare a grandeza ou o conjunto a si próprio), enquanto as exclusivas ou *ratios* podem ser maiores, menores do que 1 ou igual a 1.

- as fracções inclusivas não são redutíveis a números inteiros, enquanto as exclusivas podem ser ou não redutíveis.

- as fracções inclusivas não têm inverso (para as crianças) porque se considera a parte como uma porção de um todo, enquanto as exclusivas têm inversos "naturais" (se a colecção do Pedro é três quartos da do João, a colecção do João é quatro terços da do Pedro).

- as fracções inclusivas podem ter significado para as crianças quando se dividem operações ou mais geralmente nas proporções subconjunto-conjunto, as exclusivas envolvem necessariamente comparações.

No fim do 1° ciclo muitas crianças não são capazes de conceber as fracções exclusivas como fracções. O seu modelo é o inclusivo. Isto é um problema porque as comparações e os *ratios* entre duas quantidades da mesma espécie são um modelo mais poderoso do que as fracções inclusivas, providenciando uma base mais geral para operadores escalares.

As medidas fraccionárias resultam da aplicação de operadores fraccionários a outras medidas consideradas como inteiras ou unidades (ex: 3/10 cm é uma medida fraccionária que resulta de se dividir 1 cm em 10 partes e tomar 3 partes, ou tomar três décimos de 1 cm).

As medidas fraccionárias podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas ou divididas por um outro (ex: calcular a área de um rectângulo que tem 8/3 cm de comprimento e 4/7 de largura), mas os operadores escalares só podem ser compostos de um modo multiplicativo.

Os operadores função são quocientes de dimensões e apesar de provocarem dificuldades nos alunos, constituem o caminho mais natural para introduzir o conceito de uma classe infinita de pares ordenados, como se pode ver no esquema:

kg de farinha	1.2	12	18	24	30	6n	6
kg de trigo	1	10	15	20	25	5n	5

Se 1,2 kg de farinha é usado para fazer 1 kg de pão, então é possível estabelecer uma correspondência entre os outros valores. Todos os pares ordenados (6n, 5n) pertencem a esta classe infinita, a função da esquerda para a direita pode ser expressa pelo operador x 10/12, x 15/18, ... O operador mais simples é 5/6 e (5,6) é o elemento mais simples da classe de pares ordenados.

Resumindo, parece que o significado da divisão e da multiplicação advem dos operadores escalares fraccionários e dos *ratios*, o significado da adição e da subtracção tem origem nas quantidades fraccionárias e o carácter infinito de cada classe do número racional advém dos operadores função fraccionários e dos *ratios*. A multilicação dos números racionais pode assumir significado através da composição dos operadores escalares, dos operadores função e ainda do produto de medidas. A síntese dos três aspectos só pode ocorrer se as medidas, os operadores escalares e os operadores função perderem os seus aspectos dimensionais e ocorrer a distinção entre elemento e relação. Assim, o conceito de número racional como número "puro" vai sendo construído e, como é natural, não se espera que seja fácil ou imediatamente compreendido pelos alunos.

Vergnaud esclarece que a distinção entre operador escalar e operador função é semelhante à que Freudenthal e Noelting fazem quando falam de interno-externo. Os problemas usados por Noelting sobre comparação de sabores são diferentes dos problemas de proporção directa ou simples (isomorfismo de medidas).

Nos problemas de proporção directa há apenas duas variáveis e uma relação invariante (função) entre duas variáveis: o custo de coisas, a velocidade ou a densidade são dadas como constantes. O problema é encontrar $x=f(c)$, sabendo a, $b=f(a)$ e c e não comparar duas funções f e f'.

Em muitos estudos sobre o desenvolvimento do conceito de *ratio*, a função é também uma variável, por exemplo, nos de Noelting (1980a; 1980b) o paradigma experimental envolve três variáveis: o número de copos de água, o número de copos de sumo de laranja e o sabor ou concentração que é o quociente de duas outras variáveis. O problema pode ser visto em diferentes perspectivas:

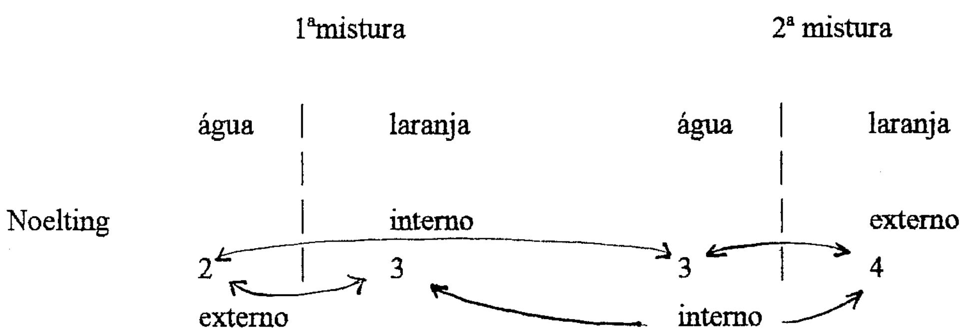
1. Comparação directa de dois *ratio*-função

2. Decomposição deste problema em dois outros problemas, baseados nos teoremas:

a. a concentração é proporcional ao sumo de laranja, desde que a quantidade de água seja constante;

b. a concentração é inversamente proporcional à água, desde que a sumo de laranja seja constante.

Nesta decomposição pode facilmente reconhecer a estrutura da proporção múltipla: a quantidade do sumo de laranja é uma função bilinear da quantidade de água e da concentração desejada. Situações de comparação - *ratio* não pode ser analisado como problemas de proporção-simples.



Qualquer *ratio*, interno e externo, pode variar

Vergnaud		2	3
	escalar $\updownarrow$		$\updownarrow$ escalar
		4	6
	escalar $\updownarrow$		$\updownarrow$ escalar
		6	9
		função	

O *ratio*-função é invariante; *ratios* escalares podem variar, mas são equivalentes do mesmo lado entre as entre as mesmas linhas.

Adaptado de Vergnaud (1983)

Figura 10 - Representação Esquemática do Conceito de *Ratio* em Noelting e em Vergnaud

A análise dimensional de *ratios* função é clara quando M_1 e M_2 têm diferentes dimensões, tais como: tempo em horas e distância em kilómetros para a velocidade, água em copos e açucar em colheres para concentração açucarada-água ou, ainda, quando M_1 e M_2 são as mesmas grandezas, expressas em diferentes unidades (em problemas de conversão de um sistema métrico noutro).

Como refere o autor, em muitos estudos relativos ao desenvolvimento do conceito de *ratio*, o quociente de duas dimensões não surge tão claramente, porque os experimentadores querem que a unidade seja a mesma (copos do mesmo tamanho para água e sumo de laranja). A distinção interno-externo feita por Noelting é diferente da distinção escalar-função.

2.3.5 Definições e Natureza dos Números Racionais, segundo Hart

O ponto de partida do estudo de Hart é diferente dos autores referidos anteriormente, uma vez que o seu trabalho resulta da necessidade de desenvolver uma hierarquia de compreensão em matemática baseada no currículo escolar. A hierarquia dos níveis de compreensão foi baseada na análise dos resultados de testes de papel e lápis, que foram aplicados a crianças inglesas, e nos métodos usados por elas durantes as entrevistas realizadas. Perante a hierarquia estabelecida os professores podiam determinar as sequências de tópicos e os níveis mais apropriados para os seus alunos.

A investigação foi integrada no programa *Concepts in Secondary Mathematics and Science* (CSMS), a desenvolver nos anos de 1974-9. Foram estudados em pormenor onze tópicos (*ratio*, fracções, decimais, vectores, números positivos e negativos, gráficos, álgebra, medida, reflexão e rotação) e definidos níveis em cada um deles. A hierarquia dos níveis de compreensão foi baseada na análise dos resultados de testes de papel e lápis que foram aplicados aos alunos e acompanhados de entrevistas.

Segundo Hart (1981), uma correspondência entre os níveis dos tópicos fornece aos professores um guia aproximado relativamente à comparação da dificuldade dos tópicos. Contudo, não sendo possível estabelecer uma correspondência exacta entre os tópicos, definiram-se quatro secções (ou Estados) de facilidade de 0 a 100 por cento. Cada secção contém um nível ou mais níveis de tópicos, mas a selecção é baseada no grau de facilidade, assim, a secção mais fácil inclui o Nível 1 de muitos tópicos.

Os conteúdos de cada estado são fixados para todos os grupos de idade (ex: o Estado 1 para os sujeitos de 13 anos inclui exactamente os mesmos itens do Estado 1 para os de 15 anos, mas os itens mais difíceis são resolvidos por mais alunos mais velhos do que por alunos mais novos).

No <u>Estado 1</u> os itens testam o significado da notação relativa às fracções e as primeiras ideias sobre fracções, a relação entre a parte e o todo, o significado do ponto decimal. Avaliam ainda o *ratio* e proporção para situações 2:1 e 3:1. A criança deve reconhecer a necessidade de calcular a metade num item de uma receita, em que a razão entre o número de pessoas é 8:4, o que implica que a relação entre os ingredientes seja também metade. No tópico medida os alunos devem ser capazes de calcular uma área mas usando como unidade o quadrado ou apenas metade.

Neste estado as crianças devem conhecer o significado da linguagem, do vocabulário matemático inerente aos tópicos, mas perto de 30% dos alunos envolvidos no estudo não foram capazes de aplicar essa linguagem.

Muitos dos itens utilizados apresentavam aspecto visual com grelhas ou diagramas e normalmente requeriam apenas um passo para completar ou dar a resposta.

No <u>Estado 2</u> exigia-se que os alunos fossem capazes de aplicar as convenções e ainda que compreendessem quando a aplicar mais do que o conhecimento puro da linguagem e dos símbolos. O que é introduzido no estado 1 torna-se operativo no 2. Por exemplo, no tópico medida, não se pede só que conte o número de quadrados para calcular uma dada área, mas que saiba a fórmula da área do rectângulo e consiga calcular a área de uma região sombreada e sendo dada a área de um rectângulo e uma dimensão ser capaz de calcular a outra dimensão.

Relativamente às fracções, é necessário que a equivalência de fracções seja já familiar para os alunos, no tópico medida que o significado das centésimas e a sua relação com as décimas esteja compreendido. Os problemas, no estado 2, devem envolver na sua resolução, dois passos ou uma interpretação na forma de gráfico ou a aplicação de uma fórmula. Como refere Hart (1981), a criança deve estar na posição de ver o que necessita para encontrar uma solução, não necessariamente de inventar uma estratégia, mas não levar a cabo apenas uma instrução.

Neste estado, o estudo não envolvia itens relativos ao tópico *ratio* e proporção.

No Estado 3 aparecem questões que exigem já um certo grau de abstracção, são pedidas aos alunos hipóteses sobre situações que não são mostradas. Os itens mais difíceis requerem o uso de uma estratégia e não só uma interpretação, o que se traduz nalguns casos na utilização de métodos incorrectos, tais como, a chamada estratégia da adição nos problemas que envolvem raciocínio proporcional ou então porque têm em atenção apenas um dos dados da questão e ignoram os outros, etc.

Segundo Hart (1981) há um grande hiato entre a capacidade para interpretar dados obtidos através de uma figura e a compreensão de uma equação algébrica e a sua relação com um gráfico, por isso, não há itens sobre gráficos neste estado. Nem itens sobre o tópico medida.

No Estado 4 as crianças têm de saber adaptar uma fórmula, por exemplo, para a área de um triângulo e isto é aparentemente mais difícil que o exigido no estado 2.

No que diz respeito ao *ratio* foram definidos dois níveis. As questões podem ser resolvidas pelo método da construção (*building up method*), tornando-se mais difíceis quando envolvem fracções que não sejam 1/2 ou quando o método requer contar para baixo e não aquele método (ex: três enguias X, Y, e Z, respectivamente com comprimentos 10 cm, 15 cm e 25cm, são alimentadas com arenques; o comprimento dos arenques depende do comprimento da enguia. Se a enguia Z precisa de um arenque de comprimento 10 cm, que comprimento deverá ter o arenque dado à enguia X?).

Neste estado aparecem duas questões sobre percentagem e são comparáveis em dificuldade aos itens sobre decimais que envolvem a multiplicação por 100 ou escrever décimas ou centésimas. A questão 60:0,3 aparece neste estado e a resposta é contrária ao senso comum de que "dividir torna sempre mais pequeno".

Relativamente às fracções as questões exigem o uso da equivalência, mas o aluno tem de aplicar em cada caso a equivalência.

Neste estado surgem as questões sobre álgebra, as crianças têm de interpretar e manipular letras como números desconhecidos mais do que como objectos, o que acontecia no estado anterior.

Este estado mostra a emergência da abstracção e a formulação de estratégias de resolução de problemas (incluindo estratégias incorrectas como a da adição no *ratio*). Outros itens requerem a tomada de decisões, como por exemplo, em relação à escolha da unidade de medida. Os itens mais difíceis deste estado foram resolvidos correctamente por 20 a 30% dos sujeitos da amostra.

As questões do estado 4 envolvem a abstracção e muitas vezes os "métodos das crianças" (entre aspas no original) não são suficientes para conduzir à resposta. Se os métodos foram ensinados, a criança para resolver a tarefa tem que os ter assimilado e decidir quando e como usá-los.

O estado 4 tem um nível de facilidade para 30% de alunos com 15 anos, 20% de alunos com 14 anos e 18% para os de 13, mostrando assim que a maioria dos alunos com 15 anos não são capazes de lidar com abstracções e aplicações em matemática.

Nos tópicos decimais e fracções, as questões exigem ao aluno a apreciação da natureza destes números (deve ser capaz de ver que há uma resposta para 16:20 e não dizer que é impossível "porque não se pode dividir um número pequeno por um maior"). Nas fracções, os alunos precisam reconhecer que a multiplicação ou a divisão é necessária para levar a cabo a realização da tarefa, embora partindo de referentes concretos.

Todos os itens que testam o conhecimento da natureza infinita dos números (ex: quantos números existem entre 0,41 e 0,42) ocorre no fim do estado 4. É neste estado que a matemática surge como um sistema abstracto e não como um modo de quantificar fenómenos do mundo real. Cerca de 10% de crianças da amostra parecem apreciar os conceitos mais elementares neste tipo de matemática que pode ser descrita como um sistema de abstracções, segundo Hart (1981).

2.3.6 Síntese das Perspectivas sobre os Números Racionais

Qualquer das perspectivas analisadas sobre os números racionais considera que a aprendizagem do megaconceito número racional constitui um sério obstáculo no desenvolvimento matemático do aluno.

Os trabalhos de Kieren destacam-se por serem os primeiros a introduzir a ideia de que os números racionais consistem em vários constructos e que a compreensão do número racional depende da compreensão desses constructos. Em 1976 o autor fala de sete interpretações: fracções, decimais, classes equivalentes de fracções, medidas (pontos numa recta numérica), números na forma p/q, em que p e q são inteiros e $q = 0$ (números *ratio*), operadores multiplicativos e como elementos de um campo quociente infinito. Mais recentemente, Kieren (1988) defende que o desenvolvimento completo do conceito compreende quatro subconstructos: a medida, o quociente, o número *ratio* e o operador multiplicativo e que na base da construção destes estariam dois processos construtivos, a partição e a equivalência.

Kieren (1988) desenvolve um modelo teórico para a construção do conhecimento matemático e relaciona-o especificamente com o conhecimento dos números racionais. Descreve uma rede ideal que consiste em seis níveis de conhecimento que podem ser pensados como uma imagem ideal do conhecimento dos números racionais.

Behr, Lesh, Post & Silver (1983) reestruturam os subconstructos definidos por Kieren, considerando o número racional como decimal, como uma relação parte-todo, como *ratio* (distinto de *rate*, quando define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades), como quociente (indicando uma divisão), como operador e ainda como medida de quantidades contínuas e discretas. No *Rational Number Project* (RNP), projecto que investigou a natureza das ideias de alunos do 4° ao 8° ano sobre números racionais, os autores aplicaram três testes de papel e lápis, sobre conceitos (fracção e *ratio*) relações (envolvendo relações de ordem, equivalência e proporções simples) e sobre operações (adição e multiplicação de fracções). Foram também conduzidas entrevistas a 80 sujeitos durante a realização de diversas tarefas (envolvendo as mesmas estruturas aritméticas mas com diferente forma de apresentação) e a posterior análise incidiu sobre o grau de dificuldade, os procedimentos e os erros detectados.

Na fundamentação teórica do *Rational Number Project*, Berh et al. (1983) consideram que os subconstructos partição e parte-todo são básicos na aprendizagem dos outros subconstructos dos números racionais, assumindo que o conceito *ratio* é o mais natural para desenvolver o conceito de equivalência. Há, nesta altura, a defesa de uma certa hierarquia na aquisição e no ensino dos diversos conceitos, ou, como afirma Streefland (1986), há nesta fundamentação um ponto de vista estruturalista.

Lesh, Landau & Hamilton (1983) defendem uma estrutura teórica no sentido de compreender o desenvolvimento dos modelos conceptuais das crianças, em particular, na aprendizagem dos números racionais. Estes autores definem modelo conceptual como sendo uma estrutura que consiste em redes intra-conceitos de relações e operações, em sistemas inter-conceitos que ligam e/ou combinam as redes intra-conceitos, em sistemas de representações (ex: símbolos escritos, linguagem oral, modelos figurais estáticos - esquemas, gráficos, diagramas, modelos manipulativos - materiais concretos, ou guiões do quotidiano) e em sistemas de modelação de processos que permitem o desenvolvimento dos três primeiros componentes e a sua adaptação a situações reais.

Numa análise posterior, Behr, Harel, Post & Lesh (1992), consideram fundamental que a investigação e o desenvolvimento curricular se deve basear e também aprofundar as análises sobre as estruturas multiplicativas. Afirmam mesmo que deve ser desenvolvido um grande esforço no sentido de criar situações que permitam às crianças construir conhecimento no contexto das referidas estruturas. O currículo tem de proporcionar às crianças situações que contribuam para a compreensão implícita dos princípios subjacentes à invariância e à compensação para a variação nas relações e operações aditivas, subtractivas, multiplicativas e de divisão.

Vergnaud (1983) situa os conceitos de fracção, de *ratio* e dos números racionais no contexto das estruturas multiplicaticas, porque implicam multiplicações e divisões. Para este autor, a grande dificuldade para os alunos reside no facto dos números racionais serem números, enquanto as estruturas multiplicativas envolvem medidas e relações e não números puros.

O ponto de vista de Vergnaud é o da psicologia do desenvolvimento, fazendo uma análise que assenta nas dificuldades conceptuais que emergem da compreensão das relações e propriedades da fracção e do *ratio*. Começa por referir a indefinição existente no uso da palavra fracção que se utiliza em diversos contextos, nomeadamente para designar uma parte de uma unidade, para exprimir uma quantidade que não pode ser expressa por um número inteiro e ainda uma relação que liga duas quantidades da mesma espécie.

Considera os conceitos de fracção e de *ratio* numa rede de três tipos de problemas: isomorfismo de medidas, produto de medidas e proporções múltiplas. A divisão do todo em partes envolve uma proporção directa entre as divisões e a quantidade a ser dividida (isomorfismo de medidas). A quantidade a dividir pode ser discreta ou contínua, mas enquanto no primeiro caso pode ser contada, no segundo não se conhece normalmente a medida, ou o peso, ou a área da quantidade a ser dividida, o que constitui normalmente um problema para as crianças.

Introduz os conceitos de operador escalar, quando a fracção liga duas quantidades da mesma dimensão, expressa na mesma unidade e por isso sem dimensão e de operador função quando relaciona duas grandezas de diferentes dimensões, por ex: tempo em horas e distância em quilómetros para o cálculo da velocidade.

Vergnaud que nos fala de problemas, defende a necessidade de, na abordagem destes, se considerar a interdependência psicológica que muitas vezes os tópicos aí contidos têm e não se privilegiar a interdependência lógica.

Os estudos de Hart (1981, 1984) resultam do interesse de desenvolver uma hierarquia de compreensão em matemática baseada no currículo escolar. Neste sentido, não há uma conceptualização teórica sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais, nem sobre o conhecimento matemático.

A investigação foi integrada no projecto *Concepts in Secondary Mathematics and Science*, a desenvolver nos anos de 1974-9. Foram estudados em pormenor onze tópicos (*ratio*, fracções, decimais, vectores, números positivos e negativos, gráficos, álgebra, medida, reflexão e rotação) e definidos níveis em cada um deles. A hierarquia dos níveis de compreensão foi baseada na análise dos resultados de testes de papel e lápis, que foram aplicados a crianças inglesas, e nos métodos usados por elas durantes as entrevistas realizadas.

O principal objectivo do projecto era dar informação aos professores sobre os níveis de dificuldade em vários tópicos matemáticos e acompanhá-los de formas de avaliação. Segundo Hart (1981), uma correspondência entre os níveis dos tópicos fornece aos professores um guia aproximado relativamente à comparação da dificuldade dos tópicos. Perante a hierarquia estabelecida os professores podiam determinar as sequências de tópicos e os níveis mais apropriados para os seus alunos.

Durante as entrevistas foram identificados métodos, umas vezes inventados pelas crianças e outras vindos de fora da escola, que eram usados por elas para resolver problemas. Foram também identificados erros em determinados questões que tinham sido já estudados por outros autores, nomeadamente a estratégia da adição em problemas de proporcionalidade.

Refira-se que estes trabalhos deram origem a outro tipo de estudos, como os de Hart (1984) e de Kerslake (1986, citado por Hart 1984)) desenvolvidos com professores, durante os quais se experimentavam estratégias de ensino com vista a corrigir concepções erróneas dos alunos.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

No presente capítulo começa-se por definir os sujeitos do estudo, indicando-se os procedimentos adoptados na sua selecção. A seguir descreve-se o *design* da investigação e enunciam-se os instrumentos e as tarefas utilizadas, bem como os respectivos procedimentos adoptados na sua aplicação.

3.1 SUJEITOS DO ESTUDO

A amostra foi escolhida entre os alunos do 6º ano de escolaridade de três escolas C+S da área de Lisboa. No momento em que foi realizada a investigação iniciava-se neste ano de escolaridade o estudo dos números racionais, segundo o programa de Matemática em vigor, anterior à Reforma Curricular. Assim, quando se fez a aplicação dos instrumentos, todos os sujeitos da amostra tinham já recebido ensino nesse domínio, de acordo com as sugestões metodológicas enunciadas no Programa do 2º ciclo.

Participaram no estudo 67 sujeitos o que correspondeu a três turmas das referidas escolas, com uma média de idades de 12,7 anos, que variavam entre os 11,4 e os 14,6 anos, sendo 33 do sexo masculino e 35 do sexo feminino. A tabela 1 mostra a distribuição dos alunos por escola, por nível etário e por sexo.

Tabela 1 - Número de Sujeitos por Turma, por Nível Etário e por Sexo

Turma	N	Idade em anos				Sexo	
		$11,4 \leq I \leq 12$	$12 < I \leq 13$	$13 < I \leq 14$	$14 < I \leq 15,3$	M	F
A	25	4	9	9	3	13	12
B	23	7	9	5	2	12	11
C	19	3	4	7	5	7	12
Total	67	14	22	21	10	32	35

A maioria dos sujeitos era oriunda de meios culturalmente desfavorecidos, apenas para 7 alunos (10,29%) o pai possuía frequência universitária .

3.2 DESIGN DO ESTUDO

A intenção do estudo era investigar as concepções e as competências de alunos do 6º ano sobre os números racionais, procurando dificuldades e possíveis limites, na tentativa de descobrir um novo invariante. Para isso consideraram-se os processos de pensamento de alunos com bom desempenho e de alunos com mau desempenho. Pretendia-se também provocar novas aprendizagens tentando assim uma nova *démarche*, do domínio da Didáctica.

Começou, então, por se definir dois grupos de alunos, tendo contribuído para a sua selecção a conjugação de dois critérios: a classificação atribuída pelo professor numa escala de 1 a 5 (escala utilizada na escola), no período escolar imediatamente antes da aplicação e, ainda a obtida num teste de papel e lápis (Anexo A) que foi elaborado com base na componente parte-todo dos números racionais. Este teste foi aplicado individualmente a cada um dos alunos pela respectiva professora.

Após a análise das respostas e a atribuição de uma pontuação a cada um dos 67 alunos foi possível categorizar três grupos. Assim, definiram-se os grupos seguintes:

1º Grupo - a pontuação estava compreendida entre 41 e 50 pontos

2º Grupo - a pontuação estava compreendida entre 21 e 40 pontos

3º Grupo - a pontuação estava compreendida entre 0 e 20 pontos.

Os alunos do 1º grupo a quem o professor tinha atribuído nível 4 ou 5 passaram a constituir o grupo A - alunos com bom desempenho. Os alunos do 3º grupo a quem o professor tinha atribuído nível 2 (nenhum aluno obteve nível 1) passaram a constituir o grupo B - alunos com mau desempenho. Então, da intersecção dos dois critérios acima referidos resultaram, na totalidade, 30 sujeitos: 15 formando o grupo A e 15 o grupo B.

Um outro critério considerado foi o nível etário, uma vez que se desejava saber se o desempenho, nas tarefas relativas às componentes do número racional, variava com a idade. A distribuição por sexo do grupo de alunos não obedeceu a nenhum critério definido.

Na tabela 2 apresenta-se o número de alunos com bom desempenho e com mau desempenho distribuídos por nível etário e por sexo.

Tabela 2 - Distribuição de Alunos com Bom Desempenho e com Mau Desempenho por Nível Etário e por Sexo

Alunos	Idade em anos							
	11,4≤I≤12		12<I≤13		13<I≤14		14<I≤15,3	
	M	F	M	F	M	F	M	F
Com Bom Desempenho	2	2	3	1	2	2	2	1
Com Mau Desempenho	1	2	2	2	2	3	1	2

Legenda:
M - masculino
F - feminino

Numa segunda fase, cada um dos 30 alunos seleccionados foi confrontado com tarefas (Anexo B) que envolviam na sua resolução diversos subconstructos dos números racionais e que fazem parte do currículo escolar.

Pretendia-se conhecer o que os alunos eram capazes de fazer, segundo a *consigne* definida (Anexo B), acompanhados pelo investigador e, de acordo com algumas indicações que ia sugerindo ao longo da entrevista. Interessava explorar a zona de desenvolvimento proximal (segundo Vygotsky, 1962) relativamente ao conceito de número racional, descrever não só o que o aluno é capaz de fazer naturalmente, mas também como é que as suas estratégias mudam segundo indicações de aquiescência, de reflexão sobre a questão ou de sugestões no uso de materiais disponíveis, de desenhos, de esboços.

Neste tipo de estudos recorre-se com frequência ao método clínico piagetiano como método privilegiado. Contudo, a realização de investigações contextualizadas relacionadas com aprendizagens específicas, concretamente conteúdos matemáticos do currículo escolar, conduziram à necessidade de adaptação do método. Nesse sentido, enfatiza-se a importância de uma observação detalhada dos processos de pensamento e a análise qualitativa das estratégias adoptadas na resolução das tarefas.

A psicologia cognitiva tem utilizado a análise dos protocolos verbais sob duas formas distintas. Uma, inspirada no método piagetiano-entrevista clínica-que consiste em fazer perguntas ao sujeito confrontado com um problema de modo a induzir nele actividades intelectuais e em tentar tratar, através das respostas, a natureza e a organização dos processos cognitivos envolvidos. As questões, em geral, não seguem nenhuma organização, *a priori*, é o experimentador que as orienta em função do seu fim e das re(acções) do sujeito. Outra, utilizada por Newell e Simon que consiste em pedir ao sujeito que fale em voz alta enquanto resolve um problema. Pretende-se perceber a natureza e o encadeamento das operações cognitivas mobilizadas na resolução.

Trata-se de métodos que têm vantagens, mas apresentam inconvenientes quando usados isoladamente. Primeiro, só as informações que acedem à consciência são verbalizadas, ignoram-se as outras e há dificuldade em saber se se acede às mais importantes. Por outro lado, nas crianças mais jovens ou menos especialistas, não é possível dissipar a possibilidade de inferências entre a tarefa principal e o comentário que ele faz ao objecto. Contudo, esses métodos podem ser usados com outros métodos mais fiáveis, deixando menos lugar à interpretação.

Vergnaud (1981b) refere que um objecto de estudo tão complexo como o da aquisição dos conhecimentos matemáticos não pode ser conhecido usando apenas uma abordagem metodológica e, como é natural, a escolha desta abordagem depende das finalidades. Por outro lado, torna-se importante a possibilidade de replicação dos estudos, a regularidade dos resultados encontrados para diferentes grupos de alunos, sujeitos às mesmas condições, o que permite um maior grau de fiabilidade desses resultados.

Porque a área deste estudo é do âmbito das aprendizagens matemáticas, o método clínico-experimental (segundo Vergnaud, 1986b) pareceu o mais adequado. Clínico porque se privilegia o aspecto qualitativo dos fenómenos observados, experimental na medida em que as actividades apresentadas aos alunos foram construídas tendo em conta variáveis de situação.

A situação do aluno que vai falando alto, enquanto está a pensar e a fazer registos, não constitui, para ele, tarefa fácil. Por vezes, é necessário chamar a atenção para o facto de não se pretender a justificação daquilo que o aluno fez, mas antes que ele explicite o que está a pensar enquanto está a resolver a tarefa.

Como se trata de uma investigação sobre aprendizagens escolares as entrevistas aos alunos decorreram nas suas respectivas escolas. De facto, e como defende Vergnaud (1986b), este tipo de pesquisas implica um trabalho aberto com os alunos, seja na sala de aula, seja fora da sala, mas quase sempre no quadro da escola, instituição na qual é excluída a hipótese de subordinar o interesse do aluno ao da investigação.

A investigação sobre saberes escolares levanta ainda outro tipo de questões, como referem Schubauer-Leoni & Perret-Clermont (1985). Assim, os saberes escolares são objectos escolares, mas estão também imbuídos de significados vários que dependem do meio familiar, cultural e social. Esses saberes são ensinados por actores sociais com formação específica e metodologias próprias para o fazer e a apropriação desses mesmos saberes pelos alunos é influenciada pelo seu passado escolar, por hábitos cognitivos e sociais que foram desenvolvendo ao longo da sua história escolar.

Neste sentido, quando a investigadora coloca tarefas escolares ao aluno para que as resolva, a situação é necessariamente diferente da sala de aula, o que obriga o aluno a repensar o significado atribuído à referida tarefa e, provavelmente o seu desempenho é influenciado. Como defende César (1994), em qualquer resolução de tarefas escolares há uma rede relacional que se estabelece, e que não é neutra na forma como essa mesma tarefa vai ser interpretada e executada pelos sujeitos.

Neste estudo, a autora foi apresentada aos alunos como uma investigadora que estava a estudar as principais dificuldades na aprendizagem dos números racionais dos alunos do 2° ciclo.

3.3 INSTRUMENTOS E PROCEDIMENTOS UTILIZADOS

O estudo inclui duas fases: na primeira foi usado um teste de papel e lápis com o objectivo de escolher os alunos que iam constituir a amostra e, na segunda, um conjunto de tarefas que os sujeitos seleccionados resolviam numa situação de entrevista individual.

3.3.1. Teste de papel e lápis "Conceito Parte-Todo"

Uma vez elaborado, o teste de papel e lápis (Anexo A) foi aplicado inicialmente a dez alunos tendo em vista o seu refinamento. A posterior análise e as sugestões dos professores conduziram a uma diminuição do número de itens, eliminando-se os que originaram grandes dúvidas, quer na compreensão, quer na resolução, por forma a que o tempo de aplicação não excedesse 50 minutos (tempo normal de uma aula).

De seguida, solicitou-se aos professores das três turmas escolhidas, que administrassem o teste aos seus alunos, no período de uma aula - 50 minutos - e não fizessem qualquer comentário que pudesse contribuir para uma melhor realização do mesmo. Foi-lhes ainda pedido que a aplicação do teste fosse encarada de um modo natural, isto é, os alunos deveriam pensar que se tratava de mais um teste semelhante aos que estão habituados a realizar nas aulas de matemática.

O teste, constituído por 50 itens, foi construído tendo em conta determinados pressupostos. Assim, aceitou-se que:

- O subconstructo parte-todo, baseado em quantidades discretas ou contínuas, representa um constructo fundamental para o desenvolvimento do conceito de número racional (Behr et al., 1983);

- As análises e conclusões de Vergnaud (1983) sobre o desenvolvimento do conceito de número racional, permitem afirmar que as dificuldades conceptuais estão relacionadas com o facto de se utilizarem quantidades contínuas ou discretas, valores numéricos diferentes, fracções arquimedianas ($1/n$) ou não-arquimedianas (p/q) e ainda com fracções inclusivas ou exclusivas;

- Na representação de fracções se podem usar diversos modelos, como conjuntos de objectos discretos, figuras geométricas (rectângulo, círculo, triângulo) e a recta numérica.

Nos manuais utilizados pelos alunos que participaram no estudo é possível observar qualquer um desses modelos.

Por outro lado, sabe-se que há diferenças entre as crianças na sua capacidade de ultrapassar os distractores e lidar com as tarefas a um nível lógico-matemático. Sendo assim, a capacidade da criança em resolver conflitos entre o processamento perceptual de informação visual e o processamento cognitivo de relações lógico-matemáticas é vista como um indicador importante do grau de compreensão dos conceitos de número racional (Behr et al., 1983).

Com base nestes pressupostos, nas tarefas que envolviam os modelos acima referidos usaram-se diferentes tipos de indicadores visuais, uns consistentes - completos, incompletos e irrelevantes - com a tarefa (quando fornecem informação que pode ajudar o aluno a solucionar a tarefa), outros inconsistentes (segundo Behr et al. no *Rational-Number Project*, 1983). Vejam-se os exemplos apresentados pelos autores e que ilustram os diferentes tipos de indicadores perceptuais. Em todos os casos o que é pedido é que se sombreie três quartos do rectângulo.

Completo - contem toda a informação necessária para ajudar a solucionar a tarefa.

Incompleto - o aluno necessita completar ou modificar o diagrama ou o modelo.

Irrelevante-contém informação estranha mas neutra.

Inconsistente - quando entram em conflito com a conceptualização da tarefa, fornecem informação visual mas que distrai o aluno.

Adaptado de Behr et al. (1983)

Figura 11 - Índices Perceptivos Consistentes e Inconsistentes com a Tarefa

Na classificação do teste atribuiu-se um ponto por cada item certo e zero pontos por cada item errado, totalizando 50 pontos quando o teste estava correctamente resolvido.

Os testes foram analisados com vista a atribuir uma classificação a cada aluno, porque se pretendia escolher alunos com bom desempenho e alunos com mau desempenho. Calculou-se ainda a percentagem de respostas certas relativamente a conjuntos de itens e fez-se um estudo dos erros conduzindo a uma codificação dos mesmos. Após a análise e a apreciação dos testes seleccionaram-se dois grupos de sujeitos: os que obtiveram classificação igual ou superior a 41 pontos e os que obtiveram classificação igual ou inferior a 21.

3.3.2. Tarefas e Materiais Apresentados

As investigações sobre os números racionais sugerem que diferentes estruturas cognitivas são necessárias para tratar com os vários subconstructos do número racional, havendo estudos que identificam estados de pensamento através da observação da realização de tarefas que envolvem um dado subconstructo quando comparada com a de outras tarefas que dizem respeito a outro subconstructo, para um determinado estado.

Kieren, como já foi referido, define quatro subconstructos dos números racionais - medida, quociente, *ratio* e operador - e defende que a equivalência e a partição são mecanismos construtivos que operam ao longo dos quatro subconstructos contribuindo para a formação de imagens e a construção de ideias matemáticas.

O programa curricular do 2° ciclo prevê a introdução e o estudo destas diferentes interpretações e, apesar de não assumir essa sequência na totalidade, de facto pretende-se que no final do ciclo todos esses aspectos tenham sido abordados.

Neste sentido, os sujeitos de cada um dos grupos A e B foram confrontados, através de entrevista individual, com doze tarefas (Anexo B) que envolvem diferentes componentes do conceito de número racional. A partir daqui e, ao longo do trabalho, optar-se-á pela designação de componentes do conceito e não subconstructos do conceito de número racional uma vez que as tarefas envolvem subconstructos (quociente, medida, *ratio*), relação de ordem e equivalência e uma operação (adição de fracções).

A ordem de apresentação das tarefas variou em função do contexto concreto (concreto porque o material ou o enunciado é apresentado ao aluno num contexto ligado a situações do quotidiano) ou abstracto (porque o enunciado é apresentado unicamente na forma simbólica) da actividade proposta.

A Tabela 3 mostra as tarefas distribuídas por contexto e envolvendo diferentes componentes dos números racionais.

Tabela 3 - Número de Tarefas em Função do Contexto e da Componente Envolvida

	Componentes Envolvidas				
	Quociente	Medida	Equivalência	Adição	*Ratio*
Contexto Concreto	2*	3	1	1	2**
Contexto Abstracto	1		1	1	

* No quociente a/b, numa situação a=1 e noutra a≠1.

**Para o subconstructo *ratio* foram previstas duas situações (quantidades contínuas e discretas).

A escolha de contextos diferentes resultou não só, das conclusões de diversos estudos (ex. Behr et al., 1983, Bastien, 1987, Fayol, 1990), onde se destaca que essa diferença conduz a diversas estratégias de resolução, tipos de erros e ainda dificuldades variadas, mas também da convicção de que um contexto concreto facilita a resolução de uma tarefa.

A este respeito é bem elucidativo o estudo de Bastien & Rapidel (1981, citado em Bastien, 1987) sobre números racionais, em que foi variada *l'habillage* do problema, e mantidos os mesmos valores numéricos, o que provocou importantes diferenças nas *performances* observadas.

De início, neste estudo, as tarefas a resolver envolviam os vários componentes dos números racionais e foram pré-testadas num pequeno grupo de alunos (seis na totalidade), com o fim de avaliar a sua aplicabilidade à amostra do estudo.

Com esta pré-testagem verificou-se que o tempo necessário à resolução das tarefas era cerca de duas horas, o que se tornava completamente contraproducente para alunos deste nível etário. Por outro lado, a grande dificuldade que os alunos manifestavam nas situações que envolviam o constructo operador, obrigava a uma constante intervenção do investigador e, muitas vezes, conduzia a uma progressiva desmotivação dos alunos. Note-se que, na altura em que se aplicaram as tarefas, alguns conteúdos estavam ainda a ser abordados, nomeadamente o conceito de número racional enquanto operador, que, no programa em vigor, surge associado às operações com números racionais.

Em consequência disso, optou-se por não utilizar todas as situações criadas e decidiu-se manter as tarefas que na fase da pré-testagem não tinham sido inibidoras de realização para nenhum aluno. Na resolução do conjunto das tarefas a duração média foi de 75 minutos para cada sujeito.

Em relação à ordem de apresentação das tarefas foram feitas as opções seguintes: a) a primeira tarefa foi a que se revelou de mais fácil abordagem na pré-testagem, aceitando-se a ideia de que este facto funcionaria como motivador para a continuação da entrevista; b) duas questões que envolvem o mesmo constructo em contextos diferentes não foram apresentadas na sequência uma da outra para não influenciar a resolução.

As entrevistas que foram registadas em gravador, decorreram numa das salas de aula das escolas a que os alunos pertenciam.

No início da entrevista e, após uma pequena conversa sobre a escola com o fim de pôr o aluno mais à vontade, foi-lhe explicado o objectivo do trabalho, referindo-se que interessava conhecer melhor as suas dificuldades em relação aos números racionais. Convém salientar que todos os alunos se mostraram totalmente disponíveis para participar no estudo.

O experimentador propôs a cada aluno a realização das doze tarefas, uma de cada vez, lendo em voz alta os enunciados e dizendo que gostaria de saber como é que ele as resolvia. Para isso, era necessário que fosse explicando como fazia, falando alto e/ou escrevendo. Como já se referiu, nalguns casos, foi preciso chamar a atenção para o facto que não se pretendia a justificação daquilo que fez, mas antes que exprimisse o que estava a pensar enquanto estava a realizar.

Para além disso, foram também apresentados diferentes materiais, tais como: tiras e desenhos em cartolina de diferentes cores, folhas de papel com desenhos de figuras geométricas - círculos, rectângulos - divididos de vários modos, folhas de papel A4, papel quadriculado, régua, transferidor, compasso, lápis e canetas de cor. Estes materiais podiam ser utilizados pelos alunos na resolução das tarefas.

Durante a entrevista o experimentador, para além da utilização de materiais que sugeria, sempre que o aluno mostrava dificuldade em resolver a tarefa, dava outro tipo de ajudas, concretamente de aquiescência (por ex: "sim, sim", "está bem") e ainda de questionamento, quando dizia "tens a certeza?", "pensas que é essa a solução?", "podes explicar melhor?" e "o que queres dizer com ....?".

Para além de se terem registado as entrevistas em gravador, foram recolhidos os procedimentos dos alunos relativamente ao uso dos materiais e toda a produção escrita dos processos de resolução.

Se, à partida, um aluno ficava bloqueado (demorava muito tempo ou manifestava sintomas de embaraço) com a situação ou se dava por terminada a a tarefa e a resposta não estava correcta, sugeria-se que experimentasse outra maneira de realizar, como, por exemplo, usar materiais, construir diagramas, esquemas. Se, apesar disso, o aluno mantinha a resposta errada, não se insistia e continuava-se com a tarefa seguinte.

Na parte final da entrevista e apenas com o objectivo de conhecer a relação que estes alunos tinham com a matemática foram colocadas as seguintes questões:

- Do conjunto das tuas disciplinas, qual é a que gostas mais? E a Matemática onde a colocavas, no "gosto muito", "gosto assim-assim", ou "não gosto nada"?

- O que pensas sobre a utilidade da Matemática? Imagina uma situação do quotidiano em que te pareça que a Matemática é importante para a resolver.

- O que é preciso fazer para se ser bom aluno na disciplina de Matemática?

Para a aplicação do teste e para a realização das entrevistas foi pedida autorização ao Conselho Directivo das respectivas Escolas e solicitada a colaboração dos professores das três turmas. Esta colaboração consistiu, por um lado, na disponibilidade para fornecer informações sobre as práticas pedagógicas, em particular, os manuais adoptados e as metodologias seguidas no ensino dos números racionais (Anexo C), informações sobre o perfil dos alunos (Anexo D) e, por outro nas facilidades concedidas relativamente às entrevistas a realizar com estes. Foi também comunicado aos directores de turma dos respectivos alunos a realização do estudo e os seus objectivos.

Finalmente refira-se que se tentou que as entrevistas decorressem em períodos que não coincidissem com as aulas dos respectivos alunos.

3.4. ANÁLISE DE DADOS

Nesta investigação pretendia-se estudar as concepções e competências dos alunos sobre o conceito de número racional desenvolvido pelos alunos em situação de aprendizagem formal ao longo do currículo de Matemática do 2º ciclo. Com esse propósito a pesquisa foi orientada, como foi já anteriormente mencionado, pelas seguintes questões de estudo:

Questão 1- Há diferenças no desempenho médio dos alunos com bom desempenho e com mau desempenho em tarefas que envolvem cada um dos subconstructos?

Questão 2- O contexto concreto é facilitador da resolução da tarefa? Os alunos com mau desempenho obtêm melhores resultados nas tarefas concretas?

Questão 3- O desempenho é diferente nas diversas tarefas tendo em conta a idade? Os alunos com nível etário mais elevado realizam melhor, qualquer que seja a tarefa?

Questão 4- A forma de apresentação (contexto concreto ou contexto abstracto, fracção arquimediana ou fracção não arquimediana, quantidades contínuas ou quantidades discretas) da tarefa induz a estratégia a utilizar pelos alunos?

Questão 5- Os alunos com bom desempenho utilizam preferencialmente alguma estratégia de resolução, nomeadamente a representação simbólica?

Questão 6- Quais são as concepções alternativas que os alunos manifestam relativamente ao conceito de número racional, atendendo às diversas componentes estudadas? Que obstáculos se colocam à sua aprendizagem?

Para responder a estas questões, obtiveram-se inicialmente as classificações na disciplina de Matemática dos alunos de três turmas, do período anterior ao da realização das entrevistas, junto dos respectivos professores e, além disso, os alunos realizaram o teste sobre o Conceito Parte-Todo. Relativamente a este, foi realizada uma análise em termos de percentagens médias de respostas certas em determinados grupos de itens.

Com base nestes critérios foram escolhidos os 30 sujeitos que continuaram o estudo, 15 alunos com bom desempenho e 15 com mau desempenho. Estes sujeitos foram posteriormente entrevistados enquanto realizavam diversas tarefas que envolviam componentes relativas ao conceito de número racional.

Na análise dos protocolos obtidos através das entrevistas individuais privilegiou-se um tratamento qualitativo recorrendo-se também à estatística descritiva.

Para responder às três primeiras questões do estudo recorreu-se ao cálculo da frequência de respostas certas que se traduziu em percentagens médias de desempenho, de acordo com as diferentes componentes envolvidas, o contexto concreto ou abstracto da tarefa (considerando em ambos os casos os alunos com bom e com mau desempenho) e o nível etário dos sujeitos que participaram no estudo.

No sentido de responder às restantes questões foram sistematizadas as estratégias (entendendo-se aqui por estratégias os procedimentos que levam à escolha de aptidões a usar ou ao conhecimento mobilizado em cada passo durante a resolução de uma dada tarefa) adoptadas pelos alunos e as incompreensões detectadas, através de uma análise de conteúdo. A categorização criada assentou em estudos realizados neste domínio, já mencionados no capítulo introdutório, e ainda na experiência da autora enquanto docente de Matemática.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

Na primeira parte deste capítulo apresentam-se dados referentes ao teste de papel-e-lápis sobre o conceito parte-todo e cujos resultados constituíram um dos critérios para seleccionar os alunos a entrevistar na 2ª fase do estudo.

Na segunda parte referem-se os dados obtidos através da análise das tarefas que os alunos resolveram em situação de entrevista individual. Com esses dados, traduzidos em termos de desempenho, procurou-se responder à primeira questão (Há diferenças no desempenho médio dos alunos em tarefas que envolvem cada uma das componentes?), à segunda questão (O contexto concreto é facilitador da resolução da tarefa, relativamente ao contexto abstracto?) e à terceira questão do estudo (De que modo a idade tem influência nas competências relativas aos diversos constructos?). Com a análise das estratégias de resolução e das dificuldades manifestadas, pretendeu-se responder à quarta questão (A forma de apresentação da tarefa condiciona a estratégia a utilizar pelos alunos?), à quinta questão (Os alunos com bom desempenho utilizam preferencialmente alguma estratégia de resolução?) e à sexta questão do estudo (Quais são as concepções erróneas que os alunos manifestam relativamente ao conceito de número racional, atendendo às diversas componentes estudadas? Que obstáculos se colocam à sua aprendizagem?).

Na terceira parte apresentam-se, ainda que sucintamente, os dados resultantes das questões relativas à relação do aluno com a matemática.

4.1 COMPETÊNCIA MATEMÁTICA DOS SUJEITOS NA INTERPRETAÇÃO PARTE-TODO

A fim de caracterizar os sujeitos relativamente ao nível de compreensão do subconstructo parte-todo apresentam-se os valores médios obtidos na totalidade do teste de papel-e-lápis (Anexo A) e faz-se ainda uma descrição mais detalhada dos resultados tendo em conta grupos de questões que avaliam aspectos diferenciados da mesma componente.

A classificação obtida nesse teste foi um dos critérios que serviu de base à formação dos dois grupos de alunos: grupo A (alunos com bom desempenho) e grupo B (alunos com mau desempenho).

A análise dos testes consistiu nos aspectos seguintes:

a) correcção e pontuação, em que se atribuiu 1 ponto por cada resposta certa e 0 ponto por cada resposta errada, de modo a obter uma classificação para cada aluno;

b) determinação do grau de facilidade de itens agrupados segundo aspectos diferenciados do subconstructo parte-todo, como se referiu no capítulo anterior;

c) categorização das concepções erróneas que surgiram nas produções escritas dos alunos.

Como foi descrito no capítulo relativo à metodologia, a concepção do teste releva de pressupostos defendidos por vários autores, nomeadamente Novillis (1976), Vergnaud (1983) e Behr et al (1983).

As classificações dos testes, que, em princípio, traduziam a representação do conhecimento relativo à componente parte-todo dos sujeitos, constituíram um dos critérios em que se baseou a selecção dos alunos a entrevistar.

Apontam-se também os resultados em termos de concepções erróneas reveladas nos registos dos alunos, para cada item do teste, tendo em vista aprofundar aspectos convergentes com as tarefas apresentadas posteriormente.

Para uma amostra de sessenta e sete alunos, a média obtida no teste foi de 25.04 pontos, para um máximo de 49 e um mínimo de 8 pontos. Refira-se que a classificação atribuída para uma realização totalmente certa do teste foi de 50 pontos, 1 ponto por cada resposta certa e 0 pontos para uma resposta errada.

Na tabela 4 indicam-se os valores médios das classificações obtidas no teste e os respectivos valores máximos e mínimos, para cada uma das turmas.

Tabela 4 - Médias, Mínimos e Máximos das Classificações obtidas no Teste Conceito Parte Todo, nas Turmas A, B e C

Turmas	Nº Alunos	Média	Min	Máx
A	25	26.60	8	49
B	23	24.85	8	45
C	19	23.68	9	46

Para se fazer uma análise por conjunto de itens foi necessário proceder a um agrupamento com determinados critérios. Para isso, consideraram-se os seguintes grupos de questões:

A - quando a pergunta envolve quantidades discretas (itens 1, 2, 3, 4, 5, 43 e 44);

B - quando a pergunta envolve quantidades contínuas (todos os outros itens do teste).

No caso B as situações diferenciam-se pela figura geométrica utilizada e, assim, ter-se-á:

B1- se o modelo de representação é o círculo, independentemente do índice perceptivo ser completo, incompleto ou irrelevante (itens 6, 7, 8, 9, 10, 17, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 49);

B2- se o modelo de representação é o paralelogramo, nomeadamente o rectângulo, quer o índice perceptivo seja completo, incompleto ou irrelevante (itens 11, 12, 13, 14, 15, 19, 26, 33, 34, 36, 37, 38, 45, 46, 47, 48, 50);

B3- se o modelo de representação é o triângulo independentemente do índice perceptivo ser completo, incompleto ou irrelevante (itens 18, 20, 35);

C - se o modelo de representação é a recta numérica (itens 21, 22, 23, 24, 25, 26, 39, 40, 41, 42).

Quer na condição quantidade discreta, quer na condição quantidade contínua, na elaboração dos itens usam-se fracções com numerador 1, isto é, fracções arquimedianas e fracções com numeradores diferentes de 1, isto é, fracções não arquimedianas.

O número de itens que envolvem quantidades contínuas (43 itens) é superior ao número de itens que envolvem quantidades discretas (7 itens) uma vez que no primeiro caso foi necessário considerar diferentes situações de acordo com a figura usada como modelo (círculo, rectângulo, triângulo e recta numérica). Por outro lado, nas regiões geométricas teve-se em conta os diferentes tipos de índices perceptivos, consistente (completo, incompleto ou irrelevante) ou não com a tarefa. É considerando estes aspectos que se deve fazer a leitura e a comparação dos resultados obtidos.

A Tabela 5 apresenta os valores médios percentuais das classificações obtidas por conjunto de itens, para a totalidade dos alunos.

Tabela 5 - Médias Percentuais das Classificações Obtidas pelos Sujeitos no Teste Conceito Parte Todo por Grupos de Itens

Teste Parte-Todo	M %
A - Quantidades discretas	52.86
B - Quantidades contínuas	62.11
B1 (círculo)	78.18
B2 (rectângulo)	52.44
B3 (triângulo)	55.72
B4 (recta numérica)	37.94

Os valores médios obtidos nos itens que envolviam quantidades discretas são ligeiramente inferiores aos obtidos nas questões relativas a quantidades contínuas. Esses valores mais baixos devem-se principalmente às questões (itens 43 e 44 do teste) que partem da representação na forma de fracção de uma certa quantidade de objectos e se pretende que o aluno descubra a totalidade dos objectos.

Nos itens referentes às quantidades contínuas verifica-se que naqueles que abordam o modelo das áreas (figuras geométricas - círculos, rectângulos, triângulos) o nível de facilidade não é idêntico. De facto, a percentagem média de respostas certas é superior, quando o modelo usado é o círculo em vez do rectângulo ou do triângulo.

Particularmente evidente é a diferença no desempenho obtido nos itens que envolvem quantidades contínuas, consoante o modelo usado é o das áreas ou o da recta numérica. Neste caso, a percentagem média de respostas certas é muito inferior ao dos restantes itens.

Uma possível explicação será que o todo na representação através de áreas, quando se usam regiões geométricas (quantidades contínuas), seja mais facilmente percebido como uma unidade simples do que no caso dos conjuntos de objectos (quantidades discretas).

Na análise das respostas verifica-se que as principais concepções alternativas, no caso das quantidades contínuas, consistem em:

- confundir a noção parte-todo com a parte-parte (ex: 6/3 em vez de 6/9, para o item 10);
- em não considerar a divisão equitativa (ex: 2/4 em vez de 4/6, para o item 32);
- em considerar a parte sombreada da figura em vez da não sombreada (ex: 1/4 em vez de 3/4, para o item 14);
- considerar a notação ao contrário (ex: 8/4 em vez de 4/8, para o item 9).

No que diz respeito ao modelo da recta numérica destacam-se as seguintes concepções:

- atribuir ao numerador da fracção o número 1 e ao denominador o número de pontos marcados na recta (ex: 1/5 em vez de 1/4, para o item 22), ou vice-versa;
- ler cada divisão como 0,1 (ex. 0,1 em vez de 1/2, para o item 21);
- atribuir ao numerador da fracção o número de pontos e ao denominador o número de divisões marcadas na recta (ex: 5/4 em vez de 1/4, para o item 22), ou vice-versa;
- atribuir ao numerador da fracção o número 1 e ao denominador o número de divisões marcadas na recta (ex: 1/9 em vez de 1/3, para o item 23)
- atribuir ao numerador o número de divisões correspondentes ao ponto assinalado e ao denominador o número de divisões marcadas na recta ou vice-versa (ex: 6/23 em vez de 6/10);
- atribuir ao numerador o número de pontos marcados na recta e ao denominador o número 1 ou vice-versa (ex: 5/1 em vez de 2/5, para o item 39).

No caso das quantidades discretas realçam-se as seguintes concepções alternativas:

- a confusão entre parte-todo e parte-parte (ex: 2/6 em vez de 2/8, para o iem 3);
- a notação ao contrária (ex: 5/3 em vez de 3/5, para o item 2);
- a contagem do número de objectos, ignorando a pergunta (ex: 8 berlindes para o item 1).

4. 2. ANÁLISE DAS TAREFAS

Nesta secção começam por se apresentar as tarefas e as componentes do número racional estudadas. De seguida, referem-se as percentagens de respostas certas, em cada uma das componentes, para o grupo A (alunos com bom desempenho) e para o grupo B (alunos com mau desempenho), procurando-se, assim, responder à primeira questão do estudo.

Posteriormente, consideram-se os resultados, traduzidos em percentagem de respostas certas, relativamente às tarefas que envolvem o mesmo componente (quociente, equivalência e adição) em contexto concreto e em contexto abstracto, para cada um dos grupos de alunos e pretende-se, deste modo, dar resposta à segunda questão.

Finalmente e face à terceira questão fez-se uma análise e tratamento dos dados tendo em conta o nível etário dos alunos.

4.2.1 As Tarefas e as Componentes do Número Racional

Em situação de entrevista individual, os alunos resolveram doze tarefas, que foram apresentadas segundo a ordem pela qual aparecem no Anexo B.

Componentes	Tarefas e Fracções Envolvidas
Quociente	1 (contexto concreto-1/3) 3 (contexto concreto-3/4) 7 (contexto abstracto-1/3)
Medida	5a (contexto concreto - 3/4) 5b (contexto concreto - 1/2) 5c (contexto concreto - 3/4 + 1/2)
Adição	6 (contexto concreto - 3/4 + 1/2) 9 (contexto abstracto - 3/4 + 1/2)
Ratio	4 (quantidades discretas - 1/3 e 3/6) 10 (quantidades contínuas - 1/3 e 2/6)
Equivalência	2 (contexto concreto - 2/3 e 8/12) 8 (contexto abstracto - 2/3 e 8/12)

Figura 12 - Componentes do Conceito de Número Racional e Fracções Envolvidas em cada uma das Tarefas

Na figura 12 enumeram-se as actividades propostas, as fracções envolvidas em relação a cada uma das interpretações do conceito de número racional e faz-se ainda a referência ao contexto, concreto ou abstracto. Os números que aparecem no quadro correspondem ao número de ordem por que foram apresentadas as tarefas.

Após a transcrição das entrevistas, acompanhada pelas respectivas produções escritas dos alunos e pelos registos, feitos pela experimentadora, dos procedimentos destes (particularmente quando foram usados os materiais disponibilizados), procedeu-se à análise dos protocolos.

Apesar da tarefa 5c ter sido aplicada e de objecto de análise, não são apresentados resultados relativamente a ela. De facto, esta tarefa envolvia a adição, mas a sua forma de apresentação estava associada ao subconstructo medida, o que parecendo uma situação interessante, veio a revelar a necessidade de uma nova aplicação, por forma a obterem-se dados mais conclusivos.

Os dados recolhidos e o seu posterior tratamento, particularmente a nível das frequências de respostas certas e do tipo de estratégias utilizadas conducentes ou não a respostas certas, tornam possível a identificação de semelhanças e de diferenças e as respectivas interpretações entre os alunos com bom desempenho e com mau desempenho, relativamente à compreensão do conceito de número racional.

4.2.2 Desempenho nas Diversas Componentes do Número Racional

Na Tabela 6 especificam-se as diferentes tarefas relativas a cada um dos diferentes aspectos do número racional estudados e indicam-se as percentagens de respostas certas que lhes correspondem, nos grupos considerados.

Como se pode constatar pela análise da tabela, no total das doze tarefas, as que se revelaram mais fáceis foram as que se referiam à componente quociente (tarefas 1, 3 e 7) para o grupo B (66.67%) e para o grupo A (93.33%), grupo que apresenta também valores elevados na componente medida (96.50%) e adição (93.33%).

Tabela 6 - Percentagens de Respostas Certas em Cada Componente do Número Racional no Grupo A e no Grupo B.

Componentes	Grupos A	Grupos B
Quociente (tarefa 1, 3, 7)	93.33	66.67
Medida (tarefa 5a, 5b)	96.50	60.00
Adição (tarefa 6, 9)	93.33	63.33
Ratio (tarefa 4, 10)	73.34	30.00
Equivalência (tarefa 2, 8)	83.33	33.33

Os dois grupos manifestaram uma maior dificuldade, se bem que de grau muito diferente (73.34% de respostas certas para o grupo A e 30.00% para o grupo B), na resolução das tarefas relativas à interpretação *ratio*. Na tarefa 4, envolvendo quantidades discretas, os resultados foram inferiores (66.67% no grupo A e 20.00% no grupo B) aos obtidos na tarefa 10 relativa a quantidades contínuas (80.00% no grupo A e 40.00% no grupo B).

Realce-se ainda o facto de o grupo B nas interpretações *ratio* e equivalência apresentar valores muito baixos em termos de percentagem de respostas certas.

A figura 13 permite visualizar as diferenças entre os dois grupos e observar como as diversas componentes do número racional se revelaram com graus diferentes de facilidade, podendo talvez estabelecer-se uma hierarquia de dificuldade entre os subconstructos quociente e medida, por um lado e *ratio*, por outro.

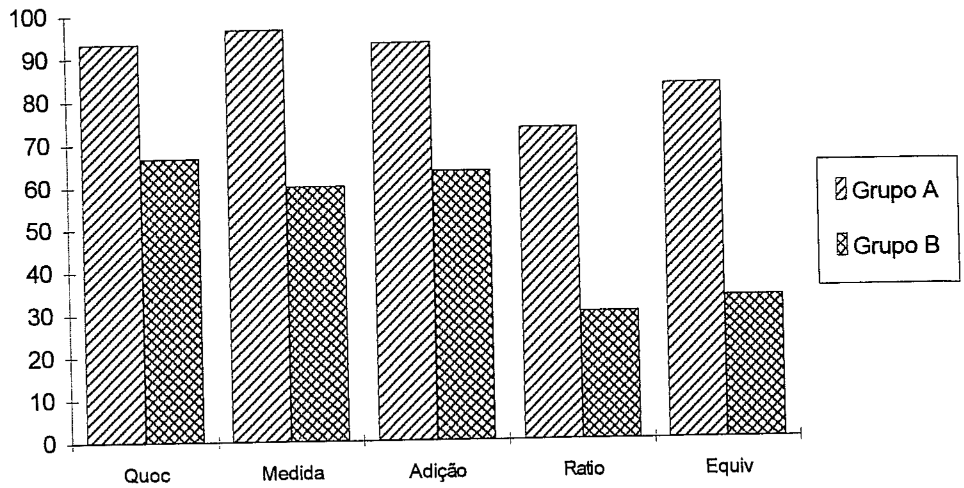


Figura 13 - Comparação entre as Percentagens de Respostas Certas em cada Componente do Número Racional nos Grupos A e B.

É interessante verificar que os resultados obtidos, por um lado, nas tarefas relativas ao subconstructo medida e à operação adição e, por outro, nas tarefas envolvendo o subconstructo *ratio* e as referentes à equivalência de fracções, são próximos.

Estes resultados não são surpreendentes, confirmam mesmo os obtidos em estudos anteriores, isto é, o subconstructo quociente e medida revelam-se como sendo os mais fáceis e o subconstructo *ratio* como o mais difícil.

4.2.3 Desempenho nas Componentes Quociente, Adição e Equivalência em Contexto Concreto e Abstracto

No sentido de responder à segunda questão de estudo evidenciam-se os resultados obtidos nas seis tarefas em que se contrastavam os contextos, a saber:

- tarefas 1 e 7 relativas à componente quociente, respectivamente em contexto concreto e abstracto e envolvendo a fracção 1/3;
- tarefas 6 e 9 relativas à adição de números racionais (3/4+1/2), respectivamente em contexto concreto e abstracto;
- tarefas 2 e 8 relativas ao conceito de equivalência de fracções (2/3 e 8/12), respectivamente em contexto concreto e abstracto.

Na Tabela 7 apresentam-se os resultados, em percentagem, das seis tarefas mencionadas, para cada um dos grupos A e B.

Tabela 7 - Percentagens de Respostas Certas nas Tarefas Quociente, Adição e Equivalência em Contexto Concreto e Abstracto, nos Grupos A e B

Tarefas	Grupo A		Grupo B	
	Contexto concreto	Contexto abstracto	Contexto concreto	Contexto abstracto
Quociente (tarefa 1, 7)	100	93.33	86.67	60.00
Adição (tarefa 6, 9)	93.33	93.33	80.00	46.67
Equivalência (tarefa 2, 8)	86.67	80.00	40.00	33.33

Nos dois grupos A e B, os resultados das tarefas em contexto concreto, qualquer que seja a situação considerada, são superiores ou iguais aos das tarefas em contexto abstracto. Em qualquer dos casos, a diferença é sempre mais acentuada no grupo B. De facto, neste grupo, em qualquer das tarefas, é particularmente evidente como o contexto concreto se revelou facilitador na resolução das tarefas relativamente ao contexto abstracto.

Na tarefa 1 (quociente) e na tarefa 2 (equivalência) o contexto concreto referia-se no enunciado a uma situação do quotidiano, respectivamente, de divisão e de comparação. Na tarefa 6 (adição), o contexto concreto consistiu na representação da situação através de materiais, o que estimulou a sua utilização pelos alunos.

A figura 14 permite visualizar as diferenças entre os dois grupos e observar como, particularmente no grupo B (alunos com mau desempenho), essas diferenças são notórias.

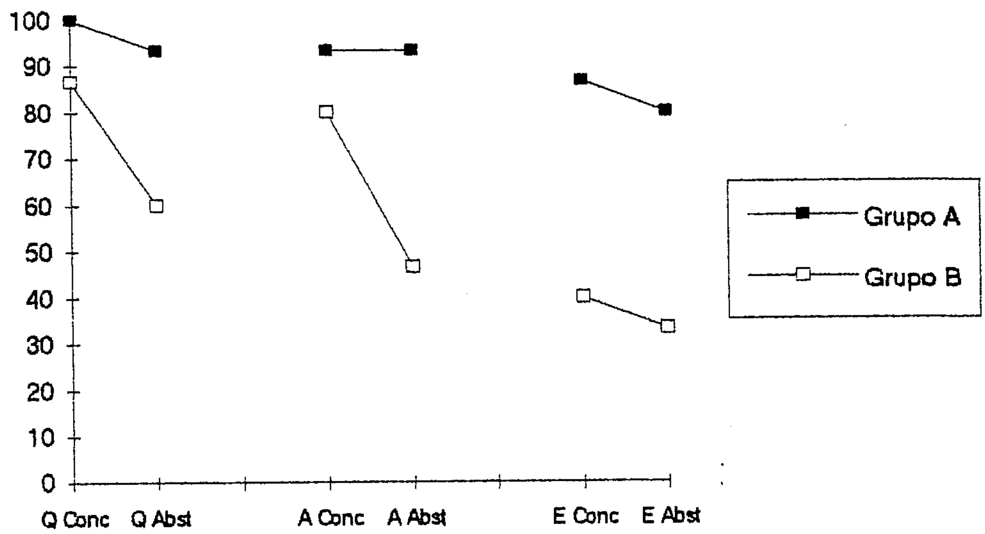


Figura 14 - Comparação entre as Percentagens de Respostas Certas nas Tarefas Quociente, Adição e Equivalência, em Contexto Concreto e Abstracto, nos grupos A e B

É interessante verificar como a tarefa relativa à adição, que foi apresentada no contexto concreto com materiais que os alunos podiam manipular, se revelou como bem mais fácil do que a apresentada em contexto abstracto, principalmente se nos lembrarmos que os alunos conheciam já o algoritmo da adição com o qual podiam responder à questão e que, de acordo com a entrevista, as suas dificuldades não se traduziam na escolha da operação a realizar.

4.2.4 Desempenho nas Componentes do Número Racional e o Nível Etário

Com o objectivo de responder à terceira questão organizaram-se os resultados obtidos, em cada um dos aspectos relativos ao conceito de número racional, de acordo com o nível etário. Como a idade dos sujeitos estava compreendida entre os 11,4 e os 15,3 anos, consideraram-se quatro níveis (11, 12, 13 e 14) de idade.

Convém aqui referir que a idade média de um aluno do 6º ano de escolaridade, sem repetências, é de 12 anos. Então, os sujeitos da amostra com 13 ou 14 anos são alunos que já repetiram um ou 2 anos, aspecto que foi confirmado junto dos directores de turma.

A Tabela 8 refere-se às percentagens de respostas certas em cada componente estudada e considerando o nível etário da totalidade dos alunos, isto é, não se destacando se o aluno pertence ao grupo A ou B.

Tabela 8 - Percentagens de Respostas Certas nas Tarefas Quociente, Medida, Adição, *Ratio* e Equivalência por Nível Etário

	Idade em anos			
Componentes	11,4<I<12	12<I<13	13<I<14	14<I<15,3
Quociente	80.37	79.48	81.78	78.21
Medida	80.30	79.64	72.45	80.41
Adição	64.37	75.62	87.53	85.78
Ratio	29.93	62.90	63.54	50.28
Equivalência	57.13	56.23	56.00	64.03

Verifica-se que, na tarefa quociente, os resultados são bons e muito próximos, para qualquer nível de idade considerado. Nas tarefas adição, *ratio* e equivalência há diferenças nos valores obtidos, quando se tem em conta o nível etário, ou seja, os alunos com idades mais baixas (entre 11,4 e 12 anos) são os que apresentam resultados inferiores.

Na figura 15 é possível visualizar essas diferenças observadas, no desempenho relativo às componentes, de acordo com o nível de idade considerado.

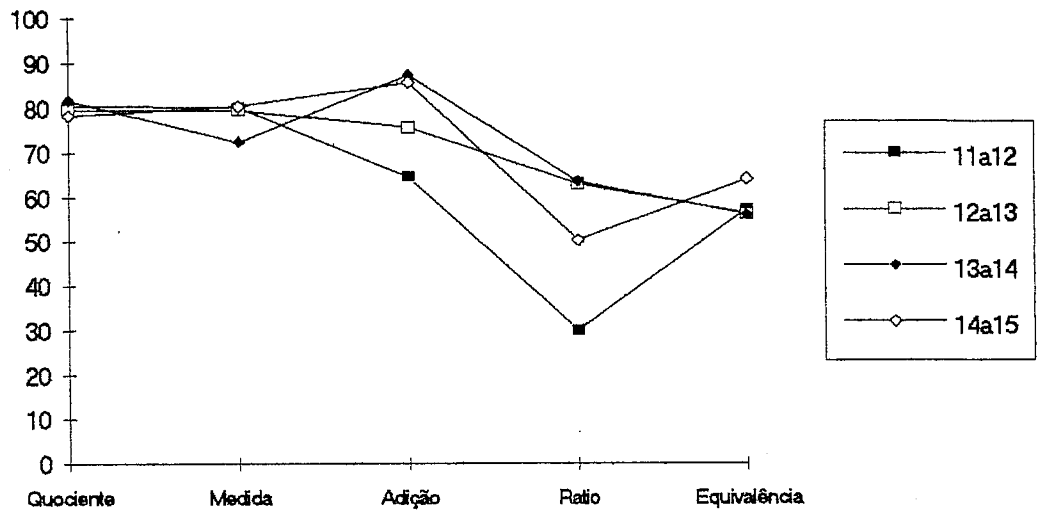


Figura 15 - Comparação entre os Desempenhos nas Componentes do Número Racional por Nível Etário

De facto, os alunos com idades compreendidas entre 11,4 e 12 anos são os que apresentam resultados mais heterógeneos, isto é, a diferença entre o valor mínimo (*ratio* - 29.93%), no conjunto dos cinco aspectos considerados, e o valor máximo (quociente - 80.37%) é a mais elevada, tendo em conta os grupos de idade.

Por outro lado, os alunos com idades compreendidas entre 12 e 14 anos de idade são os que apresentam resultados que se podem considerar mais homogéneos, ou seja, há uma menor oscilação entre os valores máximo e mínimo.

É interessante notar que os baixos resultados obtidos no conceito *ratio* se devem essencialmente ao grupo de alunos com 11 anos de idade.

A Tabela 9 mostra as percentagens de respostas certas em cada componente do número racional tendo em conta o nível etário e também os grupos A e B de alunos. Pela análise da tabela é possível verificar que é particularmente este último grupo de alunos que contribui para os resultados mais baixos nas tarefas *ratio*.

Tabela 9 - Percentagens de Respostas Certas nas Tarefas Quociente, Medida, Adição, *Ratio* e Equivalência por Nível Etário e em cada um dos Grupos A e B

Componentes	Idade em anos							
	11,4<I<12		12<I<13		13<I<14		14<I<15,3	
	A	B	A	B	A	B	A	B
Quociente	46.88	33.49	46.36	33.12	47.70	34.08	45.62	32.59
Medida	49.51	30.79	49.11	30.53	44.67	27.78	49.58	30.83
Adição	38.35	26.02	45.05	30.57	52.15	35.38	51.10	34.68
Ratio	21.24	8.69	44.64	18.26	45.09	18.45	35.68	14.60
Equivalência	40.81	16.32	40.16	16.07	40.00	16.00	45.74	18.29

Legenda:
A - Alunos com bom desempenho
B - Alunos com mau desempenho

Outro aspecto a assinalar diz respeito ao facto de, no grupo dos alunos com idades compreendidas entre 14 e 15,3 anos, o subconstructo *ratio* se ter revelado como o mais difícil, tal como para o grupo dos alunos com idades compreendidas entre 11,4 e 12 anos.

Se, por um lado, parece que o subconstructo *ratio* funciona discriminativamente em relação à idade, por outro lado, o grupo de alunos com idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos obtêm melhores resultados que o grupo de alunos com idades compreendidas entre os 14 e os 15 anos, o que faz supor que outros factores poderão intervir que serão discutidos no capítulo seguinte.

4.2.5 Síntese dos Resultados Traduzidos em Desempenho

Como já se referiu, o tratamento dos resultados obtidos pelos alunos nas tarefas, em termos de desempenho, foi realizado com o fim de responder às três primeiras questões do estudo.

Os resultados permitiram detectar diferentes graus de facilidade na realização das tarefas, revelando-se a componente *ratio* como a mais difícil, para o grupo A (alunos com bom desempenho) e para o grupo B (alunos com mau desempenho) e a componente quociente como a mais fácil para o grupo B. No grupo A, as tarefas relativas à componente medida são as que apresentam melhores resultados, embora muito próximos das que envolvem o subconstructo quociente e a adição.

Os resultados permitiram verificar que as tarefas em contexto concreto se revelaram mais fáceis que as tarefas em contexto abstracto, em qualquer das situações consideradas (quociente, adição e equivalência), nos dois grupos, embora a diferença seja mais evidente no grupo B.

No que diz respeito à influência da idade no desempenho das diversas tarefas, observa-se que os alunos de idades compreendidas entre 11,4 e 12 anos são os que apresentam resultados mais baixos nas tarefas envolvendo a adição, a equivalência e o *ratio*, em particular, neste último caso, quando se compara com os outros níveis de idade.

4. 3. ESTRATÉGIAS UTILIZADAS NAS DIVERSAS TAREFAS

Após a definição das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos, apresentam-se, para as diversas tarefas, os tipos de procedimentos considerados, bem como os dados daí resultantes, tentando, assim, dar resposta às questões 4 e 5 do estudo.

4.3.1 Definição das Estratégias de Resolução

A definição dos diferentes tipos de estratégias baseou-se essencialmente nos diversos modos representacionais que os alunos escolheram para resolver as questões propostas. Para isso, o ponto de partida foi o modelo de Lesh (1983) que corresponde a uma reconceptualização do modelo de Brunner, em que no modo icónico se inclui a utilização de materiais manipulativos e modelos figurais estáticos como desenhos, esquemas, esboços, e no modo simbólico se considera a linguagem oral e os símbolos escritos. Assim, a categorização a seguir apresentada, baseia-se na definida no "Rational Number Project" de Behr et al. (1983).

Para as tarefas 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, e 10 (Anexo B) e após uma análise dos protocolos dos alunos, optou-se essencialmente por cinco tipos de procedimentos.

-<u>Representação matemática</u> quando o aluno utiliza a escrita simbólica como forma de representar a noção e/ou usa um algoritmo usual para resolver uma tarefa. Nas tabelas que se seguirão as duas situações aparecem em separado.

- Representação gráfica quando o aluno faz um desenho, um esboço ou utiliza um já feito e disponível para representar uma ideia.

- Representação com materiais se o aluno utiliza material de concretização para a resolução da tarefa.

- Representação mental quando o aluno exprime a sua maneira de pensar verbalmente através de uma regra já aprendida, percebida ou então quando ele próprio inventa uma regra como modo de resolver a tarefa.

Neste último caso, os alunos não fazem registos. Pode haver uma situação que é imaginada, visualizada mentalmente, como acontece na tarefa 4, que envolve a noção de *ratio* em quantidades discretas, em que um aluno diz: "no primeiro caso tenho que dividir a colher em porções mais pequenas, no segundo caso é pôr metade de cada colher". Outro exemplo é o de um aluno que, na tarefa 10 relativa à noção de *ratio* em quantidades contínuas, refere o seguinte: "são iguais porque se simplificar 2/6 por 2 dá 1/3" ou ainda "há um bolo divide-se em três partes iguais ... há dois bolos para seis pessoas é como se houvesse um bolo a dividir por três e outro bolo a dividir pelos outros três".

- Estimativa se o aluno, recorrendo a material de concretização na resolução da tarefa, estima o resultado. Este procedimento verifica-se apenas na tarefa 6 (adição em contexto concreto).

Na tarefa 5 relativa ao subconstructo medida foi necessário introduzir novos critérios, uma vez que os anteriores nem sempre se ajustavam. A representação de fracções na recta numérica levantou grandes problemas aos alunos, particularmente pela dificuldade em identificar a unidade, tal como já se tinha constatado no teste de papel e lápis sobre o Conceito Parte-Todo. Assim, foi possível detectar para o subconstructo medida quatro tipos diferentes de estratégias que, a seguir, se definem:

- Divisão da unidade em partes quando o aluno reconhece a unidade e considera partes da unidade para a representação do número.

- Transformação da fracção em decimal quando o aluno transforma a fracção em numeral decimal e representa esta forma na recta numérica.

- Fixação num dos termos da fracção quando a aluno ignora o denominador ou o numerador e representa a fracção na recta numérica como se se tratasse de um número inteiro.

- Apoio numa figura geométrica quando o aluno recorre a um rectângulo que desenha, representa neste a parte correspondente à fracção e transpõe depois a situação para a recta numérica.

Durante a entrevista, se o aluno utilizava um dado procedimento e não conseguia chegar a uma resposta certa, o investigador sugeria que tentasse novamente, recorrendo a outras formas, nomeadamente ao uso de materiais que estavam disponíveis (ver *consigne*-Anexo B). Neste sentido, quando aparece a referência a duas ou mais estratégias isso significa que o(s) aluno(s) não foi capaz de resolver correctamente a tarefa, numa primeira tentativa. Note-se que, mesmo assim, nalguns casos o uso de outro tipo de procedimento não se traduziu numa resposta certa.

Refira-se ainda que, num caso ou noutro, o aluno espontaneamente recorria a outras estratégias quando verificava que a primeira não o conduzia a uma resposta razoável.

No Anexo E é possível observar exemplos de cada uma das referidas estratégias acima definidas.

4.3.2 Estratégias de Resolução na Tarefa Quociente em Contexto Concreto e em Contexto Abstracto

Os dados que se apresentam, para todas as tarefas, referem-se às ocorrências dos diferentes procedimentos e ainda ao número de respostas certas no grupo A, os alunos com bom desempenho e no grupo B, os alunos com mau desempenho.

Na Tabela 10 especificam-se, para a tarefa quociente, os diversos tipos de procedimentos adoptados pelos alunos de cada um dos grupos e as respectivas ocorrências. A leitura da tabela permite observar quais os que conduziram a respostas certas, em contexto concreto (tarefa 1) e abstracto (tarefa 7).

Tabela 10 - Frequência das Estratégias de Resolução na Tarefa Quociente, em Contexto Concreto e em Contexto Abstracto.

Estratégias	Contexto Concreto A C/E	Contexto Concreto B C/E	Contexto Abstracto A C/E	Contexto Abstracto B C/E
. Representação matemática (algoritmo - 1:3).	-	-	3/0	2/2
. Representação matemática (1/3).	8/0	3/0	5/0	1/0
. Representação matemática (1/3) e algoritmo.	-	-	4/1	6/3
. Representação matemática (1/3) e gráfica.	5/0	8/1	2/0	0/1
. Representação gráfica, matemática (1/3) e algoritmo (1:3).	2/0	2/1	-	-
Total	15/0	13/2	14/1	9/6

Legenda:
C - Resposta certa
E - Resposta errada
A- Alunos com bom desempenho
B- Alunos com mau desempenho

A análise da tabela anterior permite evidenciar que o único procedimento comum aos dois contextos e aos dois grupos é a representação matemática (1/3) e que na tarefa quociente qualquer um deles recorre ao procedimento do algoritmo em contexto abstracto, mas não em contexto concreto. Por outro lado, neste último contexto utilizam a representação gráfica (ainda que associada a outras representações) com grande frequência, o que não se verifica em contexto abstracto.

Convém realçar que nas situações de ajuda, em que os alunos utilizam outros procedimentos por sugestão da investigadora, no grupo B há seis situações que não se traduzem em respostas certas, enquanto no grupo A há apenas uma situação em que isso acontece.

4.3.3 Estratégias de Resolução na Tarefa Adição em Contexto Concreto e em Contexto Abstracto

Na Tabela 11 é possível observar os procedimentos que os alunos, dos grupos A e B adoptaram e ainda os que conduziram a respostas certas ou não, na tarefa adição, em contexto concreto e abstracto.

Convém recordar que na situação de contexto concreto (tarefa 6) se apresentavam ao aluno dois círculos em cartão, em que um estava dividido em quatro partes equitativas e três estavam pintadas e o outro em três partes equitativas e uma estava sombreada. Na situação de contexto abstracto (tarefa

9) apenas se pedia para realizar o cálculo da adição de duas fracções (3/4 +1/2).

Tabela 11 - Frequência das Estratégias de Resolução na Tarefa Adição, em Contexto Concreto e em Contexto Abstracto

Estratégias	Contexto Concreto		Contexto Abstracto	
	A C/E	B C/E	A C/E	B C/E
.Representação matemática (mínimo múltiplo comum).	7/1	3/2	12/0	7/2
.Adopção de uma regra "inventada".	-	-	0/1	0/5
.Adopção de uma regra "inventada" e representação matemática (mínimo múltiplo comum).	-	-	2/0	0/1
.Representação gráfica e estimativa.	-	0/1	-	-
.Estimativa.	-	2/0	-	-
.Representação matemática (mínimo múltiplo comum) e utilização de material manipulativo.	2/0	6/0	-	-
.Utilização de material manipulativo e estimativa.	5/0	1/0	-	-
Total	14/1	12/3	14/1	7/8

Legenda:
C - Resposta certa
E - Resposta errada

A- Alunos com bom desempenho
B- Alunos com mau desempenho

Pela análise da tabela pode observar-se que o único procedimento adoptado pelos alunos nos dois contextos é a representação matemática, recorrendo ao método do mínimo múltiplo comum para adicionar as fracções. Este procedimento é o que conduz a um maior número de respostas certas no grupo A, em qualquer dos contextos.

Por outro lado, verifica-se que os alunos não recorrem à representação gráfica ou à utilização de material manipulativo em contexto abstracto, o que não acontece na situação de contexto concreto. Nesta situação os alunos acabam por manipular o material - usado pela investigadora para apresentar a tarefa - como meio auxiliar no pensar sobre o processo de resolução e, por isso, estimam o resultado (nove alunos dos dois grupos A e B), não efectuando cálculos.

Note-se que a estimativa é um procedimento que aparece apenas nesta situação e surge associado a outros em sete situações.

É também interessante constatar que na situação de contexto abstracto há, como única alternativa ao método do mínimo múltiplo comum, a recorrência a uma regra "inventada" enunciada oralmente pelo aluno. Há seis sujeitos que persistem na regra, mesmo depois de terem sido questionados pelo investigador e, por isso, não conseguem obter uma resposta certa. Há três alunos que com esse tipo de ajuda, repensam o processo de resolução, mas destes só dois, do grupo A, acabam por dar uma boa resposta.

4.3.4 Estratégias de Resolução na Tarefa Equivalência em Contexto Concreto e em Contexto Abstracto

Na componente equivalência a estratégia representação matemática assume diversos aspectos. Os alunos utilizaram o cálculo do mínimo múltiplo comum, procedimento aprendido nas aulas e o mais usado em situações de ordenação e comparação de fracções. A transformação da fracção em numeral decimal foi outro procedimento usado, mas apenas por alunos do grupo A. Um outro procedimento, a forma equivalente (multiplicar por 3 o numerador e o denominador da fracção) foi pouco utilizado.

Na Tabela 12 podem observar-se os diferentes tipos de estratégias de solução usadas pelos dois grupos de alunos e as que conduziram a respostas certas ou erradas, na tarefa equivalência, em contexto concreto (tarefa 2) e em contexto abstracto (tarefa 8).

A análise da tabela evidencia que o procedimento conducente a um maior número de boas respostas, nos dois contextos, é a representação matemática, nas suas diversas formas e para os dois grupos de alunos.

Por outro lado, verifica-se que os alunos recorrem com frequência à "invenção de uma regra", embora este procedimento não conduza a boas respostas. Esta situação altera-se quando são ajudados e optam pela estratégia da representação matemática, com recurso ao método do mínimo múltiplo comum. Mas se preferem utilizar material concreto, o que só acontece no grupo B, então os alunos não conseguem obter respostas certas.

Tabela 12 - Frequência das Estratégias de Resolução na Tarefa Equivalência, em Contexto Concreto e em Contexto Abstracto.

Estratégias	Contexto Concreto		Contexto Abstracto	
	A	B	A	B
	C/E	C/E	C/E	C/E
.Representação matemática (mínimo múltiplo comum)	5/0	1/0	3/0	1/0
.Representação matemática (forma decimal)	2/0	-	4/0	-
.Representação matemática (forma equivalente)	-	1/0	2/0	-
.Adopção de uma regra "inventada".	0/2	0/4	0/1	0/4
.Representação matemática (mínimo múltiplo comum) e adopção de uma regra "inventada".	4/0	2/0	2/0	1/0
.Utilização de material concreto e adopção de uma regra "inventada".	-	0/1	-	0/3
. Representação gráfica e adopção de uma regra "inventada".	2/0	2/4	1/2	3/3
Total	13/2	6/9	12/3	5/10

Legenda:
C - Resposta certa
E - Resposta errada
A- Alunos com bom desempenho
B- Alunos com mau desempenho

Quando os alunos modificam o procedimento invenção de uma regra e usam como alternativa a representação gráfica, a situação torna-se nalguns casos (oito situações para alunos dos dois grupos e nos dois contextos) facilitadora da resolução.

Pode ainda constatar-se que os alunos do grupo A recorrem mais ao procedimento da representação matemática, nas diversas formas, do que os alunos do grupo B que, por sua vez, preferem a invenção de um regra como meio de resolver a situação, em qualquer contexto.

4.3.5 Estratégias de Resolução na Tarefa Quociente com Fracções Arquimedianas e Não-Arquimedianas

Nas tarefas relativas ao subconstructo quociente em contexto concreto (tarefas 1 e 3) foi possível analisar as situações em que a fracção envolvida é arquimediana (o numerador é a unidade - 1/3) e aquelas em que a fracção é não arquimediana (o numerador é diferente de 1 - 3/4). Assim, na Tabela 13 apresentam-se os procedimentos que os alunos utilizaram, bem como os que conduziram a respostas certas ou erradas.

Tabela 13 - Frequência das Estratégias de Resolução na Tarefa Quociente em Contexto Concreto, para as fracções 1/3 e 3/4.

Estratégias	Fracção 1/3		Fracção 3/4	
	A	B	A	B
	C/E	C/E	C/E	C/E
. Representação matemática (1:3=0,3(3) ou 3/4=0,75).	-	-	5/0	3/2
. Representação matemática (1/3 ou 3/4).	8/0	3/0	4/0	2/0
. Representação gráfica.	-	-	-	1/0
. Utilização de material concreto.	-	-	1/0	2/0
. Representação gráfica e matemática (1:3=0,3(3) ou 3/4=0,75).	5/0	8/1	3/2	0/5
. Representação gráfica e matemática (1:3=0,3(3) ou 3/4=0,75 e 1/3 ou 3/4).	2/0	2/1	-	-
Total	15/0	13/2	13/2	8/7

Legenda:
C - Resposta certa
E - Resposta errada

A- Alunos com bom desempenho
B- Alunos com mau desempenho

Quando se comparam os procedimentos utilizados na tarefa quociente, envolvendo a fracção 1/3 ou 3/4, verifica-se que neste último caso os alunos preferem a representação matemática na forma decimal, embora dois alunos do grupo B não tenham conseguido obter resposta correcta. Este procedimento não foi escolhido por nenhum sujeito na primeira situação.

Para alguns alunos tornou-se natural e evidente que quando se dividia uma pizza por três pessoas (tarefa 1), cada pessoa comia 1/3 da pizza, não parecendo necessário recorrer ao algoritmo. Este quando surge está sempre associado a outros procedimentos em qualquer um dos grupos.

Na situação 3/4 (tarefa 3), a utilização de material manipulável, só por si, levou os alunos a dar respostas certas. Note-se que, neste caso, recorriam à linguagem oral, dizendo "três quartos" como resposta para a questão.

A estratégia da representação gráfica, adoptada na situação 1/3 e 3/4 pelos alunos dos dois grupos, nem sempre se traduziu em boas respostas. Há nove situações, principalmente com alunos do grupo B, em que aquele procedimento, usado com outras formas de representação, não foi facilitador na resolução da tarefa. Quando se analisam os procedimentos dos alunos verifica-se que uma das dificuldades em resolver esta situação releva do facto deles não considerarem a divisão equitativa das figuras geométricas que utilizam para representar as fracções.

Contudo, também aqui se constata que o questionamento feito pela experimentadora no sentido de ajudar não foi suficiente e que os alunos manifestaram pouca flexibilidade na passagem de um modo de representação a outro.

4.3.6 Estratégias de Resolução na Tarefa *Ratio* com Quantidades Contínuas e com Quantidades Discretas

Para o subconstructo *ratio* utilizou-se uma situação que envolvia quantidades contínuas (tarefa 10) e outra que envolvia quantidades discretas (tarefa 4).

Na Tabela 14 apresentam-se as diversas estratégias utilizadas pelos alunos dos dois grupos e respectivas ocorrências, nas situações referidas e ainda as que conduziram a respostas certas ou erradas.

Como se pode observar na tabela, a estratégia mental, isolada ou associada a outras, é adoptada nas duas situações de *ratio*, a que envolve quantidades contínuas e a que envolve quantidades discretas, embora nem sempre conduzindo a respostas certas. Para os alunos do grupo B este procedimento não se revelou uma boa estratégia, porque dos catorze que a utilizaram isoladamente só dois conseguiram obter uma resposta certa.

Tabela 14 - Frequência das Estratégias de Resolução na Tarefa *Ratio* para Quantidades Contínuas e para Quantidades Discretas

Estratégias	Quantidades contínuas		Quantidades discretas	
	A	B	A	B
	C/E	C/E	C/E	C/E
. Representação matemática (0,(3) e 0,(3) ou 1/3 / 0,(3) e 3/6 / 0,5).	-	0/2	2/0	-
. Representação matemática (*ratios* equivalentes).	2/0	-	-	-
. Representação mental.	5/2	0/5	1/3	2/7
. Representação matemática (forma decimal) e mental.	-	0/2	3/0	1/0
. Representação gráfica e mental.	5/1	5/0	4/2	0/5
. Representação matemática, gráfica e mental.	-	1/0	-	-
Total	12/3	6/9	10/5	3/12

Legenda:
C - Resposta certa
E - Resposta errada

A- Alunos com bom desempenho
B- Alunos com mau desempenho

A estratégia da representação matemática, quer quando os alunos transformam o *ratio* em numeral decimal, quer quando triplicam, conduz sempre a boas respostas para os alunos do grupo A, o que não acontece com os do grupo B quando estes a preferem.

É ainda de salientar que a representação gráfica, sempre associada a outras, foi facilitadora da resolução da tarefa para quantidades contínuas mas não na situação que envolvia quantidades discretas, em qualquer dos grupos considerados.

4.3.7 Estratégias de Resolução na Tarefa Medida com Fracções Arquimedianas e Não Arquimedianas

No subconstructo medida foram apresentadas situações que envolviam a fracção 3/4 e a fracção 1/2.

Na Tabela 15 apresentam-se as diversas estratégias adoptadas pelos alunos dos dois grupos e que conduziram à resposta certa ou errada.

Tabela 15 - Frequência das Estratégias de Resolução na Tarefa Medida para as Fracções 3/4 e 1/2

Estratégias	Fracção 3/4		Fracção 1/2	
	A	B	A	B
	C/E	C/E	C/E	C/E
.Divisão da unidade em partes.	5/0	8/0	4/0	4/0
.Apoio numa figura geométrica (rectângulo).	2/0	-	-	-
.Fixação no numerador da fracção.	-	0/5	-	0/4
.Transformação da fracção em decimal.	6/0	-	6/0	1/1
.Fixação no numerador da fracção e apoio numa figura.	1/0	-	-	-
.Fixação no numerador da fracção e divisão da unidade em partes.	0/1	2/0	1/1	1/1
.Fixação noutra unidade e divisão da unidade em partes.	-	-	3/0	2/1
Total	14/1	10/5	14/1	8/7

Legenda:
C - Resposta certa
E - Resposta errada
A- Alunos com bom desempenho
B- Alunos com mau desempenho

A estratégia da divisão da unidade em partes foi preferencialmente usada pelos alunos dos dois grupos e foi também a que se traduziu no maior número de respostas certas. Além disso, os alunos recorreram a ela como alternativa a outras estratégias, depois do questionamento da experimentadora.

Uma estratégia que conduziu a boas respostas foi a transformação da fracção em numeral decimal e posterior representação na recta numérica, estratégia adoptada preferencialmente por alunos do grupo A.

Nalguns casos, os alunos do grupo B fixaram-se no numerador da fracção e "esqueceram" o denominador, tendo dificuldade em pensar em alternativas, mesmo depois de questionados, quer na situação que envolvia a fracção 3/4, quer na que envolvia 1/2. Nesta situação houve três alunos do grupo A e três do B que não foram capazes de reconhecer a unidade, assumindo outro valor para a unidade, mas cinco deles depois de ajudados conseguem a resposta correcta.

É interessante assinalar o caso de três alunos do grupo A que começaram por representar 3/4 num rectângulo, que desenham em papel quadriculado e depois fazem a transferência para a recta numérica.

4.3.8 Síntese dos Resultados Traduzidos em Estratégias de Resolução

Com o estudo das estratégias adoptadas pelos alunos na resolução das tarefas pretendia-se responder às questões 4 e 5 do estudo.

É possível verificar que a forma como a tarefa é apresentada, os valores numéricos envolvidos e o facto das grandezas serem contínuas ou discretas, condiciona os procedimentos que os alunos utilizam. Em situações de contexto concreto os alunos recorrem ao uso de materiais, a representações gráficas e estimam as respostas com frequência, o que não acontece nas situações de contexto abstracto. Nestas situações observa-se uma menor diversidade nas estratégias utilizadas.

Os alunos do grupo A recorrem com mais frequência a procedimentos formais na resolução das tarefas do que os do grupo B.

É interessante notar que as ajudas (sugestão no uso de materiais, indicações de aquiescência e de questionamento) despoletaram nalguns alunos novas pesquisas na procura de soluções e, nesse sentido, foram facilitadoras, mas para outros alunos isso não se verificou.

4. 4 CONCEPÇÕES ERRÓNEAS NA APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL

Após a definição das concepções erróneas evidenciadas, apresenta-se uma sistematização das mesmas, tendo em conta as representações usadas pelos alunos. De seguida referem-se os tipos de concepções manifestadas no conjunto das tarefas, pretendendo-se, deste modo, responder à questão 6 do estudo, ou seja, pesquisar dificuldades conceptuais na compreensão do número racional.

4.4.1 Definição das Concepções Erróneas

Numa primeira análise das concepções erróneas, manifestadas ao longo da resolução das diversas tarefas, verificou-se que era necessário proceder a uma definição mais abrangente que englobasse o conjunto das actividades. Esta necessidade surgiu porque se constatou que algumas das concepções erróneas estavam presentes em diversas tarefas. No *Rational Number Project*, de Behr et al. (1983), em que também se procedeu a uma análise sistemática dos erros, esta foi feita para cada uma das tarefas. No nosso estudo, as dificuldades reveladas pelos alunos estão muito ligadas às representações que utilizam para resolver a tarefa.

Neste sentido, pareceu mais claro, proceder à identificação de tipos de concepções com base nas representações escolhidas pelos alunos. Assim, em função do tipo de estratégia adoptada, é possível sistematizar concepções que derivam do uso da representação gráfica, da representação simbólica e do uso de modelos manipulativos.

Concepção do tipo I está associada ao uso da representação gráfica, isto é, quando o aluno usa uma região circular e/ou rectangular como modo de exprimir ideias acerca de fracções. Neste caso o erro resulta da dificuldade em dividir equitativamente a região e/ou ignorar esse aspecto.

Incluiram-se nesta categoria os desenhos que os alunos faziam, quando pretendiam traduzir situações problemáticas, mas não respeitam nessas figuras a divisão equitativa, mesmo depois do questionamento da experimentadora (Anexo E).

Consideraram-se ainda os procedimentos dos alunos que na tarefa medida (envolvendo a fracção 3/4 ou 1/2) manifestam dificuldade em identificar a unidade (Anexo E).

Concepção do tipo II está associada ao uso da representação simbólica, isto é, quando o aluno utiliza símbolos escritos ou falados para exprimir as suas ideias sobre fracções. Neste agrupamento considerou-se:

- concepção do tipo IIa inclui as situações de desconhecimento da terminologia adequada e de incompreensão do valor de posição nos números decimais;

Exemplo na tarefa 1:

quando 3/2 é usado para representar 2/3
quando 3/2 é lido como 3 unidades

Exemplo na tarefa 7:

quando 1/3 é representado por 33

- concepção do tipo IIb resulta do facto de ser feita uma transposição, para os números racionais, de regras aceites para os números inteiros ou ainda quando o aluno inventa regras para resolver as situações apresentadas;

Exemplo na tarefa 2:

"quanto mais pequeno é o denominador maior é a porção"

"dois terços divide em menos partes, então tem mais chocolate"
"oito é maior que dois"
"oito doze avos está dividido em mais partes e por isso é mais quantidade"
"2/3 é maior porque 8/12 está dividido em mais partes"

Exemplo na tarefa 6:

3/4 + 1/3 = 4/7

Exemplo na tarefa 8:

"8/12 é maior que 2/3 porque 8 é maior que 2 e 12 é maior que 3"

- <u>concepção do tipo IIc</u> inclui os procedimentos dos alunos que na tarefa medida ignoram o denominador e consideram apenas o numerador que representam na recta numérica como se fosse um número inteiro, lêem o número fraccionário como se fosse um número inteiro.

<u>Concepção do tipo III</u> está associada ao uso de modelos manipulativos, isto é, quando o aluno usa materiais concretos, disponíveis e/ou construídos por ele. A dificuldade em transferir uma escrita simbólica para o modelo apresentado e vice-versa foi incluída neste tipo de erro.

<u>Concepção do tipo IV</u> associada à estratégia mental, nas actividades 4 e 10 (*ratio*). Corresponde às respostas que não têm em conta a relação invariante entre pares relativos de quantidades, isto é, o aluno não tem o sentido da co-variação.

Exemplo na tarefa 4:

"o segundo fica mais concentrado porque tem três de pó"
"o segundo porque leva mais quantidade de pó"
"não é o mesmo pó, a quantidade é diferente nas duas situações"

Exemplo na tarefa 10:

"no segundo grupo há mais quantidade de bolo ...então come mais ..."

4.4.2 Concepções Erróneas nas Componentes Quociente, Equivalência e Adição

Na Tabela 16 explicitam-se as concepções erróneas dos alunos dos dois grupos e as respectivas ocorrências, nas tarefas (Anexo B) relativas às componentes quociente (tarefa 1, 3 e 7), equivalência (tarefas 2 e 8) e adição (tarefas 6 e 9).

Tabela 16 - Frequência de Concepções Erróneas do Tipo I, II e III nas Componentes Quociente, Equivalência e Adição nos grupos A e B

Tarefas	Tipo de Concepções	Grupo A F	Grupo B F
1	I	-	2
	IIa/ IIb	1	2
2	I	-	3
	IIa/IIb	6	11
3	I	1	5
	IIa/IIb	2	6
	III	-	1
6	I	-	6
	IIa/IIb	1	5
7	IIa/IIb	5	11
8	I	1	2
	IIa/IIb	5	12
9	IIa/IIb	2	8

Como se esperava, são os alunos do grupo B que revelam maior número de dificuldades em lidar com os conceitos analisados, o que se pode observar através da tabela.

O primeiro tipo de concepções erróneas, relacionadas com o facto dos alunos não considerarem uma divisão equitativa nas figuras geométricas que utilizam para representar a situação, surge em todas as tarefas para os alunos do grupo B, o que não acontece com os do grupo A (apenas um aluno, na tarefa 8, aceitou uma divisão não equitativa).

Nas Concepções do tipo II consideram-se as que constituem verdadeiras dificuldades conceptuais (IIb e IIc) e as que relevam da não aquisição da terminologia própria (IIa), mas não nos parece que funcionem como obstáculos à aprendizagem. Este tipo de concepções ocorrem nos dois grupos de alunos, embora em maior número nos alunos do grupo B.

É nas tarefas 2 e 8, relativas à equivalência, que ocorrem com maior frequência concepções que resultam da transposição de regras dos números inteiros para os números racionais. Nas tarefas 6 e 9, referentes à adição, ocorre o mesmo tipo de dificuldades, embora em menor quantidade.

4.4.3 Concepções Erróneas na Componente Medida

As tarefas que envolvem a componente medida variam na fracção utilizada. Assim, numa das tarefas a fracção envolvida é 3/4 (tarefa 5a) e na outra é 1/2 (tarefa 5b).

Na Tabela 17 especificam-se os tipos de concepções e as respectivas ocorrências para a tarefa 5a e 5b, relativa ao subconstructo medida, para os grupos A e B.

Tabela 17 - Frequência de Concepções Erróneas do Tipo I e IIc na Componente Medida nos grupos A e B

Tarefas	Tipo de Concepções	Grupo A F	Grupo B F
5a	I	-	-
	IIc	2	5
5b	I	3	5
	IIc	2	4

É possível observar que nos dois grupos de alunos ocorrem concepções do tipo IIc, isto é, os alunos não consideram a fracção (3/4 ou 1/2) como representando um número e ignoram o denominador, marcando, assim, na recta numérica pontos correspondentes ao numerador, respectivamente o número 3 e o 1. Verifica-se também que surgem nas duas tarefas, na 5a e na 5b.

Por outro lado, surgem obstáculos resultantes do não reconhecimento da unidade (concepção do tipo I), na tarefa 5b, levando os alunos a assumir outra referência e, portanto, dificultando a representação na recta numérica. A recta numérica foi representada em papel quadriculado e estavam marcados dois pontos, correspondentes a 1 e a 2 e os alunos tinham que representar 1/2 do percurso que terminava no ponto correspondente a 1. Provavelmente, para alguns alunos, esta informação não foi bem interpretada.

É interessante observar que na tarefa 5a, envolvendo a representação de 3/4, os alunos de qualquer dos grupos não tiveram dificuldades em reconhecer a unidade de referência.

4.4.4 Concepções Erróneas na Componente *Ratio*

No subconstructo *ratio* utilizaram-se duas situações, uma que envolvia quantidades discretas (tarefa 4) e outra que envolvia quantidades contínuas (tarefa 10).

Na Tabela 18 mostra-se o tipo de concepções erróneas evidenciadas e as respectivas ocorrências nas tarefas consideradas, para o grupo A e o grupo B.

Tabela 18 - Frequência de Concepções Erróneas do Tipo I e IV na Componente *Ratio* nos grupos A e B

Tarefas	Tipo de Concepções	Grupo A F	Grupo B F
4	I	2	4
	IV	5	12
10	I	1	3
	IIa	-	2
	IV	1	1

Na tarefa que envolve quantidades discretas ocorre o maior número de incompreensões e, em particular, do tipo IV. Neste caso, o aluno não tem em conta a relação invariante entre pares de quantidades, isto é, não tem o sentido da co-variação o que corresponde, segundo Noelting (1980a, 1980b) ao raciocínio qualitativo. Observa-se ainda que são os alunos do grupo B que apresentam um maior número desse tipo de concepções.

As concepções do tipo I reenviam para a dificuldade em utilizar a representação gráfica para traduzir a situação, quer na tarefa 4, quer na 10. Na realidade, os alunos recorrem a este tipo de representação como forma de resolver a tarefa sempre associado a outro tipo de estratégia, em particular, à mental.

As concepções do tipo IIa, que estão ligadas ao uso incorrecto da terminologia aparecem apenas em dois casos.

4.4.5 Síntese dos Resultados Traduzidos em Concepções Erróneas

Pela análise dos protocolos foi possível proceder a uma sistematização das concepções que os alunos manifestaram na resolução das tarefas. Estas concepções reenviam para dificuldades de diversos tipos que se podem resumir do seguinte modo:

- não relevância da divisão equitativa das figuras geométricas utilizadas para representar as fracções, quando os alunos usam a representação gráfica como estratégia;
- não distinção entre a noção parte-todo e parte-parte;
- dificuldade em reconhecer a unidade de referência, quando os alunos usam a representação na recta graduada;
- dificuldade em transpôr um modo de representação para outro, por exemplo, da representação matemática para a gráfica ou vice-versa;
- transposição de concepções aceites para os números inteiros, para os números racionais;
- dificuldade em assumir a fracção como um número e, desse modo, considerar o numerador e o denominador como dois números inteiros;
- dificuldade em considerar o sentido da co-variação, nas tarefas que envolvem o *ratio*.

Resta acrescentar que, como decorre dos resultados obtidos em termos de desempenho, são os alunos do grupo B que evidenciam maior número de incompreensões em qualquer uma das tarefas.

5.5 RELAÇÃO DOS SUJEITOS COM A MATEMÁTICA

Como já se referiu, não houve, de início, a intenção de fazer um estudo correlacional entre desempenho de alunos sobre o conceito de número racional e as suas atitudes sobre a matemática. Contudo, pareceu pertinente conhecer melhor as ideias e a relação que os alunos têm com a matemática. Para isso, após a entrevista relativa aos saberes matemáticos, colocaram-se três questões a cada um dos alunos.

Relativamente à primeira questão em que se pretendia saber, no conjunto das disciplinas, em que nível de preferência se situava a Matemática, verifica-se que a maioria dos alunos não a coloca em primeiro lugar. Contudo, não há nenhum que "não goste nada", a maioria "gosta assim-assim" e apenas seis indicam essa disciplina como a preferida. Dois alunos referem que não percebem nada de Matemática e, por isso, não gostam.

Na segunda questão procurava-se conhecer as ideia dos alunos sobre a importância da Matemática. Todos consideram que a Matemática é uma disciplina útil na vida quotidiana, tendo assinalado uma ou mais situações reais em que se aplicam conhecimentos matemáticos. De facto, as respostas traduzem as próprias vivências dos alunos e, por outro lado, reflectem um pouco as suas expectativas quanto ao futuro profissional. Assim, há um grupo de alunos que liga a importância da Matemática a situações do seu quotidiano e defende que a Matemática "serve para fazer contas", "para comprar coisas", "para ver o preço das coisas", "para quando formos às lojas não nos enganarem", "para achar as percentagens", "na construção das casas". Um outro grupo, pensa mais em termos do seu futuro profissional e, então, o(s) aluno(s) refere que vai precisar de Matemática porque quer "tirar informática", "ser vendedor", "trabalhar numa caixa registadora", "ser engenheiro", "ser desenhador", "trabalhar num banco".

Com a terceira questão desejava-se saber que percepções tinham os alunos sobre o que é necessário para se ser "bom aluno" em Matemática. Dum modo geral, põem o enfoque no esforço do aluno, nomeadamente quando dizem que "estar atento nas aulas" e "estudar" são as melhores maneiras de se tornarem "bons alunos". Estas respostas surgem como as mais defendidas, sendo mencionadas por quase todos os alunos. "Fazer exercícios" e "fazer os trabalhos de casa" aparecem como o segundo grupo de respostas mais referidas por eles. Muito menos indicadas são as respostas "compreender" (5 alunos), "tirar as dúvidas quando não se entende" (3 alunos), "tentar perceber o que a stora está a explicar" (2 alunos), "gostar" (1 aluno) e "saber as regras" (1 aluno).

Interessantes são as respostas que em baixo se transcrevem, porque nos parecem reflectir uma percepção mais clara e consciente das condições que podem levar um aluno a ter melhor desempenho em Matemática.

> "Conhecer bem o professor, ter uma boa relação com o professor, ter dificuldades e o professor ajudar, uma vez por outra estudar e maior atenção nas aulas ". (Resposta de um aluno com nível 5).
>
> "Rever o que se deu nas aulas, fazer coisas parecidas com o que se fez na aulas, saber responder, saber a tabuada, saber trabalhar com a calculadora, ver os

livros, quando tiver dificuldades praticar um pouco, estar com atenção nas aulas". (Resposta de um aluno com nível 4).

CAPÍTULO 5

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se um resumo dos resultados obtidos relativamente às questões de estudo que conduziram a investigação. Apontam-se conclusões, tecem-se comentários, adiantam-se interpretações tendo presente estudos realizados anteriormente. Sugerem-se implicações que as conclusões poderão ter, quer a nível psicológico, quer a nível pedagógico, particularmente na didáctica da disciplina de Matemática. Por fim, equacionam-se algumas questões que se considera serem susceptíveis de esclarecimento em investigações futuras.

5.1 SÍNTESE DOS RESULTADOS

Apresenta-se de seguida um resumo dos resultados obtidos de acordo com as questões que orientaram a investigação. Tal como já se referiu na apresentação dos resultados, para responder às três primeiras questões usaram-se dados quantitativos traduzidos em número de respostas certas que foram obtidas em cada uma das dez tarefas. Na análise das respostas dos sujeitos (divididos em dois grupos, o A - alunos com bom desempenho e o B - alunos com mau desempenho), consideraram-se as estratégias adoptadas e as incompreensões surgidas, o que permitiu responder às restantes questões do estudo.

5.1.1 Desempenho nas Componentes do Número Racional

A primeira questão referia-se ao desempenho dos sujeitos, em termos de percentagem de respostas certas, nas tarefas que envolviam as diversas interpretações do número racional estudadas.

Os resultados permitiram detectar diferentes graus de facilidade na realização das referidas tarefas. Assim, das cinco componentes, a relativa ao quociente revela-se como a mais fácil para o grupo B (66.67% de respostas certas) e para o grupo A (93.33%), grupo que apresenta também valores elevados na componente medida (96.50%) e adição (93.33%). A componente relativa ao *ratio* apresenta os valores mais baixos para os dois grupos A e B (respectivamente 73.34% e 30.00% de respostas certas). No grupo dos alunos com mau desempenho essas diferenças são mais notórias que no grupo dos alunos com bom desempenho.

Assinale-se ainda que o grupo B apresenta uma percentagem média de respostas certas nas tarefas que envolvem a equivalência de fracções notoriamente mais baixa que o grupo A (respectivamente 33.33% e 83.33%).

Os resultados obtidos nas tarefas que envolvem o subconstructo medida e a operação adição são próximos, em cada um dos grupos considerados.

A segunda questão procurava saber se o contexto concreto é facilitador da resolução da tarefa e, em particular, se os alunos com mau desempenho obtêm melhores resultados nas tarefas concretas.

Quando se comparam os resultados obtidos em questões envolvendo contextos concretos e contextos abstractos, verifica-se que nos dois grupos A e B, os resultados das tarefas em contexto concreto, qualquer que seja a situção considerada, são superiores aos das tarefas em contexto abstracto mas é particularmente no grupo B (alunos com mau desempenho) que o contexto concreto se revela facilitador na resolução das tarefas e em especial na tarefa adição.

A terceira questão dizia respeito ao desempenho nas diversas tarefas agrupadas por componente do número racional aqui estudada, e de acordo com a idade. Nesse sentido, pretendia-se verificar se os alunos com nível etário mais elevado realizam melhor, qualquer que seja a tarefa. A maior quantidade de discrepâncias ocorre nos alunos de 11 a 12 anos, ou seja, é neste grupo que os resultados são mais heterógeneos, a diferença entre o valor mínimo (*ratio* - 29.93%), no conjunto dos cinco aspectos considerados, e o valor máximo (quociente - 80.37%) é a mais elevada. Por outro lado, os alunos com idades compreendidas entre os 12 e os 14 anos de idade são os que apresentam resultados que se podem considerar mais homogéneos, isto é, há uma menor oscilação entre os valores máximo e mínimo. Realce-se, por último, que enquanto os constructos quociente e medida não foram discriminatórios, em termos de idade, o mesmo não aconteceu com as restantes componentes, em particular, com o conceito *ratio*.

5.1.2 Estratégias de Resolução Usadas nas Tarefas

A quarta questão focava o tipo de estratégias usadas na resolução das tarefas e, desse modo, procurava-se saber se a forma de apresentação da tarefa (contexto concreto ou contexto abstracto nas tarefas quociente, adição e equivalência) constrangia o procedimento a utilizar pelos alunos. Considerou-se também nessa análise um outro aspecto nas tarefas quociente (envolvendo fracção arquimediana - quando o numerador é a unidade - e fracção não arquimediana) e ainda nas tarefas relativas ao conceito *ratio* para quantidades contínuas ou quantidades discretas.

No que diz respeito aos contextos, nas tarefas quociente o único procedimento comum aos dois é a representação matemática (1/3), nos dois grupos A e B. Qualquer um destes recorre ao procedimento algoritmo em contexto abstracto, mas não em contexto concreto. Neste contexto os grupos utilizam a representação gráfica (ainda que associada a outras representações) com grande frequência. Esta representação quase não é utilizada nas tarefas em contexto abstracto, que apresentam resultados mais baixos que as de contexto concreto.

Nas tarefas adição o único procedimento adoptado pelos alunos nos dois contextos é a representação matemática, recorrendo ao método do mínimo múltiplo comum para adicionar as fracções. Este procedimento é o que conduz a um maior número de respostas certas no grupo A, em qualquer dos contextos.

Por outro lado, verifica-se que os alunos não recorrem à representação gráfica ou à utilização de material manipulativo, nem estimam em contexto abstracto, o que não acontece na situação de contexto concreto. Nesta situação os alunos, dum modo geral, manipulam o material disponibilizado, como suporte para pensar no processo de resolução e estimam o resultado (nove alunos dos dois grupos A e B), não efectuando cálculos. Na situação de contexto abstracto há, como única alternativa ao método do mínimo múltiplo comum, a recorrência a uma regra "inventada" que é enunciada oralmente pelo aluno.

Há seis sujeitos que persistem na regra, mesmo depois de questionados pela investigadora, e não conseguem obter uma resposta certa.

Há três alunos que com ajuda repensam o processo de resolução, mas apenas dois, do grupo A, acabam por responder correctamente.

Nas tarefas equivalência não há uma estratégia mais adoptada num contexto do que noutro. Por exemplo, o procedimento representação matemática, nas diversas formas (mínimo múltiplo comum, decimal ou equivalente) é o mais usado nos dois contextos, seguido da "invenção" de uma regra.

Relativamente às tarefas em contexto concreto que envolvem fracções arquimedianas (1/3) ou não-arquimedianas (3/4) verifica-se que os alunos só no segundo caso é que recorrem aos procedimentos representação matemática na forma decimal e à utilização de material concreto. A estratégia representação matemática, na forma de fracção, e a representação gráfica foram mais usadas na tarefa para a fracção 1/3.

No que concerne às tarefas *ratio* para quantidades contínuas e discretas a estratégia mental isolada ou associada a outras, bem como a representação gráfica sempre associada a outras foram as mais adoptadas em qualquer uma das situações.

Na quinta questão procurou-se averiguar se os alunos com bom desempenho utilizavam preferencialmente alguma estratégia de resolução, nomeadamente a representação simbólica, relativamente aos alunos com mau desempenho.

Nas tarefas relativas ao quociente o grupo A usou principalmente o procedimento representação matemática na forma de fracção ou decimal (conduzindo sempre a respostas certas) enquanto o grupo B preferiu esta forma de representação, mas a maior parte das vezes associada à representação gráfica (nem sempre conduzindo a respostas certas).

Nas tarefas relativas à operação adição o procedimento representação matemática com recorrência ao método do mínimo múltiplo comum para adicionar as fracções foi o mais usado pelos alunos do grupo A e conduziu quase sempre a respostas correctas. Os alunos do grupo B também recorrem preferencialmente àquele procedimento mas nem sempre obtêm respostas certas. Em segundo lugar, a estratégia mais usada foi a utilização de material manipulativo associada a outras, tendo conduzido sempre a boas respostas nos dois grupos.

Nas tarefas que envolvem a noção de equivalência os alunos do grupo A usam mais uma vez a representação matemática, na forma decimal, fracção equivalente ou ainda calculando o mínimo múltiplo comum (conduz sempre a respostas certas), ao contrário dos alunos do grupo B que adoptam uma regra "inventada" (ver Anexo E) só ou associada a outras, como estratégia de resolução da tarefa (não conduzindo a maior parte das vezes a respostas certas).

Nas tarefas relativas ao conceito *ratio*, para quantidades contínuas e quantidades discretas, os alunos que conseguem respostas certas usam preferencialmente os procedimentos de calcular o dobro ou determinar uma "fracção equivalente".

Na tarefa relativa ao subconstructo medida os alunos dos dois grupos começam por se referenciar à unidade que depois dividem em partes para de seguida representarem na recta as fracções dadas (1/2 e 3/4). Este foi o procedimento mais utilizado. Há , no entanto, outros que diferenciam os dois grupos de alunos. Assim, os do grupo A também recorrem com alguma frequência à transformação da fracção em decimal, o que só acontece com dois alunos do grupo B. Estes fixam-se com frequência no numerador da fracção, isolam-no e procuram representá-lo na recta numérica, isto é, não encaram a fracção como um número.

Finalmente, é interessante notar que dois alunos do grupo A tendo, em qualquer tarefa, recorrido preferencialmente ao método formal de resolução e obtido invariavelmente respostas certas não consideraram relevante utilizar o material concreto como forma de ajuda na resolução, justificando que estavam habituados ao procedimento algorítmico.

5.1.3 Concepções Erróneas na Aprendizagem do Conceito de Número Racional

A sétima questão procurava averiguar das concepções erróneas que os alunos têm sobre o conceito de número racional, atendendo às diversas componentes estudadas. Mais especificamente, pretendia-se saber quais as dificuldades conceptuais que se colocam à sua aprendizagem.

Após a análise das respostas foi possível categorizar incompreensões e verificar que as dificuldades dos alunos relevam essencialmente de:

- não aceitação como fundamental, na representação gráfica, a divisão equitativa das figuras geométricas, como o círculo e o rectângulo, quando as utilizam para representar fracções;

- não transposição de modos de representação, principalmente quando usam material manipulativo e têm de representar as fracções e/ou as operações na forma escrita simbólica;

- não reconhecimento da unidade, particularmente quando usam a representação na recta numérica;

- desconhecimento da linguagem apropriada, principalmente quando usam a representação simbólica;

- incompreensão do valor de posição nos números "decimais";

- consideração para o conjunto dos números racionais de regras já aprendidas ou "inventadas" no conjunto dos números inteiros, anteriormente estudado, facto que se manifesta quando as aplicam na resolução de situações problema;

- não assunção da fracção como um número, uma quantidade e nesse sentido, isolamento do numerador e/ou do denominador;

- não ter em conta a relação invariante entre pares de quantidades, isto é, não ter o sentido da co-variação, na resolução de tarefas que envolvem o conceito de *ratio*.

Como é evidente, nesta sistematização estão incluídos todos os tipos de concepções erróneas, mesmo os que não constituem verdadeiros obstáculos na aprendizagem dos números racionais.

5.2 INTERPRETAÇÕES DOS RESULTADOS

Nos comentários que se seguem optou-se por uma interpretação abrangente, tendo-se destacado o desempenho no teste sobre o Conceito Parte-Todo e nas tarefas que se referem às componentes estudadas. Evidenciam-se também as estratégias de resolução, tendo em conta os dois grupos de alunos, A e B (alunos com bom e com mau desempenho), os contextos envolventes das tarefas e, por fim, as dificuldades conceptuais assinaladas.

5.2.1 Desempenho no Teste "Conceito Parte Todo"

Todas as perguntas do teste se referiam ao subconstructo parte-todo (com situações parte-todo e todo-parte) envolvendo quantidades discretas e quantidades contínuas. Em relação a estas foram considerados os diversos modelos (regiões geométricas, recta numérica).

Os resultados revelam que os alunos têm mais dificuldades com os itens relativos a quantidades discretas do que com os que se referem a quantidades contínuas. Nestas o modelo da recta numérica é o que conduz a uma menor percentagem de respostas certas.

Piaget, Inhelder e Szeminska (1973) verificaram que as crianças resolviam melhor as tarefas que envolviam casos discretos do que as de casos contínuos. Nas tarefas era pedido às crianças que dividissem uma dada quantidade equitativa e completamente por um certo número de animais. Uma possível explicação, adiantada pelos autores, era que no primeiro caso as tarefas podiam ser resolvidas por uma simples partição, enquanto no segundo caso era exigido um esquema antecipatório bem desenvolvido. As tarefas que envolvem quantidades discretas podem ser resolvidas sem tratar o conjunto como um todo e sem necessidade de antecipar a solução.

Novillis (1976), no seu estudo de desenvolvimento hierárquico do conceito de fracção - *A Hierarchy of Selected Subconcepts of the Fraction*

Concept (HSSFC), com crianças de 10 a 12 anos de idade, verificou que para os dois casos o grau de dificuldade era aproximadamente igual.

Payne (1976), que trabalhou com crianças mais novas do que Novillis, constatou que as tarefas com quantidades discretas se revelavam mais difíceis do que as que envolviam áreas ou rectas numéricas. Os nossos resultados estão em consonância com os de Payne, isto é, para os itens de quantidades discretas obtiveram-se 52.86% de respostas certas e para os de quantidades contínuas 62.11%. No entanto, deve notar-se que as situações em que o ponto de partida se refere a uma porção de objectos de uma colecção e o aluno tem de descobrir a totalidade é mais difícil do que a contrária em que se parte do todo para obter uma certa quantidade (ver Anexo A).

No que diz respeito a quantidades contínuas, resultados como os da primeira *Assessment Performance Unit* (APU), indicam que, para um item em que se apresentavam quatro pequenos quadrados, três pintados de amarelo e o quarto de vermelho e se pedia "que fracção destes quadrados são vermelhos?" 64% de crianças com 11 anos de idade responderam correctamente, mas muitas das restantes responderam "um terço", não considerando o conjunto como um todo. Esta percentagem é semelhante à obtida noutra questão, em que se usou o modelo área, sugerindo que as afirmações de Novillis, sobre o grau de dificuldade do modelo quantidades discretas (conjunto) e do modelo quantidades contínuas (áreas), são provavelmente correctas.

Na questão seguinte: "Encontraram-se 5 ovos partidos numa caixa de 12. Que fracção de ovos se partiu?....

Que fracção de ovos não se partiu?........"

apresentada oralmente, Hart (1981) refere que 70% e 66% de crianças de 12 anos responderam correctamente, respectivamente para a primeira e para a segunda parte da pergunta, o que está muito próximo dos resultados anteriores.

Relativamente à representação da fracção como um sub-comprimento de uma unidade de comprimento - modelo recta numérica - poder-se-ia esperar que os resultados fossem semelhantes aos obtidos com o modelo da área, uma vez que há uma certa analogia quando a fracção representa uma sub-área de uma unidade área. No entanto, encontramos apenas 37,94% de respostas certas, sendo maior a dificuldade quando a recta é graduada para além de 1.

Em 1976 num artigo de revisão sobre a investigação em fracções, Payne refere que o modelo recta numérica foi motivo de grandes dificuldades em várias experiências de ensino, com crianças de 8 a 12 anos de idade, o que é confirmado pelos estudos de Novillis (1976). De facto nas suas investigações realizadas com crianças de 10 a 12 anos de idade verifica que aquele modelo se revela significativamente mais difícil do que o modelo área e o modelo quantidade discreta (sub-conjunto de um conjunto discreto).

Essa dificuldade parece dever-se ao facto da representação da fracção ser feita por meio de um ponto. Com este modelo é mais enfatizado o aspecto número, enquanto entidade abstracta, e a fracção não é pensada como uma parte de um objecto concreto. Assim, realça-se, por exemplo, que 3/8 é um número que se representa entre 0 e 1 na recta.

Vários estudos, como os de Novillis (1976), de Behr et al. (1983) e mais recentemente a análise de Watanabe (1993) sugerem que há uma dificuldade na percepção de uma unidade de referência, isto é, as crianças não seriam capazes de decidir qual a unidade apropriada. Este aspecto é particularmente evidente quando se trata de uma recta com mais do que uma unidade, os alunos têm tendência a tomar todo o segmento como representando a unidade (como acontece no modelo área) e não só o segmento entre 0 e 1 que representa uma unidade numérica.

No presente estudo observa-se essa dificuldade em reconhecer a unidade nos itens do teste, referentes à representação numa semi-recta graduada, mas também na tarefa 5 relativa ao subconstructo medida, que envolve a representação de 3/4 e 1/2 numa semi-recta, como já se referiu no capítulo anterior.

5.2.2 Desempenho nas Tarefas

Os resultados do presente estudo revelam como o ensino e a aprendizagem do conceito de número racional é complexa. Na realidade, para a sua compreensão contribui um variado conjunto de subconstructos e outras componentes que implicam diferentes estruturas cognitivas que incluem dimensões matemáticas e psicológicas.

Considerando uma hierarquia de desenvolvimento conceptual, traduzida em níveis de facilidade, os resultados do estudo parecem indicar que a noção quociente é adquirida mais cedo que a de *ratio* (note-se que as tarefas requeriam que os sujeitos comparassem dois *ratios*, mais do que comparar uma resposta que produzia um *ratio* desejado).

O subconstructo *ratio* que implica o raciocínio proporcional - uma forma de raciocínio que envolve um sentido de co-variação e de comparações múltiplas e a capacidade para mentalmente armazenar e processar várias quantidades de informação (Lesh et al., 1988) - funciona como um conceito que separa conceitos elementares de outros mais avançados. Estes autores falam em conceito "separador de águas".

Na resolução das tarefas que envolvem o raciocínio proporcional grande número de alunos não consegue ainda ter em conta a relação invariante entre pares de quantidades. Os resultados apontam no mesmo sentido dos descritos por outros estudos (Noelting, 1980a, 1980b; Hart, 1981; Karplus et al., 1983b; Lesh et al., 1988).

Verifica-se ainda que os alunos dos dois grupos, em problemas de comparação, manifestam maior dificuldade na tarefa que envolve quantidades discretas (43,34%) do que na que exemplifica uma situação de quociente (segundo Noelting) e que envolve quantidades contínuas (60,00%), o que está em consonância com os estudos de Noelting (1980a, 1980b).

No estudo "Desenvolvimento de Instrumentos de Avaliação da Aprendizagem em Matemática" (Oliveira, Pereira e Fernandes, 1994), realizado com alunos de idades compreendidas entre 12 e 15 anos, verifica-se que num problema com os números 5, 6 e 9 (no problema há um desenho da letra T e uma ampliação desta, são dados três comprimentos e os alunos têm que calcular o quarto), 67 % não obtém a resposta certa e 31% usa a "estratégia aditiva".

Nas tarefas apresentadas, os alunos mais novos são os que manifestam maior número de dificuldades na resolução desses problemas de comparação, independentemente de pertencerem ao grupo A (alunos com bom desempenho) ou ao grupo B (alunos com mau desempenho).

Na realidade, este subconstructo parece ser o único que funciona discriminativamente em relação à idade. Apesar disso, o grupo de alunos com idades compreendidas entre 12 e 14 anos obtêm melhores resultados que o grupo de alunos com idades compreendidas entre 14 e 15, o que faz supor que outros factores, como a repetência, a diferente maturação, o número de alunos entrevistados, terão intervido. Hart (1981) nas suas investigações, realizadas com alunos de 13, 14 e 15 anos de idade, conclui que não há um progresso rápido ao longo destes três anos na capacidade de lidar com todas as situações de *ratio*.

Os resultados relativos à componente equivalência não sendo tão fracos quanto os obtidos com as tarefas que envolvem a noção de *ratio* foram, no entanto, baixos, particularmente nos alunos do grupo B (alunos com mau desempenho). Na realidade a equivalência de fracções ($2/3 = n/m$) constitui uma forma de raciocínio proporcional (segundo Lesh et al., 1988) e, sendo assim, talvez os resultados obtidos não sejam tão surpreendentes. Apesar disso, é diferente considerar, por exemplo, a medida dois quartos e um meio de uma unidade, que representa o mesmo, do *ratio* 2 para 4 e 1 para 2, que são semelhantes, mas correspondem a fenómenos diferentes.

Para os alunos não é claro que, dadas duas fracções, elas sejam equivalentes e representem o mesmo número. No estudo de Hart (1981) apenas 66% de alunos de 15 anos de idade reconhecem que 3/10 é maior do que 1/5.

Quando se compara o desempenho nas tarefas em contexto concreto realtivamente ao das tarefas em contexto abstracto verifica-se que são superiores no primeiro caso, nos dois grupos A e B, embora seja mais evidente no grupo B (alunos com mau desempenho). Note-se que esta conclusão não é extensiva à tarefa equivalência, isto é, o contexto concreto não contribuiu de um modo evidente para um melhor desempenho.

De facto, a versão concreta da tarefa equivalência não se revelou tão fácil como de início se tinha pensado. O modo personalizado como a questão foi colocada (Gostas de chocolate? Qual preferes 2/3 ou 8/12 de um chocolate?) pode ter influenciado o raciocínio e contribuído para o tipo de respostas mais frequente, tais como: "prefiro 8/12 porque tem bocados maiores" ou "prefiro 8/12 porque tem mais divisões". Há alunos que desenham diagramas ou recorrem a figuras disponíveis, mas mostram pouca flexibilidade na coordenação das transformações entre os diferentes modos de representação e, por isso, pode dizer-se que não há ainda compreensão do conceito? Por outro lado, mostram dificuldades em relacionar a ordem das duas fracções, porque ainda não conseguem compensar a relação entre o número e o tamanho de partes iguais necessárias para cobrir a unidade.

Esta versão parecia favorável à realização de transposições entre diferentes modos de representação e, no entanto, essa transposição não aconteceu. Este aspecto, já evidenciado em investigações anteriores, como as de Lesh, Behr & Post (1987), pode levar-nos a pensar que o invariante não está construído e/ou as representações não são as mais adequadas.

Por fim, e considerando as tarefas relativas ao quociente, verifica-se que apresentam valores médios de desempenho elevados, para qualquer nível de idade. Nos programas vigentes (Anexo G) no momento em que o estudo foi realizado sugeria-se que a introdução aos números racionais se baseasse na impossibilidade de realização da divisão no conjunto dos números inteiros. Assim, a interpretação quociente surgia como a primeira a ser trabalhada com os alunos. Pode, assim, pensar-se que estes resultados reflectem um ensino que enfatizou o referido subconstructo, tendo a sua introdução no currículo escolar iniciado mais cedo e, então, a aprendizagem estaria mais consolidada.

Por outro lado, o conceito de *ratio* (razão), em termos de conteúdos escolares, começa a ser abordado no 2° ciclo (6° ano) associado aos de proporção, de percentagem e de escala e após as operações com números racionais, sem que situações mais simples tenham sido objecto de estudo em anos anteriores.

O raciocínio proporcional envolve a compreensão de importantes noções algébricas que têm a ver com a equivalência, variáveis e transformações. A noção de equivalência é muito importante e surge normalmente como anterior à ordenação de fracções. Nos programas do 2° ciclo (Anexo G) surge ligado à comparação de fracções e precede as operações com números racionais, não facilitando uma conexão com o conceito de *ratio* e de proporcionalidade.

Os nossos resultados merecem ainda uma outra reflexão. Os alunos com 14 e 15 anos, que têm já no seu passado escolar dois ou mais anos de repetência, poderão incluir-se no grupo dos alunos com dificuldades de aprendizagem de que fala o Despacho-Normativo nº 98-A/92 de 19 de Junho (Anexo F)? Nesse caso, que tipo de diagnóstico é possível realizar que seja ponto de partida para uma intervenção escolar, evitando, assim, repetências e desinteresses face à aprendizagem?

Dum modo geral, o que se faz nas escolas tem um suporte demasiado frágil que se torna impeditivo de uma tomada de decisões conducente a uma efectiva modificação da situação. Penso que é importante aprofundar e perceber as razões de tais resultados, com o fim de construir planos individuais de trabalho, as "salas de estudo dirigido" ou outras modalidades e estratégias de apoio pedagógico, segundo o Despacho 178-A/ME/93 de 30 de Julho (Anexo F).

Estudos como este podem contribuir para uma clarificação das dificuldades de aprendizagem, em que algumas questões do teste e/ou as tarefas seriam usadas como actividades de diagnóstico.

Durante as entrevistas, o tipo de ajudas que foram sendo dispensadas mostraram-se, nalguns casos, facilitadoras na resolução das tarefas. Noutros casos isso não aconteceu, o que nos leva ao seguinte raciocínio: as ajudas não foram suficientes porque o(s) aluno(s) não está ainda, relativamente ao conceito na zona de desenvolvimento proximal (segundo Vygotsky)? Ou há ainda pouca flexibilidade na passagem de um modo de representação a outro e, consequentemente, incompreensão do conceito (segundo Behr)?

5.2.3 Contextos e Procedimentos

É interessante comparar os procedimentos nos problemas de contexto concreto com os utilizados em contexto abstracto. Na primeira versão há uma menor utilização dos métodos formais e uma maior diversificação de procedimentos do que na segunda versão. Por outro lado, há uma maior confiança na resolução das tarefas em situação de contexto concreto, em particular, nos alunos do grupo B.

É na tarefa adição, em contexto concreto e abstracto, que a diferença entre os procedimentos é mais notória. Assinale-se que foi a única tarefa em que para a sua apresentação se recorreu a material manipulativo e a maioria dos alunos utilizou-o para fazer estimativas, dando respostas aproximadas. Estes dados apontam no mesmo sentido dos descritos por Behr et al. (1983). De facto, o modo como a situação foi apresentada aproximava-se de uma situação real e na resolução destas recorre-se muitas vezes à estimativa, ao arredondamento, à aproximação.

O material manipulativo funcionou como um passo intermédio na passagem da situação concreta expressa no problema para o mundo das ideias abstractas e dos símbolos escritos, como pretende Behr et al. (1983)? Não sugerindo níveis hierárquicos de pensamento, esses autores consideram que a flexibilidade de pensamento para transformações no modo de representação concreto das fracções parece facilitar a flexibilidade de pensamento para transformações no sistema representacional simbólico matemático.

O meu ponto de vista é que neste tipo de situações, o aluno tem mais hipóteses de recorrer ao conhecimento intuitivo (segundo Resnick, 1986). De facto, a tarefa apresentada favoreceu a utilização do material, tornou-se mais próxima de uma situação do quotidiano, mas também ajudou os sujeitos, particularmente os do grupo B, a "ganharem tempo" antes de responderem, tornando-os mais confiantes, ou seja, facilitou o processo de pensamento.

No *Rational Number Project* (Behr et al., 1983), os problemas que envolvem a adição e que são apresentados com materiais concretos não se revelam mais fáceis do que os apresentados oralmente ou quando é usada linguagem escrita e simbólica. Para um certo número de crianças, o desempenho diminuiu mesmo quando foram encorajados a usar material concreto para os ajudar na resolução de problemas. Segundo os autores estes resultados põem em causa a convicção de que os materiais tornam um problema mais fácil de resolver porque é mais significativo e real.

Este facto pode não ser contraditório com os resultados obtidos na presente investigação. Pensamos que nem todo o material que se usa no ensino facilita a compreensão; por outro lado, se o aluno nunca teve oportunidade de contactar com determinado material manipulativo terá provavelmente dificuldades em utilizá-lo na medida em que não lhe foi possível estabelecer relações significativas entre os símbolos e as imagens dos objectos concretos. Como argumenta Nunes (1994) o sistema de signos usados no pensamento e na comunicação desempenha um papel fundamental no desenvolvimento conceptual.

Nas situações em contexto concreto as crianças usaram outros procedimentos para além dos algoritmos ensinados. Parece assim não haver conexão na estrutura mental da criança entre os problemas e as situações de cálculo uma vez que conseguem resolver correctamente o problema mas não podem aplicar com sucesso o mesmo método nos cálculos. É como se dois tipos de matemática completamente diferentes fossem envolvidos, um em que a criança pode usar o senso-comum e outra em que tem que recordar uma regra (Hart, 1981). Pensamos ser este um dos aspectos mais interessantes do estudo e que leva a questionar a forma como a matemática é ensinada na escola.

Há, de facto, procedimentos que estão tão estritamente ligados a questões específicas que os alunos não são capazes de os utilizar na resolução de uma situação isomórfica, como aconteceu nas tarefas da equivalência ou da adição. São principalmente os alunos do grupo B que usam o procedimento algorítmico nos contextos abstractos (cálculo) e não o utilizam na situação de contexto concreto. Será que este facto reflecte uma instabilidade do seu modelo conceptual sobre os números racionais? Procurando explicar essas diferenças Behr et al. (1983) consideram que *possuir* um modelo conceptual e *ser capaz de o usar numa dada situação* são situações bastante diferentes e que "a capacidade de um aluno para usar um dado modelo conceptual depende consideravelmente da *estabilidade* (isto é, grau de coordenação) das estruturas constituintes (em itálico no original).

De um modo geral, parece razoável admitir que para os alunos da amostra há componentes do número racional que não estão ainda adquiridas, há dificuldades em lidar com a noção de equivalência e de *ratio* e ainda em passar de uma representação a outra, nas situações apresentadas. Os dados levam-nos ainda a questionar: será que para os alunos mais novos as aptidões necessárias à compreensão do conceito de número racional são ainda instáveis e o ensino só ligeiramente pode melhorar o seu nível?

Pensamos que a investigação em didáctica da matemática ainda não conseguiu resolver o problema do ensino das fracções. Gimenez (1994c) defende a abordagem dos números racionais desde os primeiros anos de escolaridade, começando com as representações mais simples e ligadas ao quotidiano das crianças, com base no que tem sido investigado pela psicologia do desenvolvimento.

Há, de facto, uma sequência de conteúdos que é mais adequada que as outras? Os mediadores utilizados não são apropriados? Os diversos conceitos emergem dos contextos mais propiciadores de uma aprendizagem significativa?

Estas questões têm conduzido Vergnaud e mais recentemente Nunes a insistir na importância da determinação dos invariantes e no papel da representação, argumentando que esta só se torna funcional se permitir operar a nível dos significantes e dos significados. Assim, parece indispensável que se continue a estudar os invariantes e as representações simbólicas que servem de suporte ao ensino das fracções, que função e que influência têm nas ideias dos sujeitos.

Nos estudos de Behr et al. (1983), foram usados problemas isomórficos e verifica-se que não só o desempenho é diferente mas também a escolha dos procedimentos é diversa. Os resultados obtidos neste estudo apontam no mesmo sentido, isto é, há diferenças na percentagem de respostas certas e nas estratégias adoptadas pelos alunos na resolução das tarefas quando estas são apresentadas em contexto concreto ou abstracto. O que leva o(s) aluno(s) a escolher um procedimento algorítmico para resolver as tarefas em contexto abstracto e uma resposta apoiada em estimativas para a tarefa da adição?

Estes dados fazem-nos pensar nas limitações de uma generalização de aptidões adquiridas num contexto para a sua aplicação noutro. Os estudos trans-culturais realizados no âmbito da Etnomatemática têm vindo a mostrar que a capacidade dos sujeitos para resolverem uma tarefa está fortemente relacionada com as suas experiências específicas.

Brown, Collins & Duguid (1989) defendem que actividade, conceito e cultura são interdependentes e a aprendizagem deve envolver os três. Mas o que acontece muitas vezes é que os métodos de ensino tentam comunicar os instrumentos conceptuais abstractos como fixos, bem-definidos, como entidades independentes que podem ser exploradas em exemplos *standard*. Os manuais reflectem esta concepção quando apresentam páginas de exercícios que vão sendo realizados pelos alunos ao longo dos diferentes anos da escolaridade básica.

Nas suas investigações Resnick (1986) verifica que os alunos do ensino primário têm um razoável conhecimento de regras de cálculo, aprendem-nas nas aulas para manipular a sintaxe dos sistemas simbólicos mas falham na aprendizagem do significado dos símbolos e dos princípios através dos quais representam a quantidade e as transformações possíveis.

As diferentes estratégias de acordo com o contexto podem também ser reflexo de convicções que os alunos têm sobre a matemática, nomeadamente que tarefas como as de cálculo implicam respostas precisas e as outras (concretas e com materiais) não sendo vistas como estritamente matemáticas podem ser resolvidas através de estimativas, de aproximações? Como acentua Vergnaud (1981) os meios utilizados pela criança, os caminhos que ela segue para resolver um problema ou atingir um objectivo numa dada tarefa escolar estão profundamente enraízados na representação que tem da situação.

5.1.4 Concepções Erróneas na Aprendizagem dos Números Racionais

Quando os alunos adoptam a estratégia da representação gráfica como modo de resolver a tarefa, nomeadamente na situação concreta de equivalência, uma das incompreensões mais frequente é não considerarem a divisão equitativa das figuras geométricas (círculo e rectângulo), ou seja, não coordenam a relação inversa entre o número de partes em que o todo está dividido e o tamanho resultante de cada parte.

Nos manuais escolares as fracções são introduzidas usando uma unidade (todo) e partes de forma e tamanho idêntico. Quando um problema é apresentado usando partes de dois tamanhos diferentes a criança não é capaz de usar a mais pequena como uma parte e é distraído pela presença de outra alternativa, como se constatou no teste sobre o subconstructo parte-todo.

Uma confusão muito comum entre os alunos da amostra é a que diz respeito à relação parte-todo, que é importante nas fracções, e à relação parte-parte, relevante nas situações de *ratio*. Estes resultados estão em concordância com os obtidos por Behr et al. (1983).

O subconstructo parte-todo é fundamental na construção do conceito de número racional e neste nível etário ainda não está resolvido. É importante que se comece a trabalhar mais cedo com os alunos situações contextualizadoras que envolvam esse subconstructo. Se aceitarmos, como diz Vergnaud (1990) que um conceito se define em função de um conjunto de situações que lhe dão sentido numa diversidade de caminhos, não nos parece que uma metodologia apoiada estritamente na divisão de figuras geométricas, tal como aparece nos manuais escolares seja suficiente para conferir significado ao conceito. O que se pretende pôr em causa é o modo descontextualizado como os mediadores (neste caso as figuras geométricas) são utilizados. Na realidade, os alunos trabalham com figuras geométricas divididas equitativamente, em que um certo número delas é pintado e pretende-se que representem a fracção correspondente à parte pintada e, simultaneamente comecem a usar a linguagem das fracções.

A introdução tardia e abrupta do conceito no currículo escolar não facilita uma aprendizagem significativa e consistente. De facto, como já se referiu, à data da investigação, a abordagem dos números racionais iniciava-se no 2° ciclo. Com os novos programas resultantes da Reforma Curricular este é um dos aspectos a ser modificado, isto é, a introdução das fracções faz-se actualmente no 1° ciclo, no 3° e 4° ano de escolaridade. Espera-se que a criança do 4° ano de escolaridade conheça o significado de "um meio" (1/2), "um quarto" (1/4) e "um terço" (1/3). No 2° ciclo (5° ano) as crianças têm de reconhecer fracções equivalentes, ordenar números racionais, adicionar e subtrair fracções.

A dificuldade em transpor um modo de representação noutro, já referido anteriormente, principalmente quando os sujeitos usam diagramas e/ou material manipulativo e têm de representar as fracções ou as operações na forma escrita simbólica, constitui outro problema na aprendizagem. Na perspectiva de Behr et al. (1983), há necessidade de ultrapassar esta dificuldade para que ocorra estabilidade na compreensão do conceito de número racional.

Relativamente aos diagramas foi possível verificar que a maior parte das vezes a sua utilização ajuda na procura da solução mas, muitas vezes o diagrama é usado para reforçar o que já se conhece. No entanto, tal como nas entrevistas realizadas por Hart (1981), também aqui se verificou que, nalguns casos, a necessidade do diagrama para ajudar a ver melhor o que um problema requer, é aparente.

Na nossa investigação, uma outra dificuldade evidenciada, em alguns alunos, foi o não reconhecimento da unidade, particularmente quando foi usada a representação através da recta numérica. Segundo Watanabe (1993) a noção de unidade assume um papel fundamental na construção do conhecimento matemático na criança, definindo unidade como uma construção mental individual com que a criança pode realizar uma certa operação mental repetidamente. Uma unidade não é um todo unificado, mas deve ser um objecto para o indivíduo operar com ele.

Esta dificuldade em reconhecer a unidade no modelo da recta numérica pode ser consequência de, em anos anteriores, não se ter dado a devida ênfase à essa forma de representação, tornando-se assim difícil de compreender. Note-se que a noção de unidade é fundamental na compreensão de diversos conceitos matemáticos, está na base do conceito de medida e do sistema decimal. Contudo as investigações sobre a construção desse conceito, como as de Steffe, em 1983, e as de Steffe & Cobb, em 1988, só se desenvolveram na última década, não conhecendo a autora, no país, qualquer pesquisa realizada nesta área.

O modelo da recta numérica tem sido defendido, por diversos autores nomeadamente Behr et al. (1983), como meio para introduzir as fracções impróprias e as fracções decimais, as medidas de todos os tipos e ainda no conjunto das fracções encaradas como alargamento do conjunto dos números inteiros.

Se o modelo da recta numérica parece ser uma boa representação para as fracções, a verdade é que se os alunos não trabalharam a noção de unidade, esse modelo pode tornar-se demasiado complexo e não permitir a conexão com outros modos de representação. Dos mediadores utilizados no ensino das fracções esse modelo é o que se revela de mais difícil compreensão. Numa figura, como o rectângulo, o aluno visualiza imediatamente o todo, a unidade, enquanto na recta numérica o todo pode variar. Além disso, na figura geométrica, as partes em que a unidade se divide são mais perceptíveis, correspondem a áreas e não a comprimentos. É interessante ver como três alunos, que participaram no estudo, transformam espontaneamente o comprimento (modelo recta numérica) em área (modelo rectângulo) para representar uma fracção, na tarefa 5 (Anexo E).

Dickson, Brown & Gibson (1984) concluem que muito poucas crianças até aos 15 anos têm a noção que entre dois quaisquer números inteiros representados numa recta numérica é possível representar um número infinito de números racionais, na forma de fracção ou decimal.

Saliente-se que os programas de Matemática do 1°ciclo resultantes da reforma curricular procuram já reflectir a importância atribuída pelas pesquisas à noção de unidade propondo um conjunto de actividades que envolvem a manipulação pelos alunos de diversos tipos de materiais conducente à facilitação no reconhecimento da unidade (linear, de área e de volume), o que não acontecia com o currículo anterior.

Uma outra dificuldade que ocorre com frequência no caso de fracções, diz respeito ao uso de decimais para representar o resultado da divisão de um número inteiro por outro e que traduz a incompreensão do valor de posição. De facto, particularmente para os alunos do grupo B essa tarefa é difícil. Por exemplo, quando se pergunta como se pode representar 1 por 3 muitos alunos interpretam como 3:1, talvez porque "3 para 1 não vai".

Brown (1981), num estudo realizado com crianças dos 11 aos 15 anos, verifica que a maior dificuldade revelada pelas crianças do grupo mais fraco parece ter a ver com a compreensão de que os números depois da vírgula indicam a parte do número que é menor que a unidade. As crianças pensam que os números depois da vírgula representam um número "diferente" que também tem dezenas, unidades, etc.

No mesmo estudo Brown refere que 60% de alunos de 13 anos consideram que 16 não pode ser dividido por 20, mesmo depois de terem escrito na parte de cima da folha de respostas "Decimais", talvez porque ainda têm a ideia concreta de que a divisão corresponde a distribuir objectos.

Para algumas crianças, em determinadas situações, não é muito claro que os decimais possam ser usados para dar a resposta à divisão de dois números inteiros, ao contrário de outras em que a fracção é associada à operação de divisão de um número inteiro por outro, como acontece na tarefa: "distribuir 1 pizza igualmente por 3 pessoas", em que 1/3 é identificado como o resultado de 1:3, pela maioria dos alunos.

Uma fracção envolve dois números inteiros que têm de ser tratados como se estivessem irrevogavelmente ligados. Quando os alunos têm que determinar fracções equivalentes, com muita frequência percebem os numeradores como constituindo um padrão e os denominadores outro e ignoram o *ratio* numerador:denominador.

Quando se pede aos alunos para obterem fracções equivalentes o grau de dificuldade varia e se as questões envolvem a fracção 1/2 tornam-se mais fáceis. A estratégia da multiplicação é muitas vezes usada, recorrendo por vezes a um passo intermédio em que utilizam 1/2 (metade de), constituindo um elemento facilitador na resolução. Neste caso não multiplicam numerador e denominador por um número e muitas vezes as dificuldades derivam da técnica e não do conhecimento de factos (calcular o produto).

Os resultados de diversos estudos indicam que lidar com 1/2 e 1/4 é muito mais fácil do que com outras fracções principalmente se o numerador não é a unidade (Vergnaud, 1983). Na nossa investigação, no teste usado para seleccionar os sujeitos da amostra também se verifica um melhor desempenho nas tarefas que envolvem a fracção 1/2.

Na adição de fracções também é usual as crianças utilizarem a regra "adicionar numeradores e adicionar denominadores", como se se tratasse de números inteiros. É interessante verificar que este erro ocorre mais vezes quando a questão é posta na forma de cálculo do que na forma de problema (contexto concreto), embora neste caso a estratégia da representação matemática não seja muito usada.

O facto dos sujeitos considerarem para o conjunto dos números racionais regras já aprendidas (aspecto particularmente evidente na equivalência e na adição de fracções) no conjunto dos números inteiros, estudado em anos anteriores, e por isso não assumirem a fracção como um número, uma quantidade, pode ser encarado como resultado de um obstáculo conceptual.

Na realidade, o que acontece é que os alunos já se sentiam seguros a trabalhar com o conjunto dos números inteiros e as fracções surgem como meio de ultrapassar as restrições impostas por eles. As fracções foram inventadas com vista a ampliar o sistema de números para além do que é necessário para contar e este aspecto escapa aos alunos.

Assumindo a sistematização que Vergnaud (1989a) realizou sobre os obstáculos conceptuais, no domínio do saber matemático, pode afirmar-se que algumas das dificuldades encontradas pelos alunos na resolução das tarefas incluídas no estudo reenviam para a não aceitação do modelo exclusivo do número enquanto medida de uma grandeza ou de uma quantidade.

Enquanto os números inteiros podem ser associados directamente a quantidades por contagens, as fracções não podem ser associadas directamente a quantidades, elas são relações entre duas quantidades. Esta dificuldade conceptual pode ser diferente para quantidades contínuas ou discretas e para diferentes valores numéricos (Vergnaud, 1983), destacando-se os casos das fracções 1/2 e 1/4, como acima se referiu.

Como conclui Hart (1981): quando a criança é confrontada com problemas envolvendo fracções, muitas vezes, ela não diz "o que é que isto significa?" mas "o que é que eu faço quando este sinal (por exemplo :) aparece?"

5.3 IMPLICAÇÕES DOS RESULTADOS

Com esta investigação foi possível estudar as competências e as concepções de alunos do 6º ano de escolaridade sobre o conceito de número racional.

Apresentam-se, de seguida, possíveis implicações que os resultados obtidos no estudo podem ter a nível psicológico e a nível pedagógico-didáctico.

5.3.1 Implicações a Nível Psicológico

5.3.1.1 Sobre a Formação de Conceitos

Quer para elaborar programas, quer para preparar o ambiente de aprendizagem, é necessário dispôr de informações relativas ao nível de desenvolvimento dos alunos. Penso, contudo, que estes dados devem dizer respeito às aprendizagens particulares, sob pena de a sua utilização ser problemática.

Schubauer-Leoni (1989) refere que importantes trabalhos têm sido conduzidos nas diferentes didácticas testemunhando o esforço de compreensão de um processo de elaboração que não pode ser reduzido à construção dos mecanismos gerais do pensamento. Argumenta ainda que o sujeito didáctico não pode ser reduzido ao sujeito cognitivo, havendo necessidade de considerar os aspectos sócio-culturais em que a aprendizagem decorre.

Na investigação desenvolvida verificou-se que determinados constructos se revelam de mais fácil aquisição do que outros. Apesar de, neste estudo não se contemplarem todos os tipos de tarefas que envolvem raciocínio proporcional, nas situações apresentadas relativas à noção de *ratio* (as tarefas requeriam ao aluno comparar dois *ratios* - problemas de comparação) verifica-se que a diferença no desempenho dos sujeitos é notória. Os alunos de nível etário mais baixo manifestam dificuldade em lidar com o conceito, mantendo um raciocínio qualitativo, segundo Noelting (1980). Neste estudo, poucos sujeitos conceptualizam o sabor do concentrado de laranja como uma variável que depende de outras variáveis - as quantidades de água e de pó de laranja.

Como já se referiu, o raciocínio proporcional é um "separador de águas" entre o nível de pensamento concreto e o formal, aspecto evidenciado por numerosas investigações, particularmente as de Inhelder e de Piaget.

O ensino do raciocínio proporcional é particularmente importante pela multiplicidade de situações em que se aplica. Inicia-se no 6º ano de escolaridade, enfatizando-se o método formal na resolução de problemas que envolvem proporções sem que se considerem previamente situações que facilitem a compreensão do conceito.

Os programas do 1º ciclo não propõem nenhum objectivo, nem qualquer actividade que seja propícia à aquisição do conceito. Parece, no entanto, aconselhável que os alunos lidem com situações que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Até porque, como refere Lesh et al. (1988), a utilização do algoritmo não implica necessariamente que se use o raciocínio proporcional.

Há diversas actividades do quotidiano dos alunos (por ex: ampliar ou reduzir receitas culinárias, preparar determinadas bebidas como o café, ampliar ou reduzir desenhos) que eles resolvem na prática e que podem ser manipuladas sem que ainda se recorra a métodos formais. Nessas situações devem estar presentes os resultados já confirmados pela investigação no que diz respeito aos valores numéricos envolvidos e às quantidades contínuas ou discretas.

Se se perspectivarem as concepções alternativas dos alunos como enviezamento (*bias*) cognitivo, segundo Weil-Barais & Vergnaud (1990), ou seja, como passos constitutivos na construção do saber, parece defensável a ideia de que a introdução dos conceitos se deve fazer mais cedo, dependendo do modo como se faz, jogando aqui as representações um papel fundamental. Não nos parece necessário que se espere pelo nível de desenvolvimento mais adequado, como foi defendido durante anos, para que seja feita a introdução de um dado conceito, particularmente se se tiver em conta uma abordagem "realística" da Matemática, como defende Streenfland (1986).

Como se verificou neste estudo o contexto em que o conceito surge parece ter grande influência no processo de resolução, quer porque ancora o saber, quer ainda pelo papel desbloqueador que exerce no enfrentar da situação e, consequentemente no desenvolvimento da autoconfiança do aluno.

Há, no entanto, dificuldades que estão mais relacionadas com as limitações do sujeito devido ao momento do desenvolvimento em que se encontra, por exemplo, quando os alunos de 11 anos de idade falham com mais frequência as tarefas envolvendo raciocínio proporcional.

Assim, pode concluir-se pela necessidade de introduzir modificações no ensino das fracções, através da criação de uma diversidade de situações que confiram sentido ao conceito de número racional e que permitam ao aluno partir do seu conhecimento intuitivo matemático.

Há ainda que repensar a sequência na introdução dos vários subconstructos e o uso dos diferentes sistemas de signos. Como afirma Nunes (1994) os sistemas de signos influenciam, não de um modo determinista, a interacção do sujeito na situação e o tipo de conceito que emerge dessas interacções.

Streenfland (1986) argumenta que a realidade é a fonte na qual a matemática se constrói (conceitos, operações, estruturas), cresce e é, ao mesmo tempo, uma área de aplicação, sugerindo ainda que os procedimentos informais dos alunos devem ser usados como ponto de partida para a aquisição de procedimentos formais.

Numa perspectiva mais ampla Vergnaud (1990c) afirma que o saber se forma a partir de problemas a resolver, entendendo-se por problema qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver actividades de exploração, hipótese e verificação, para produzir uma solução. Ora, um ensino muito baseado em procedimentos formais, nestes níveis etários, não leva o aluno a questionar-se, não lhe permitindo ter um papel activo na construção do saber matemático.

5.3.1.2 Sobre as Incompreensões e os Obstáculos Conceptuais

Do ponto de vista pedagógico, o estudo da problemática sobre a noção de obstáculo epistemológico releva da importância atribuída ao erro, o que nos conduz a considerar a concepção do aprendente como ponto de partida de qualquer intervenção. Se bem que Resnick (1989c) refira que a noção de obstáculo epistemológico não é eficaz, em termos de soluções pedagógicas, penso, no entanto, que o conhecimento de concepções mais profundas dos aprendentes pode ajudar a equacionar os programas curriculares e as consequentes estratégias de ensino.

Como refere Giordan (1989) a nova maneira de encarar o conceito de obstáculo epistemológico levanta questões a nível da organização dos conteúdos, particularmente nos programas de Matemática que durante anos foram organizados com base numa concepção cumulativa do saber. Segundo este autor é necessário que os conteúdos se organizem em torno de conceitos estruturais que se relacionam, e que se considere também o "patamar de integração".

Um outro aspecto decorrente desta nova concepção reenvia para a necessidade de confrontar o aluno com os obstáculos, já não, segundo a tendência clássica em ignorar os erros mas aceitando-os como concepções alternativas, como passos constituintes, muitas vezes, necessários à aquisição de um conceito.

O conhecimento das estratégias usadas pelas crianças é particularmente relevante quando o professor está a corrigir os "erros". Mas se essa correcção toma a forma do "método" que o professor usou na situação de ensino-aprendizagem, então o erro que a criança comete no "método" que utiliza não é sequer tocado, como acentua Hart (1981).

5.3.2 Implicações a Nível Pedagógico-Didáctico

5.3.2.1 Sobre a Didáctica dos Números Racionais

Aceitar que o número racional é um "megaconceito", como já foi afirmado, cuja apropriação reenvia para a compreensão progressiva dos vários subconstructos tem consequências a nível do programa curricular, nomeadamente na determinação da sequência adequada ao seu ensino, na definição e no uso da linguagem, nos materiais e diagramas a utilizar como modo de representar os diversos conceitos.

Naturalmente influencia também as estratégias de ensino que permitam evidenciar as relações do referido conceito com outros conceitos matemáticos (e. g., medida) e outras áreas do saber.

Embora reconhecendo que o desenvolvimento dos diversos subconstructos deve ser aberto, Kieren (1980b) defende que as primeiras experiências a introduzir devem envolver o subconstructo medida e o quociente, sequência que é adoptada no programa do 2º ciclo e pelos professores dos alunos da amostra.

Os resultados do estudo revelam que no conjunto das tarefas, as que envolvem os subconstructos medida e quociente são as de resolução mais fácil. Neste sentido, cabe perguntar se esses dados dão suporte à posição anterior, isto é, se esses subconstructos deverão ser os primeiros a introduzir. Contudo, fica algo por responder: se a sequência fosse outra os alunos apresentariam o mesmo desempenho nessas tarefas? E as ideias que os alunos têm sobre os números racionais também seria idêntica?

Discutir apenas sequências de conteúdos, sem os perspectivar num contexto pode surgir como uma posição estruturalista, o que tem vindo a ser posto em causa pela investigação, nomeadamente Streenfland (1986). Este autor refere, por exemplo, que enfatizar a equivalência de fracções e as ligações operativas entre fracções equivalentes não contribui para a compreensão das fracções.

Numa tentativa de integrar os conhecimentos resultantes das investigações sobre contextos e cultura, Kieren (1988) descreve o conhecimento dos números racionais como obedecendo a uma estrutura constituída por quatro anéis concêntricos, em que o primeiro consiste no conhecimento básico que se adquire como resultado de se viver num determinado ambiente. O segundo anel reenvia para um nível de conhecimento intuitivo, o terceiro refere-se à linguagem, aos símbolos e aos algoritmos e finalmente o quarto representa o conhecimento axiomático.

Como se verificou no presente estudo as tarefas mais ligadas ao quotidiano dos alunos despoletaram determinadas estratégias de resolução que conduziram à solução correcta. Estes dados estão em consonância com a tese de Resnick (1986), segundo a qual há um conhecimento intuitivo matemático nas crianças e a compreensão de conceitos fundamentais é facilitada quando se incorporam as notações formais nesse sistema intuitivo do aprendente.

No entanto, há tarefas que mesmo apresentadas em contexto concreto continuam a revelar-se difíceis, como as que envolvem equivalência e *ratio*. Os mediadores propostos na escola não facilitam a aquisição do conceito ou há invariantes necessários à sua aquisição que não estão ainda construídos?

O ensino dos números racionais tem surgido nos programas curriculares na sequência dos números inteiros e, assim, as regras operativas são introduzidas prematuramente. Adoptar uma sequência baseada na relação que os números racionais têm com os números inteiros, se é válida axiomaticamente, pode não ter sucesso quando se analisa em termos de funcionamento maturativo, como diz Vergnaud (1983). Se pensarmos que um dos principais obstáculos na aprendizagem dos números racionais decorre dos alunos utilizarem regras já aceites nos números inteiros, como se pode observar no presente estudo, talvez a sequência adoptada não seja a mais adequada.

Em muitos casos a ordem pela qual os conteúdos são apresentados às crianças tem mais a ver com as necessidades dos matemáticos do que com o seu processo de desenvolvimento. Noutros casos não é muito clara a ordem de apresentação na matemática e as decisões têm de ser feitas pelo professor, baseado na sua experiência ou nas directrizes dos programas, como refere Hart (1981).

Consideramos que a ordem de apresentação dos conteúdos é um ponto importante na didáctica da Matemática. Contudo não nos parece desejável que se isole este problema de outros a ter em conta na estruturação dos programas. De facto, ao assumir estritamente este ponto de vista a investigação relativa aos números racionais tem-se baseado em diversos estudos sobre comparação de métodos de ensino, mas na prática não têm tido reflexos francamente positivos na estruturação do currículo e na aprendizagem.

Muitas crianças não se sentem confiantes a lidar com fracções e tentam se possível aplicar as regras dos números inteiros, como se observou nas tarefas que envolvem a adição e a equivalência de fracções. Há como que uma fixação em regras aprendidas para os números inteiros.

As fracções não são um passo fácil a partir dos números inteiros. O seu uso introduz dificuldades consideráveis para as crianças (novas regras e novas possibilidades). As fracções não são muito usadas no quotidiano e a justificação é, muitas vezes, feita pela sua inclusão no curriculum escolar. Se a justificação é porque os números inteiros têm limitações (por exemplo, não ser possível dividir um número mais pequeno por outro maior) então a criança deve estar num estado em que "veja" essas limitações.

Autores, como Vergnaud e Nunes, têm questionado o estabelecer da relação, da sequência números inteiros - números racionais, acentuando como fundamental a determinação dos invariantes para a definição de possíveis sequências.

Por outro lado, é importante que as actividades a desenvolver com os alunos envolvam resolução de problemas uma vez que são facilitadoras da compreensão de conceitos porque apelam a propriedades diferentes de um mesmo conceito, isto é, é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança.

Streefland (1986) considera mesmo que é a escolha de objectos matemáticos (os conceitos e as operações) como pontos de partida para o ensino que é a real causa do fracasso. Como contraponto propõe que a escola deve partir do saber adquirido na experiência do dia-a-dia para a aquisição dos conceitos.

Neste sentido, pensamos que sendo as concepções dos alunos modeladas pelas tarefas com que são confrontados, a selecção das situações de aprendizagem deve ser criteriosa, com o propósito de alargar a significação de um conceito. Por outro lado, a introdução de qualquer conceito deve considerar os invariantes construídos e a função das representações adoptadas ou a adoptar, a não ser que se esteja interessado numa aquisição mecanicista de conceitos.

No entanto, é preciso ter presente que a própria representação simbólica é uma ajuda eficaz mas pode dar origem a erros de interpretação. Um exemplo apontado por Vergnaud é o uso do sinal de igualdade (=) e que tem significações diversas: "é o mesmo que", "é equivalente a", "dá como resultado".

Os alunos teorizam espontaneamente, usando para isso a linguagem, o desenho e outros símbolos, o recurso aos significantes contribui para a construção do significado. Geralmente a linguagem aparece associada aos sistemas simbólicos funcionando como elemento facilitador da conceptualização. No ensino dos números racionais a linguagem tem sido objecto de investigação, constituindo um dos pontos de dificuldades, como também se verificou neste estudo.

Nos programas curriculares a introdução da linguagem inerente às fracções surge ligada ao subconstructo parte-todo. Nos manuais escolares as notações são normalmente introduzidas com referência à parte de um todo ou considerando o número de elementos de um subconjunto em relação a um número de um conjunto inteiro, ou é dada a fracção para mostrar o referente concreto ou apresenta-se as partes de um todo ou de um subconjunto de uma colecção e designa-se essas partes com o nome da fraccção correcto.

Na realidade, o uso de determinada notação e correspondente linguagem pode ser mais ou menos natural dependendo do contexto (por ex: na medida, que muitas vezes envolve comparação, a notação decimal permite mais fácilmente a comparação e pode então ser mais apropriada).

Streenfland (1986) sugere que a introdução da linguagem relativa às fracções se faça a partir de situações reais de *ratio* (ex: dividir 3 barras de chocolate por 4 crianças, simbolizadas por ③/4 e visualizada como 4 crianças situadas à volta de uma mesa e 3 barras de chocolate em cima).

Um outro assunto que tem vindo a ser discutido é a maior ou menor ênfase a atribuir à representação decimal, como forma de ultrapassar as grandes dificuldades que os alunos manifestam em lidar com as fracções. Autores como Kieren e Nunes questionam esta posição, atendendo à análise das ideias básicas dos números racionais.

Kieren (1980a) considera que a questão a colocar deve ser: "qual é a forma simbólica mais adequada num dado nível de desenvolvimento do conhecimento sobre os racionais?", propondo ainda que ao usar-se a partição na construção das ideias sobre os números racionais, a linguagem das fracções pode tornar-se mais simples do que a linguagem decimal, sendo mais apropriada nos primeiros estádios da construção do conceito. Num nível mais formal ambos os símbolos correspondentes à representação decimal e na forma de fracção são importantes. A primeira facilitará a realização de algoritmos e a generalização dos algoritmos com os números inteiros para os "decimais" torna-se mais óbvia para os alunos; a segunda é mais útil no gerar de pares equivalentes de fracções, na construção da noção de classe equivalente (por ex: classe equivalente a 3/4 é o conjunto de todas as fracções equivalentes como 6/8, 9/12, 12/16, ...).

Em resumo, porque as crianças têm uma experiência limitada com os números racionais fora da escola (tomam contacto essencialmente na escola com o conceito) o curriculum deve proporcionar experiências que facilitem a apropriação do conceito pelo aluno, dando ênfase tanto ao conhecimento informal como formal de número racional, não sendo de "desprezar" sistemas informais de símbolos que podem funcionar como percursores da linguagem formal, decimal ou das fracções.

5.3.2.2 Sobre a Pedagogia do Erro

Tomar consciência das nossas próprias crenças é o primeiro e principal passo com vista ao questionamento e eventual modificação de tais crenças. É importante que os professores ajudem os seus alunos a tomarem consciência das suas próprias convicções e concepções.

É neste sentido, que pensámos ser muito importante os professores conhecerem as concepções alternativas dos alunos acerca de um dado conceito e ao mesmo tempo envolvê-los no processo de análise das suas próprias concepções. Quando determinada concepção não é aplicável a uma nova situação, isto é, se entra em conflito com ela, é bem provável que ocorra mudança e, deste modo, os alunos poderão rever os seus pontos de vista e alargar as suas concepções.

Como diz Von Glasersfeld (1992), se eu quero mudar alguma coisa na forma de pensamento do outro é absolutamente necessário que eu tenha, ainda que de um modo grosseiro, um modelo do que já existe na cabeça do outro e, neste sentido, defende que uma das coisas mais importantes para o professor é ter um modelo da situação conceptual do aluno.

Se as tarefas exigem apenas a imitação e a repetição, isto é, o professor dá o modelo e o aluno repete, como acontece frequentemente na sala de aula, este tem pouca oportunidade para construir o saber. Como diz Vergnaud (1981a), é um grave erro pedagógico considerar que o ensino consiste na aquisição de hábitos ou de procedimentos já elaborados.

Alguns autores, como Borasi (1987), sugerem que os erros podem proporcionar motivação e serem pontos de partida para construir significado em matemática.

Pensamos que a tentativa de explicação pelo aluno das suas concepções pode tornar-se uma actividade altamente motivadora e desafiadora. Assim, um "erro" pode ser usado para motivar explorações, a mera presença de uma outra concepção gera um contraste, podendo funcionar como um estímulo conducente a pesquisas que de outro modo não seriam tão interessantes, particularmente em crianças mais criativas. Envolver o aprendente na exploração de uma situação matemática, contestando uma dada concepção, pode eventualmente ajudá-lo a ganhar uma compreensão profunda de muitos elementos da matemática.

As concepções erróneas podem ainda constituir um instrumento poderoso para diagnosticar as dificuldades de aprendizagem e, consequentemente contribuir para a modificação de estratégias de ensino. De facto, muitas vezes a origem de dada concepção resulta apenas da estratégia escolhida para alcançar um objectivo não ser a mais adequada.

Esta nova abordagem sobre o papel dos erros tem dado grandes contribuições para o ensino da matemática, nomeadamente na tomada de consciência das dificuldades e das diferenças na aprendizagem da matemática, mostrando ainda a ineficácia da remediação pela prática repetida de exercícios, como se realizou na última década (e ainda pratica?) em muitas salas de aula, particularmente nas chamadas aulas de apoio pedagógico acrescido.

5.4 INVESTIGAÇÕES FUTURAS

Finalmente equacionam-se algumas questões, que ficam por esclarecer, resultantes de reflexões e consequentes perguntas que foram surgindo ao longo do estudo e após a análise dos resultados descritos.

5.4.1. A Formação de Conceitos

Gilly (1989) defende o interesse da colaboração dos psicólogos com os didácticos, aceitando que isso pode favorecer a renovação das teorizações que dizem respeito às relações entre educação e desenvolvimento cognitivo. Em particular, permitirá melhor compreender em quê e como a educação escolar joga um papel determinante na génese individual do pensamento.

Psicólogos e didácticos da matemática estão interessados em estudar como se adquirem conceitos, constroem esquemas, procedimentos, estratégias de resolução e, em simultâneo, como se elaboram e evoluem concepções. Procura-se analisar as condições e os mecanismos dessas construções e elaborações.

Nesta investigação, a nossa intenção inicial era pesquisar as concepções dos alunos do 2° ciclo sobre os números racionais.

Na sequência deste estudo fez-se um levantamento de questões que se podem inserir na linha de investigação de Vergnaud e mais recentemente de Nunes, que reenviam para o papel da representação na formação dos conceitos, neste caso do conceito de número racional. Como afirma Nunes (1994) a criança possui os invariantes do campo do quociente e, no entanto, não resolve satisfatoriamente as tarefas apresentadas pela escola que envolvem, por exemplo, a interpretação parte-todo.

Há assim necessidade de criar sistemas de representação que funcionem como estruturadores do conceito, que dêem suporte à aquisição do conceito. Muitas vezes o que parece incompreensão do invariante é, de facto, incompreensão do sistema de representação.

Pensamos que um dos problemas na aprendizagem de conceitos matemáticos resulta de se trabalhar com conceitos operacionais que dependem do sistema representacional utilizado. Se se altera o sistema de representação, o conceito também se modifica. A construção dos invariantes depende, assim, da multiplicidade dos sistemas representacionais usados na representação do conceito.

Neste contexto, há questões que se colocam e necessitam de ser investigadas, como as seguintes:

Como se define o significado de um conceito? Como se adquire o significado de um conceito?

Que outros sistemas de representação se podem utilizar como meio de facilitar a construção de invariantes? Dos sistemas representacionais usados quais são os mais coordenados no sentido de facilitar a construção de invariantes?

Para um dado conceito qual é o(s) invariante(s) mais importante?

Relativamente à formação de conceitos há ainda um outro conjunto de questões que ficam por responder, a saber:

Como avaliar a estabilidade de certas concepções mais primitivas, de certos conceitos? Em que momento se pode afirmar (e pode?) que o conceito foi adquirido? É desejável estabelecer uma hierarquia de desenvolvimento conceptual?

Como e quando propor situações que ponham em causa a validade de certos conhecimentos matemáticos? Todos os alunos beneficiam das situações propostas?

Outra problemática que é fundamental continuar a investigar refere-se ao estudo das dificuldades conceptuais, erros didácticos e obstáculos conceptuais, segundo a definição de Vergnaud (1989a), relativamente à aprendizagem dos números racionais e outros conceitos matemáticos. D'Ambrósio, numa conferência realizada no âmbito do PROFMAT 94 (Encontro dos Professores de Matemática) defendeu o estudo dos erros como um meio poderoso para ajudar a ultrapassar o elevado insucesso no ensino da Matemática.

Assim, penso que é necessário prosseguir a investigação neste domínio a fim de melhor compreender as condições e as exigências cognitivas e também as didácticas de uma aprendizagem activa das matemáticas.

Finalmente, um outro aspecto que nos parece de grande interesse, mas não foi aprofundado no nosso estudo, remete para o facto dos alunos, graças às ajudas (sugestão no uso do material, de aquiescência e ainda de questionamento) da investigadora conseguirem, nalguns casos, "acelerar" a compreensão da tarefa.

Estas questões reenviam para outro quadro teórico que se insere nas investigações de Gilly, Fraisse e Roux (1988) e que sublinham o papel que as simples aquiescências e as reformulações do outro podem jogar. Os autores defendem que a função *reguladora de acompanhamento* (em itálico, no original) facilita o encaminhamento cognitivo do aluno pela ajuda que dá no controle do desenvolvimento do seu procedimento e da representação que constrói.

As explicações aqui adiantadas dizem respeito a mecanismos que põem o acento nas interdependências e articulações entre os modos de apresentação das tarefas a resolver e os funcionamentos cognitivos. Neste sentido, sugerimos o interesse de um trabalho que privilegiasse a observação do(s) sujeito(s) na resolução das tarefas em grupo de dois ou três alunos, tentando assim responder à questão: os funcionamentos socio-cognitivos provocam mudança cognitiva? Se sim, de que modo a provocam?

Questionando a ideia dos pequenos passos, Vergnaud considera importante confrontar os alunos com situações relativamente afastadas do que eles estão prestes a compreender: por vezes é preciso desestabilizar profundamente as concepções dos alunos para os fazer compreender os fenómenos e os conceitos novos, ou os fazer adquirir competências novas.

A didáctica mostra-nos que por vezes é preciso organizar rupturas importantes na progressão dos conhecimentos dos alunos e que para isso há necessidade de desestabilizar profundamente as convicções explícitas ou implícitas das crianças.

5.4.2 A Didáctica dos Números Racionais

A maneira como é apresentada a tarefa afecta os procedimentos individuais de resolução e o modo como os sujeitos interagem e sentem o "fazer matemática", como se observou, nomeadamente, a nível da perseverança e da auto-confiança. Neste contexto, concebemos uma investigação que diga respeito ao estudo do conhecimento matemático intuitivo e à sua interacção com o desenvolvimento das estruturas formais matemáticas. Como refere Resnick (1986) o conhecimento intuitivo é evidente e óbvio para a pessoa que o possui e, por outro lado, é facilmente acessível e está ligado na memória a uma variedade de situações específicas.

Os professores queixam-se com frequência da pouca flexibilidade que os alunos têm na aplicação de conceitos e procedimentos bem conhecidos. Não será porque o ensino é baseado exactamente numa "confiança excessiva nos algoritmos" (Resnick, 1986)? Será que um ensino partindo do conhecimento intuitivo do aluno lhe permite uma maior flexibilidade e até uma invenção de procedimentos em situações diferentes das usuais? É minha convicção que, para além da aprendizagem se tornar menos mecanizada, aquele ensino vai necessariamente facilitar a flexibilidade do pensamento. Assim, julgo necessário que, para além de se estudar o conhecimento intuitivo matemático, também se investiguem situações de ensino ligadas aos respectivos conteúdos que ajudem as crianças a desenvolvê-lo.

Se me parece razoável assumir que o ponto de partida nas aulas de Matemática seja o conhecimento informal que os alunos possuem sobre os conceitos introduzidos no programa, não penso, no entanto, que este trabalho deva ser exclusivo dos professores. Serão os investigadores, juntamente com os professores, a produzir informação e conhecimento sobre esse saber intuitivo.

Interessa, então, continuar a investigar nesse sentido e procurar saber:

Que conhecimento intuitivo possuem as crianças sobre os números racionais, mais concretamente sobre as fracções? Por exemplo, a noção de unidade é central na aprendizagem das fracções e em todo o saber matemático; que conhecimento tem a criança sobre esse conceito?

Relacionada com estas questões importa responder a outras:

Como podem os professores aproveitar esse conhecimento? Que estratégias de ensino conceber? Que situações de aprendizagem criar com vista à construção do conceito?

E os programas curriculares como podem introduzir essas concepções?

Um pouco marginal a esta investigação, mas relacionado com ela, na medida em que os dados obtidos podem estar relacionados com posições dos professores sobre como se ensina e se aprende Matemática, é o interesse de estudos relativos a concepções dos professores sobre estas questões.

5.5 COMENTÁRIOS FINAIS

No início do estudo defendeu-se a necessidade de uma maior colaboração entre psicólogos e educadores matemáticos, lamentando-se que em Portugal essa colaboração seja ainda incipiente. Diversos estudos referenciados neste trabalho resultam da participação de uns e de outros.

Com esta investigação, que se situa na interface da Psicologia Educacional - Educação Matemática, e que tentou conhecer as concepções e competências dos alunos do 2° ciclo sobre os números racionais, também se pretente contribuir para essa aproximação.

No que diz respeito ao conceito de número racional, se continuarmos a considerar que o seu ensino é fundamental e que todos os alunos o devem compreender, parece-nos, então, necessário que se concebam novas abordagens curriculares. Os programas de Matemática, do 2° ciclo, saídos da Reforma Curricular reflectem, com alguma timidez, concepções aqui expressas. No entanto, a introdução ao estudo dos números racionais continua a fazer-se essencialmente no 2° ciclo e associada aos números inteiros, a partir do subconstructo parte-todo. A contextualização dos conceitos necessária à significação não é defendida como uma alternativa válida a uma perspectiva demasiado formal e estruturalista. A lógica da matemática continua a sobrepôr-se à do desenvolvimento psicológico.

Num outro plano, este estudo alerta-nos para o papel que os professores têm porque são eles que implementam nas salas de aula os programas curriculares. Sabe-se como as aprendizagens são reguladas pela ajuda do outro, tanto na avaliação e controlo, como na auto-estima e auto-confiança, constituindo, assim, a formação do professor um importante investimento.

Finalmente, do nosso ponto de vista há necessidade de repensar as concepções teóricas sobre o ensino e a aprendizagem. A teoria da "aprendizagem-na-prática" defende que os processos de aprendizagem e compreensão são social e culturalmente formados e que o que está a ser aprendido está integralmente implicado nas formas segundo as quais é apropriado; assim, por exemplo, a matemática que é aprendida depende da que é ensinada e o modo como é aprendida na escola depende do que lá é ensinado" (Lave, 1988).

Assiste-se hoje na investigação em educação a uma reflexão profunda que reenvia para a necessidade de se considerarem os conteúdos específicos disciplinares e para a procura de uma referência conceptual que enquadre as dimensões cognitivas, afectivas e culturais do ensino e da aprendizagem.

ANEXOS

ANEXO A

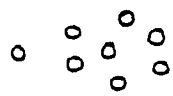
Teste Conceito Parte-Todo

MATEMÁTICA

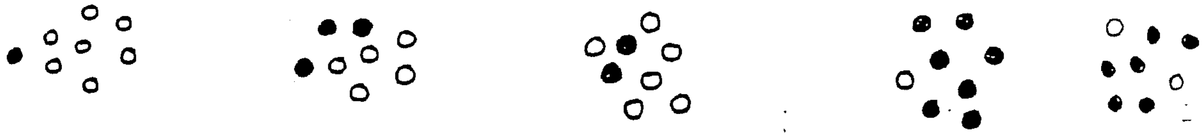
FICHA DE AVALIAÇÃO

NOME .... Nº .... TURMA ....

1.Considera como unidade o seguinte conjunto de berlindes

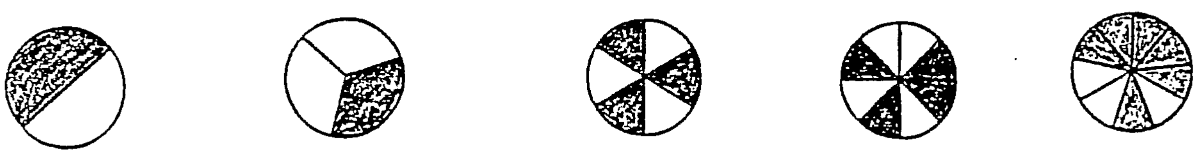


Que parte da unidade representam os berlindes sombreados?

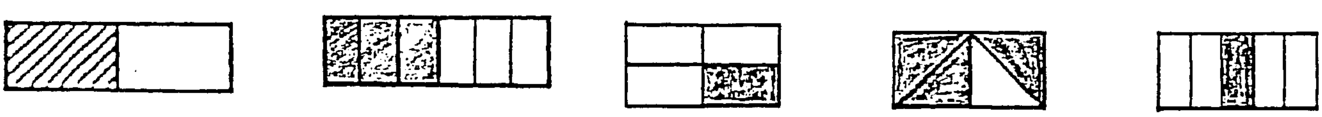


(1) ...... (2) ...... (3) ...... (4) ...... (5) ......

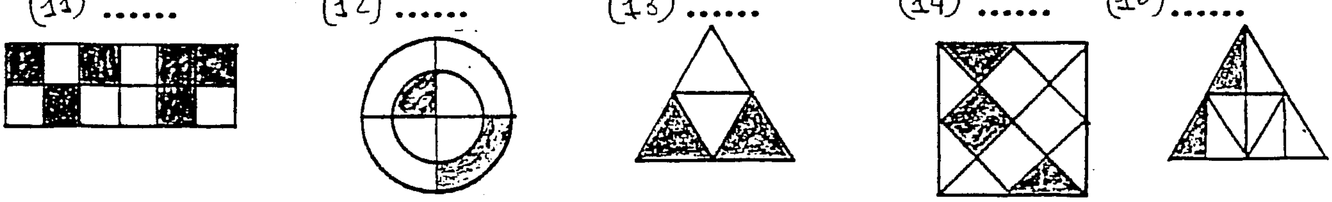
2.Que fracção de cada uma das figuras seguintes está sombreada?



(6) ...... (7) ...... (8) ...... (9) ...... (10)......

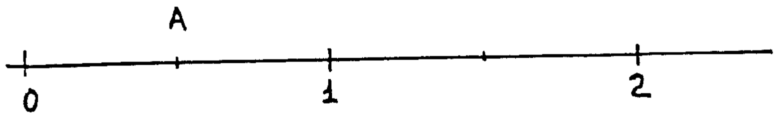


(11) ...... (12) ...... (13) ...... (14) ...... (15)......

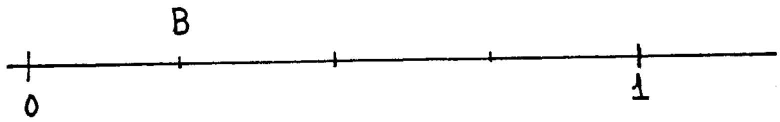


(16) ...... (17) ...... (18)...... (19) ...... (20) ......

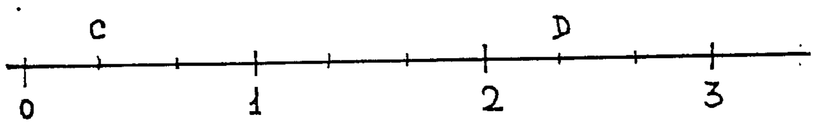
3.Que número fraccionário corresponde a cada um dos seguintes pontos?



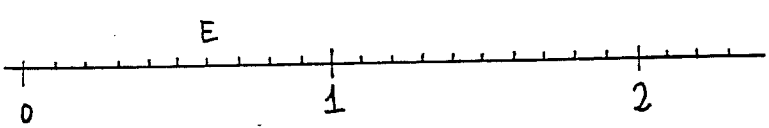
A=
(21)



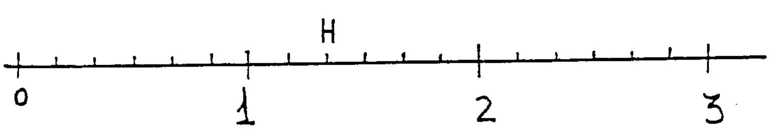
B=
(22)



C=
D=
(23)
(24)

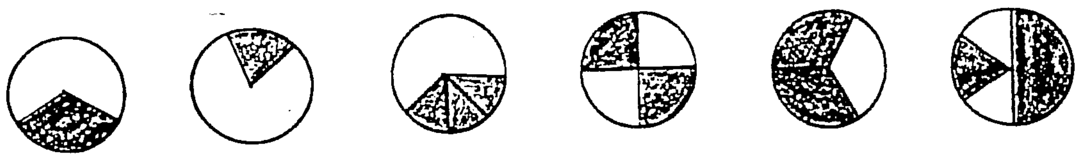


E=
(25)

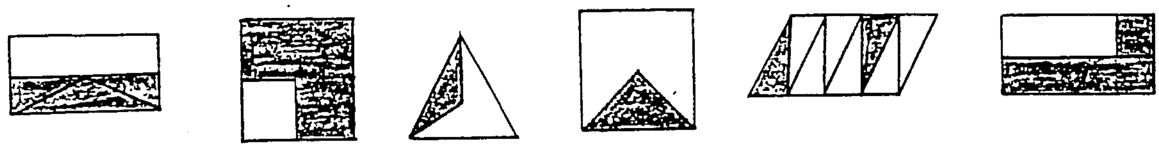


H=
(26)

4. Que fracção de cada uma das seguintes figuras está sombreada?

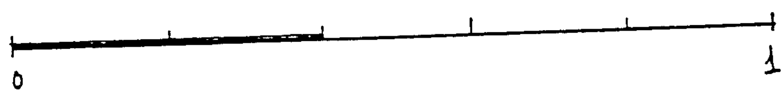


(27) ...... (28) ...... (29) ...... (30) ...... (31) ...... (32)......

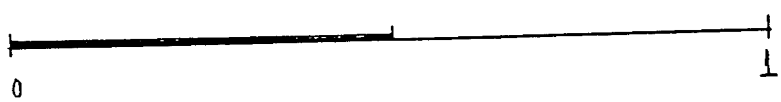


(33) ...... (34) ...... (35)...... (36) ...... (37)...... (38) ......

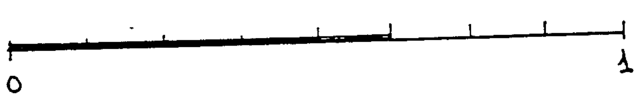
5. Que fracção da recta numérica está sombreada?



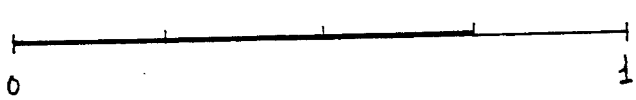
......
(39)



......
(40)



......
(41)



......
(42)

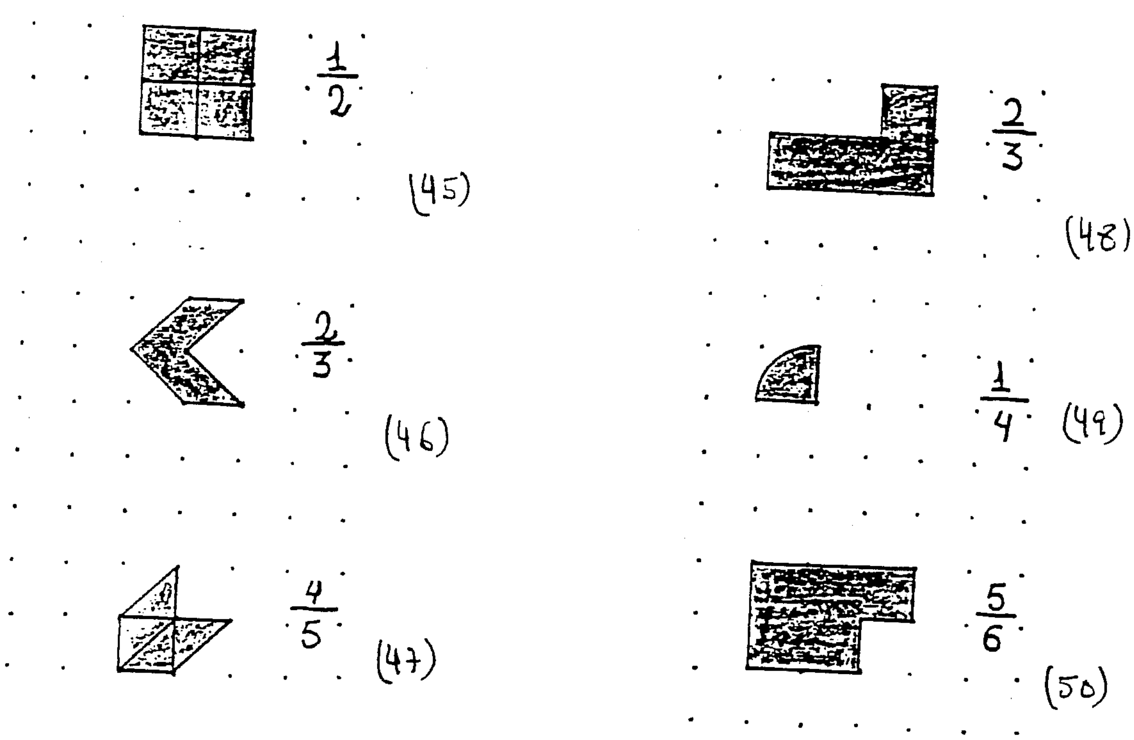
6. Se  representa $\frac{1}{3}$ de um conjunto de berlindes, quantos berlindes deves desenhar para teres o conjunto todo?

(43)

7. Se  representa $\frac{1}{4}$ de um conjunto de bombons, quantos bombons deves desenhar para teres o conjunto todo?

(44)

8. Completa as figuras de tal modo que a parte sombreada corresponda à fracção indicada.



ANEXO B

Consigne utilizada na passagem das tarefas

Conjunto das tarefas

CONSIGNE

O que aqui vais fazer são algumas tarefas de matemática, mas não deves preocupar-te se tiveres dúvidas em responder, porque isto não vai influenciar a tua avaliação. O (A) teu(a) professor(a) não conhece as tarefas nem vai saber o que aqui fizeste.

Se não te importas vamos usar o gravador porque eu não conseguiria escrever tudo o que dizes e isso é muito importante para este trabalho. Tudo o que pensares enquanto estás a resolver as tarefas, se puderes, vai dizendo alto (sem ser só para ti).

Vou perguntar-te muitas vezes "porquê" ou "explica como fizeste" porque, como já te disse, isso é muito importante para o trabalho.

Tens vários materiais em cima da mesa que podes usar, se achares que te podem ajudar a resolver as tarefas.

TAREFA 1

Tens uma pizza para dividires equitativamente por 3 meninos. Quanto come cada menino?

PISTAS: Se o aluno não esboçar qualquer tentativa, sugerir o uso de desenho ou de materiais.
Se o aluno não souber o significado da palavra equitativamente, explicá-lo.

TAREFA 2

Gostas de chocolate? Qual preferes $\frac{2}{3}$ ou $\frac{8}{12}$ de um chocolate?

PISTAS: Se o aluno não esboçar qualquer tentativa, sugerir o uso de desenho ou de materiais.

TAREFA 3

Tens 3 barras de chocolate para dividir equitativamente por 4 meninos. Quanto come cada menino?

PISTAS: Se o aluno não esboçar qualquer tentativa, sugerir o uso de desenho ou de materiais.

TAREFA 4

Qual das seguintes misturas tem um sabor mais forte a laranja:

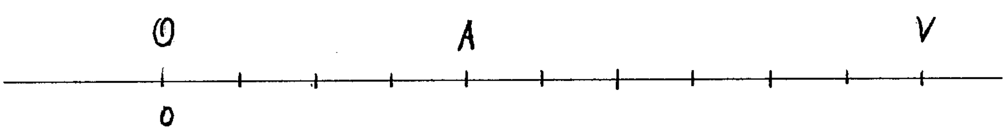
- uma colher de concentrado de laranja para três de água

ou

- três colheres de concentrado de laranja para seis de água?

TAREFA 5

O João e os amigos estão a jogar aos berlindes.
Imagina que o percurso dos berlindes se faz segundo a semi-recta $\dot{O}V$ e que o percurso obrigatório é OA:



O berlinde do João percorreu $\frac{3}{4}$. Marca na semi-recta $\dot{O}V$ o ponto que corresponde à posição alcançada pelo berlinde do João.

A seguir jogaram a Ana e o Pedro. O berlinde da Ana percorreu $\frac{1}{2}$ do percurso obrigatório e o do Pedro percorreu a soma dos dois anteriores.

Represента na semi-recta $\dot{O}V$ os pontos correspondentes à posição alcançada pelo berlinde da Ana e pelo do Pedro.

PISTAS: É dado ao aluno uma folha de papel quadriculado onde os alunos podem desenhar o percurso.

TAREFA 6

Apresentar dois cartões circulares (um dividido em quatro partes, em que três estão pintadas de azul e outro dividido em três partes, em que uma parte está pintada de verde) e dizer:

Isto representa uma pizza de cogumelos e a parte pintada corresponde ao que a João comeu ontem.
Isto representa uma pizza de frango e a parte pintada corresponde ao que ela comeu hoje.
Ao todo, quanto comeu o João?

PISTAS: Comeu mais ou menos do que uma pizza?

TAREFA 7

Se tiveres 1 a dividir por 3, como podes representar o resultado?

PISTAS: Sabes dividir 1 por 3?

TAREFA 8

Coloca um símbolo (>, <, =) no ponteado de forma a obteres uma afirmação verdadeira:

$$\frac{2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{8}{12}$$

PISTAS: Se o aluno não esboçar qualquer tentativa, sugerir uso de desenho ou de materias

TAREFA 9

Calcula:

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$$

PISTAS: Se o aluno não esboçar qualquer tentativa, sugerir uso de desenho ou de materias

TAREFA 10

Em qual dos grupos se come maior quantidade de bolo, se a distribuição for equitativa:

- no grupo em que há 1 bolo para 3 raparigas

- no grupo em que há 2 bolos para 6 raparigas?

ANEXO C

Guião da entrevista com os professores sobre as práticas pedagógicas

Guião da entrevista com os professores sobre as práticas pedagógicas e abordagem aos números racionais

1. Segue algum manual em particular? Qual?

2. Em termos metodológicos, como descreveria as suas aulas?

organização de sala: trabalho de grupo, trabalho individual no quadro, no livro;
materiais: manipulativos, fichas construídas pelo professor, o manual, outros;
trabalho de casa: exercícios, problemas do livro, do professor, pesquisas;
tempo gasto em explicações: para a turma, por aluno, por pequenos grupos;

3. Como foi feita a abordagem aos números racionais?

sequência de conteúdos;
conceitos abordados;
utilização de materiais;
modelos adoptados

4. Qual é a maior dificuldade dos alunos em relação aos números racionais? E a menor?

5. Considera que este tópico é difícil de ensinar? Porquê?

ANEXO D

Questionário sobre o perfil dos alunos

Questionário sobre o Aluno

(a preencher pelo professor de matemática e pelo director de turma)

Nome do aluno ....

Data de nascimento ....

Número de anos de repetência ....

Anos em que repetiu ....

Se o aluno manifesta algum problema, refira qual ou quais (por ex: de aprendizagem, do foro orgânico, comportamental, relacional, ...) ....
....
....
....
....
....

Em termos de aprendizagem, que impressão tem sobre o aluno (mencione o nível que lhe foi atribuído em matemática, no último período) ....
....
....
....
....
....

ANEXO E

Estratégias utilizadas pelos alunos nas tarefas (exemplos)

ESTRATÉGIAS

Representação matemática quando o aluno utiliza a escrita simbólica como forma de representar a noção e/ou usa um algoritmo usual para resolver uma tarefa.

Hélio (12 anos)

$1 : 3$

$\frac{1}{3}$

$1,00 \,\underline{|\,3\quad}$
$\quad\;\; 0,33$

$\frac{2}{\underset{(4)}{3}} \ldots \frac{8}{\underset{(4)}{12}} = \frac{8}{12} = \frac{8}{12}$

m m c $(3,12)=12$

Marília (13 anos)

$1,0 \,\underline{|\,3,}$
$1 \quad \cancel{3}$

$\cancel{\frac{1}{3}}$

Francisco (12 anos)

$1 \div 3 = 3(3)$

$\frac{1}{3}$

$1'0 \,\underline{|\,3\;}$
$10 \quad 3,3$
1

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

$20 \,\underline{|\,3\;}$
$20 \quad 6,(6)$

$80 \,\underline{|\,12}$
$80 \quad 6(6)$

Paulo (13 anos)

$1 : 3 = 3,3$

$\frac{1}{3}$

$1,00 \,\underline{|\,3\quad}$
$\;\;10 \quad 33$

Rui (12 anos)

1×3

2×6

$$\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{6}$$

São equivalentes, é igual

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{3}{6}$$

$1{,}00 \mid 3$ → $0{,}33$

$3{,}0 \mid 6$ → 5

0,33 0,5

Está mais concentrado na segunda

Fernanda (13 anos)

$$\frac{3}{4}_{(3)}, \frac{1}{3}_{(4)} \qquad \frac{9}{12} + \frac{4}{12} = \frac{13}{12}$$

$m.m.c\,(3,4) = 12$

Comi $\frac{13}{12}$.

Cidália (11 anos)

$-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ $\frac{3}{4} + \frac{2}{4}$

(1) (2)

$\frac{3}{6}$ $\frac{5}{8}$

$-\frac{2}{3} < \frac{8}{12}$ $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6,6 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 80 & 12 \\ \hline 08 & 6,6 \end{array}$$

Catarina (13 anos)

3   4   

$$\begin{array}{l|l} 3{,}00 & 4 \\ \hline 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$$

Teresa (12 anos)

3 : 4

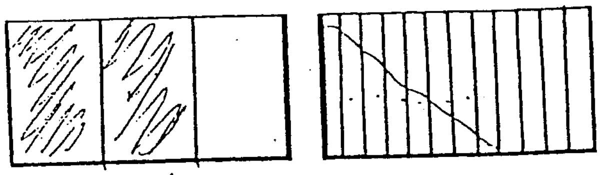
$$\begin{array}{l|l} 3{,}00 & 4 \\ \hline 20 & 0{,}75 \end{array}$$

Dividia 0,75.

Representação gráfica quando o aluno faz um desenho, um esboço ou utiliza um já feito e disponível para representar uma ideia.

Hélio (12 anos)

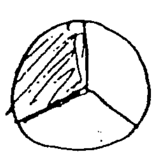
$\frac{2}{3}$ porque divide em bocados maiores do que nos

$\frac{2}{3}$ 

Marília (13 anos)

$\frac{2}{3}$ $\frac{8}{12}$ é maior. Porque os numeros são maiores.

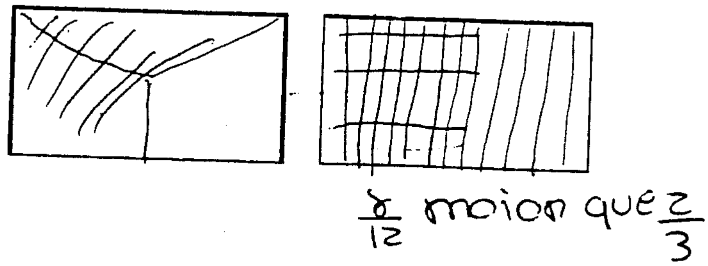
Francisco (12 anos)

 $\frac{1}{3}$ ou 3,(3)

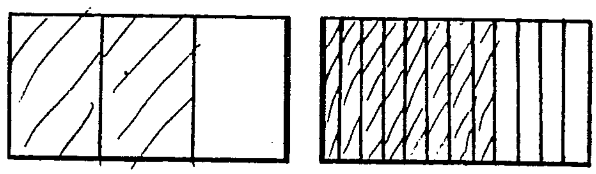
$10 \,|\, 3$

$10 \quad 3,(3)3$

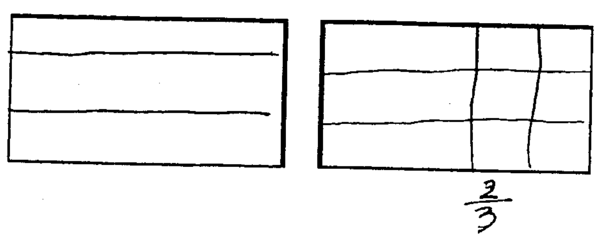
Isabel (13 anos)



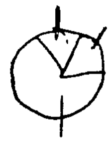
Mário (14 anos)



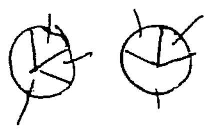
Cátia (15 anos)



Antónia (12 anos)

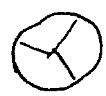


Dividir por 3 pessoas.

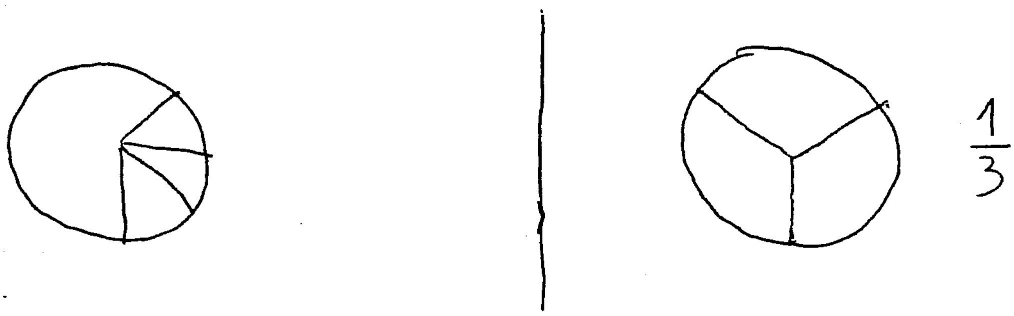


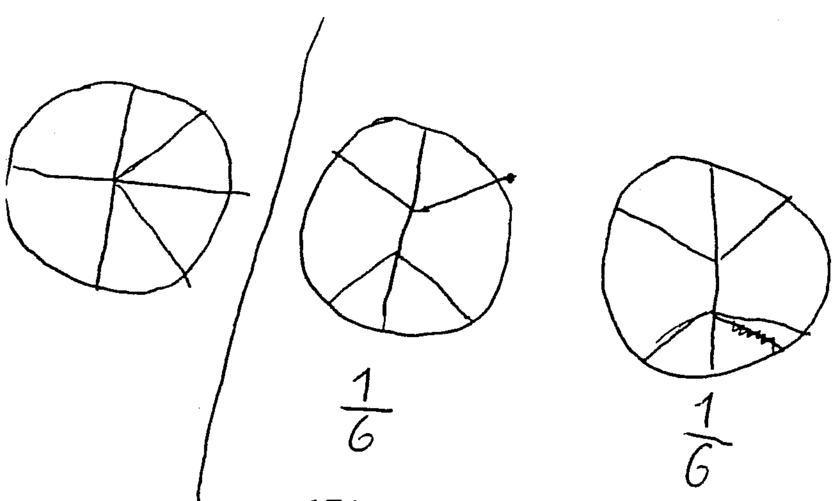
Divir por 6 pessoas.

Rosário (13 anos)



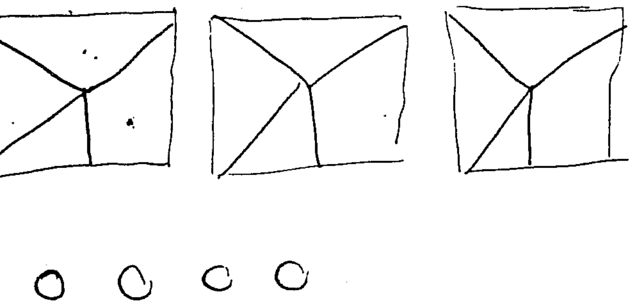
- É a que tem um bolo





Isabel (13 anos)

ocolates para 4 pessoas



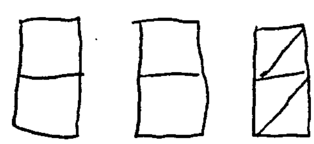
Vai-se comprar outro chocolate

cada pessoa levo uma parte de cada chocolate

$\frac{1}{4}$

Catarina (12 anos)

8-3 4



$\underset{(2)}{\frac{1}{2}} + \underset{(1)}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

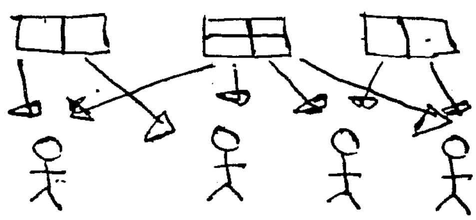
$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

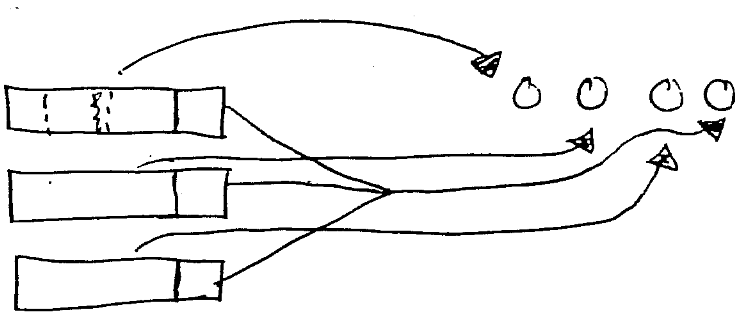
Ângela (11 anos)

$$\frac{3}{1} : 4 = \frac{7}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 3.100 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 75 \\ 0 & \end{array}$$



Ricardo (14 anos)



pouco mais de metáde para cada um

$$\frac{3}{4}$$

Representação mental quando o aluno exprime o seu raciocínio verbalmente através de uma regra já aprendida, percebida ou, então, ele próprio inventa uma regra como modo de resolver a tarefa.

Mário (14 anos)

\- 1 do pó
3 de água

---

3 de pó
6 do água

Nô segundo para Ter o mesmo sabor Tinho do bota 2 do pó e 6 do água.

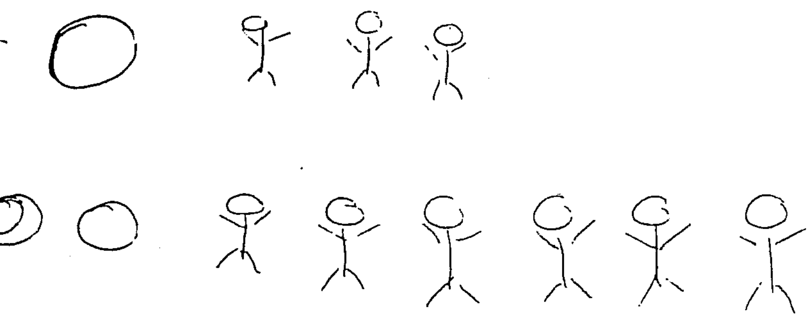
Ângela (11 anos)

1 pó
3 copos de água

3 pó
6 copos do água

e igual porque a uma colher de pó e 3 de agua e no outro á 3 pó e 6 do água

Joana (14 anos)



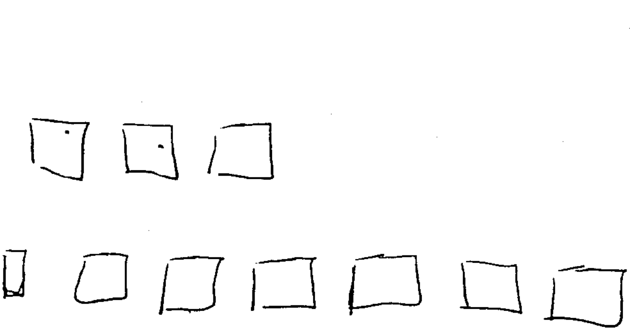
~~segunda cabe mais~~

o igual.

rque na primeira se eu repartir em três cada um

o uma, ~~e~~ e na segunda é na mesma porque repart

bolo por três.



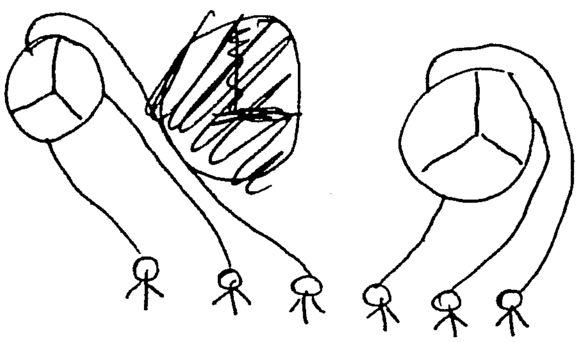
segundo
~~primeiro~~ porque se se você juntar tudo fica mais pont

Fátima (12 anos)

1 - Grupo 1 bolo 3 rapazes

2 - Grupo 2 bolos 6 rapazes

no segundo há mais bolos mas também há mais rapazes.



É igual

1 pó 3 água

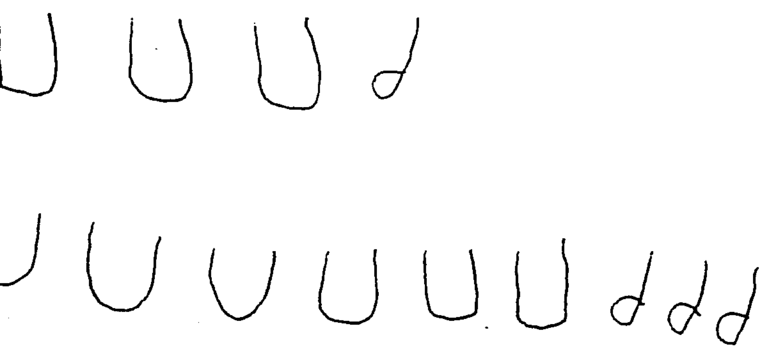
3 pó 6 água

no segundo porque tem mais colheres de pó do que água

na primeiro porque leva menos água.

Joana (14 anos)

-São iguais porque se ~~om~~-Tem mais água tambem tem mais pó.



Pedro (13 anos)

$\frac{3}{6}$ -este fica mais concentrado porqu
tem três de pó e o outro só tem 1.

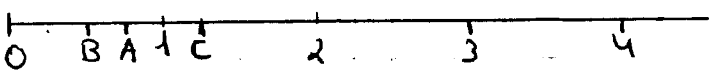
Martinho (14 anos)

$C = 0{,}5 + 0{,}75$

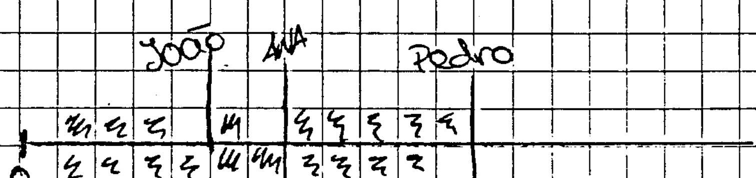
$B = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$A = \frac{3}{4}$

$A = 3{,}00 \div 4$: $\begin{array}{r|l} 3{,}00 & 4 \\ 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$



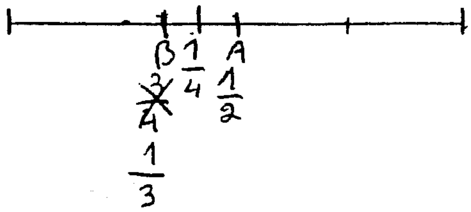
Cidália (11 anos)



João $\frac{3}{4}$ Ana $\frac{1}{2}$ Pedro $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

(2)

João (11 anos)



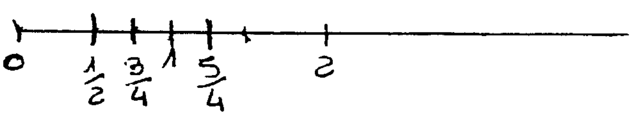
Contei os quadrados e dividi por Tres e deu-me 4 e mais ~~ba~~ ~~bamais~~ 4.

$12 : 4 = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \times 12$

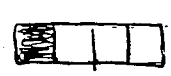
$3 \times 4 = 12$

Ana (14 anos)



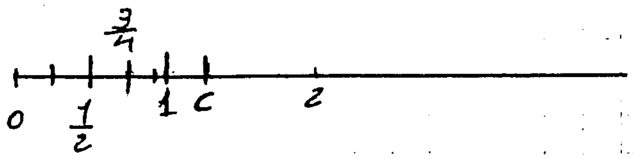
$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ (B) $\quad \frac{2}{4}$



$\frac{1}{4}$

Francisco (12 anos)



$\frac{3}{4} = A$

$\frac{1}{2} = B$

$\frac{5}{4} = C$

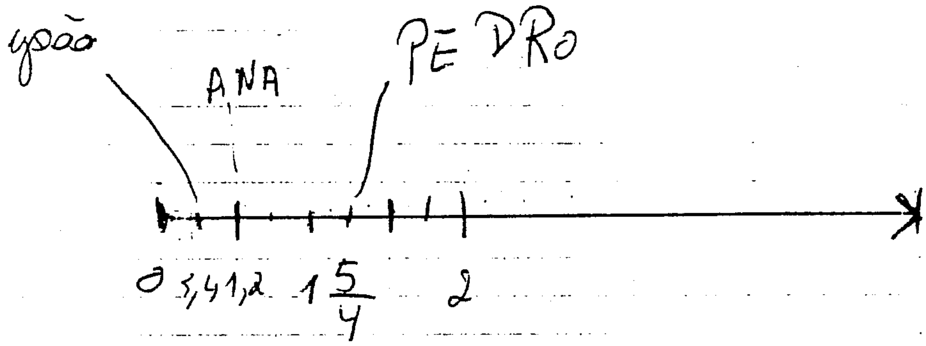
$1 : 4 > \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4_{(1)}} + \frac{1}{2_{(2)}}$

$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} =$

$= \frac{5}{4}$

Luís (12 anos)



joão $\frac{3}{4}$ Ana $\frac{1}{2}$ Pedro $\frac{3}{4} + \frac{1}{\underset{(2)}{2}} = \frac{5}{4}$

Representação com materiais quando o aluno utiliza material de concretização na resolução da tarefa.

Estimativa quando o aluno, recorrendo a material de concretização na resolução da tarefa, estima o resultado

Hélio (12 anos)

[Hélio escreve] $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$

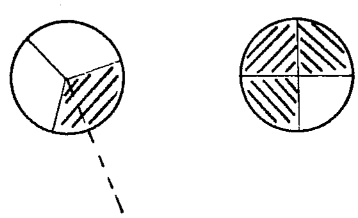
[depois manipula o cartão, olha-o, e diz] "Comeu uma pizza e mais um bocado"

[A experimentadora diz] Explica como fizeste .....

[Hélio põe o lápis no espaço que sobra e diz] "Mais ou menos $\frac{1}{9}$ .... não tenho a certeza....

isto é $\frac{1}{4}$ (aponta para o cartão) e isto (aponta novamente para o cartão) é menos do que $\frac{1}{4}$

... se eu dividir aqui em dois .... tenho $\frac{1}{8}$ ... é capaz de ser ... então ... mais ou menos $\frac{1}{9}$"



....

ANEXO F

Despacho Normativo nº 98-A/92
(Sistema de avaliação dos alunos do ensino básico)

Desp. 178-A/ME/93
(modalidades e estratégias de apoio pedagógico aos alunos)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

Despacho Normativo n.º 98-A/92

A avaliação dos alunos do ensino básico é uma exigência decorrente dos princípios e objectivos definidos para este nível de ensino no artigo 7.º da Lei n.º 46/86, de 14 de Outubro, Lei de Bases do Sistema Educativo, permitindo aferir, a cada momento, do estádio de realização dos mesmos.

Entre aqueles princípios e objectivos sobressaem, para efeitos do modelo de avaliação a adoptar, o da universalidade, obrigatoriedade e gratuitidade do ensino básico, bem como o dever de assegurar uma formação geral, comum a todos os portugueses, e de criar condições de promoção e sucesso escolar a todos os alunos.

Idênticos princípios obtiveram consagração no artigo 10.º do Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto, resultando daí a necessidade de compatibilizar o sistema de avaliação com a organização curricular constante daquele diploma.

Nestes termos, ao abrigo do artigo 7.º da Lei n.º 46/86, de 14 de Outubro, e do n.º 3 do artigo 10.º do Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto:

Determina-se o seguinte:

1 — É aprovado o sistema de avaliação dos alunos do ensino básico, publicado em anexo a este despacho e que dele faz parte integrante.

2 — O novo sistema de avaliação será aplicado, em cada ano de escolaridade, no ano lectivo em que são generalizados os novos programas.

3 — Ao Instituto de Inovação Educacional, no âmbito das atribuições que lhe estão legalmente cometidas, cabe:

a) Conceber e produzir instrumentos de avaliação dos alunos;
b) Estudar, recolher e produzir materiais sobre a avaliação dos alunos;
c) Acompanhar e avaliar a aplicação do novo sistema de avaliação dos alunos;
d) Desenvolver os estudos necessários à preparação dos instrumentos da avaliação prevista no n.º 43 do anexo ao presente despacho;
e) Integrar nos estudos e propostas de desenvolvimento curricular metodologias de avaliação, tendo em vista o reforço do processo de aprendizagem.

4 — É revogado o Despacho n.º 162/ME/91, de 9 de Setembro, publicado no *Diário da República*, 2.ª série, n.º 244, de 23 de Outubro de 1991.

Ministério da Educação, 19 de Junho de 1992. — O Ministro da Educação, *António Fernando Couto dos Santos*.

ANEXO

Sistema de avaliação dos alunos do ensino básico

CAPÍTULO I

Processo de avaliação

Objecto de avaliação

1 — A avaliação dos alunos do ensino básico incide sobre o cumprimento dos objectivos gerais de cada um dos ciclos e dos objectivos específicos de cada disciplina ou área disciplinar.

2 — A avaliação deve considerar os processos de aprendizagem, o contexto em que a mesma se desenvolve e as funções de estímulo, socialização e instrução próprias do ensino básico.

3 — Nos três ciclos do ensino básico todos os professores devem, no âmbito da sua disciplina e no quadro da avaliação formativa, pronunciar-se quanto à competência evidenciada pelos alunos em relação ao domínio da língua portuguesa, nomeadamente quanto ao desenvolvimento da sua capacidade de comunicação oral e escrita.

4 — O Ministério da Educação, tendo em conta as finalidades do ensino básico e de cada ciclo de estudos, definirá, a nível nacional, os objectivos curriculares mínimos do ensino básico e de cada um dos seus ciclos.

5 — Na sequência da definição prevista no número anterior, compete ao conselho pedagógico, sob proposta dos grupos disciplinares ou departamentos curriculares, definir os objectivos mínimos de cada disciplina, área disciplinar e área escolar, tendo em conta as especificidades da comunidade educativa.

6 — À medida que o modelo de administração, direcção e gestão definido no Decreto-Lei n.º 172/91, de 10 de Maio, for implementado, a definição referida no número anterior será objecto de ratificação pelo conselho de escola ou de área escolar.

Finalidades da avaliação

7 — A avaliação dos alunos no ensino básico é um elemento essencial para uma prática educativa integrada, permitindo a recolha de informações e a tomada de decisões adequadas às necessidades e capacidades do aluno.

8 — Enquanto elemento regulador da prática educativa, a avaliação tem carácter sistemático e contínuo, permitindo:

a) Determinar as diversas componentes do processo de ensino e de aprendizagem, nomeadamente a selecção dos métodos e recursos educativos, as adaptações curriculares e as respostas às necessidades educativas especiais dos alunos;
b) Orientar a intervenção do professor na sua relação com os alunos, com os outros professores e com os encarregados de educação;
c) Auxiliar os alunos a formular, ou reformular, decisões que possam influir, positivamente, na promoção e consolidação do seu próprio processo educativo;
d) Melhorar a qualidade do sistema educativo, através da introdução de alterações curriculares ou de procedimentos que se afigurem necessários.

Intervenientes

9 — A escola, através dos seus órgãos próprios, é responsável pel percurso escolar dos alunos, devendo garantir a consecução dos ob jectivos da escolaridade obrigatória e o sucesso educativo dos alunos.

10 — A avaliação dos alunos do ensino básico pressupõe o traba lho em equipa de todos os professores envolvidos, em particular n conselho de turma, bem como a participação dos alunos e dos en carregados de educação, em condições a estabelecer no regulament interno da escola ou área escolar.

11 — Podem, ainda, ter intervenção no processo de avaliação do alunos, nos termos adiante referidos, os seguintes serviços:

a) Serviços de psicologia e orientação;
b) Serviços de educação especial;
c) Serviços ou entidades cuja contribuição o conselho pedag gico ou o conselho escolar considerem conveniente;
d) Direcções regionais de educação.

Modalidades de avaliação

12 — No ensino básico distinguem-se as modalidades de avali ção seguintes:

a) Avaliação formativa;
b) Avaliação sumativa;
c) Avaliação aferida;
d) Avaliação especializada.

13 — As modalidades de avaliação referidas no número anteri devem harmonizar-se de modo a contribuírem para o sucesso ec cativo dos alunos e para a qualidade do sistema educativo.

14 — As diferentes modalidades de avaliação articulam-se ao lon dos vários anos e ciclos, considerando o ritmo de desenvolvimer pessoal dos alunos e a sua capacidade de realização.

Processo individual do aluno

15 — O percurso escolar do aluno deve ser registado num proce individual de que constem todos os elementos relevantes para o desenvolvimento integral.

O professor, no 1.º ciclo, ou o director de turma, no
º ciclos, é o responsável pela elaboração, consulta e conser-
lo processo individual, ao qual têm acesso, além dos alunos,
professores, os pais e os encarregados de educação.
Os elementos contidos no processo individual são de carác-
fidencial, devendo este acompanhar o aluno na sua progres-
longo da escolaridade básica, sendo devolvido, no seu termo,
s ou encarregados de educação.

Avaliação formativa

A avaliação formativa é a principal modalidade de avalia-
ensino básico e destina-se a informar o aluno, o seu encarre-
educação, os professores e outros intervenientes sobre a qua-
do processo educativo e de aprendizagem, bem como sobre
o de cumprimento dos objectivos do currículo, a fim de per-

Estabelecer metas intermédias que favoreçam a confiança própria na prossecução do sucesso educativo;
Adoptar novas metodologias e medidas educativas de apoio, ou de adaptação curricular, sempre que sejam detectadas dificuldades ou desajustamentos no processo de ensino e de aprendizagem.

- A avaliação formativa tem carácter sistemático e contínuo,
do-se na recolha, pelo professor, de dados relativos aos vá-
mínios da aprendizagem que evidenciam os conhecimentos e
ências adquiridos, as capacidades e atitudes desenvolvidas, bem
as destrezas dominadas.
- A avaliação formativa é da responsabilidade conjunta do pro-
m diálogo com os alunos e os outros professores, e dos ór-
orientação e apoio educativo, cabendo ao director de turma,
e 3.º ciclos, a função de coordenar a avaliação, garantindo
carácter globalizante e integrante.
- Para efeitos de formalização da avaliação formativa no
.º ciclos do ensino básico, o conselho de turma, presidido
espectivo director de turma, reúne, ordinariamente, no final
a um dos períodos lectivos, de acordo com o calendário esco-
ovado.
- Fazem parte do conselho de turma todos os professores da
podendo o presidente solicitar a presença de outros interve-
na avaliação.
- A avaliação formativa articula-se com dispositivos de infor-
do aluno e do seu encarregado de educação, sendo da res-
ilidade do professor, no 1.º ciclo, ou do conselho de turma,
stantes ciclos.
- A avaliação formativa traduz-se de forma descritiva e qua-
, podendo utilizar perfis de aproveitamento ou registos estru-
s de avaliação.

Avaliação sumativa

- A avaliação sumativa tem em conta a qualidade do processo
ino e de aprendizagem e traduz-se num juízo globalizante so-
desenvolvimento dos conhecimentos e competências, capaci-
e atitudes do aluno, tomando como referência o estabelecido
os 4 e 5.
- A avaliação sumativa é da responsabilidade de todos os pro-
es e técnicos de educação que integram o conselho de turma,
ndo o director de turma especial responsabilidade pela coor-
o dos trabalhos e pela garantia da natureza globalizante e in-
e da avaliação.
- Compete ao conselho pedagógico, ou ao conselho escolar,
ciclo, definir os critérios gerais da avaliação sumativa, aos
o conselho de turma, ou o professor, se têm de referenciar.
- A avaliação sumativa ocorre, ordinariamente, no final de
m dos períodos lectivos e no final de cada ciclo.
- A avaliação sumativa realiza-se na reunião do conselho de
que formaliza a avaliação formativa, permitindo a tomada de
es sobre apoios e complementos educativos.
- A avaliação sumativa, realizada no final de cada ciclo, con-
o desenvolvimento global do aluno com os objectivos globais
ciclo.
- A avaliação referida no número anterior tem em conta a ava-
formativa e a avaliação sumativa realizada no final de cada
ctivo, dando origem a uma decisão sobre a progressão ou re-
do aluno.
- A avaliação sumativa, no 1.º ciclo do ensino básico, exprime-
forma descritiva.
- A avaliação sumativa, no 2.º e 3.º ciclos do ensino básico,
ne-se na escala de 1 a 5, acompanhada de uma síntese dos re-
descritivos decorrentes do processo de avaliação formativa.

34 — Em caso algum poderá proceder-se à avaliação sumativa antes do final do 2.º ano de escolaridade.

35 — Para efeitos de progressão, a avaliação sumativa, realizada no final de cada ciclo, exprime-se através dos juízos de *Aprovado* ou *Não aprovado*.

Avaliação sumativa extraordinária

36 — O conselho escolar, no 1.º ciclo, e o conselho de turma, nos restantes ciclos, podem decidir, em reunião ordinária realizada no final do 2.º período de qualquer ano lectivo, proceder a uma avaliação sumativa extraordinária do aluno, no caso de a avaliação ter indicado que a qualidade dos processos de aprendizagem e a distância em relação aos objectivos curriculares podem aconselhar a sua retenção no mesmo ano.

37 — Para efeitos do disposto no número anterior, a decisão de proceder à avaliação extraordinária deve ser comunicada ao aluno e ao encarregado de educação, no prazo de cinco dias úteis.

38 — A utilização do mecanismo previsto nos números anteriores determina a adopção de um plano de recuperação do aluno, através do estabelecimento ou do reforço de medidas de apoio educativo.

39 — A decisão decorrente da avaliação sumativa extraordinária formaliza-se na reunião ordinária do conselho de turma ou do conselho escolar, realizada no final do ano lectivo, tendo como efeito a progressão do aluno para o ano seguinte ou a sua retenção no mesmo ano no caso de se verificar que as medidas de apoio educativo adoptadas não foram suficientes para o cumprimento dos objectivos curriculares mínimos definidos.

40 — À avaliação sumativa extraordinária aplica-se, com as necessárias adaptações, o disposto para a avaliação sumativa ordinária.

Avaliação aferida

41 — A avaliação aferida destina-se a medir o grau de cumprimento dos objectivos curriculares mínimos, definidos, a nível nacional, para cada ciclo do ensino básico, visando o controlo da qualidade do sistema de ensino, a tomada de decisões para o seu aperfeiçoamento e, ainda, a confiança social no sistema escolar.

42 — A avaliação aferida é utilizada no momento em que se pretende avaliar o sistema de ensino, a nível nacional, regional ou local, visando, em especial, os respectivos resultados curriculares e procedimentos adoptados, segundo padrões comuns, no domínio dos saberes e aptidões.

43 — A avaliação referida no número anterior não tem efeitos sobre a progressão escolar dos alunos e pode ter lugar em qualquer momento do ano lectivo, sendo da responsabilidade dos organismos competentes do Ministério da Educação a elaboração das respectivas provas.

44 — Para efeitos de medição de grau de cumprimento dos objectivos curriculares mínimos, definidos segundo o processo estabelecido no n.º 5, poderão realizar-se provas aferidas no início do 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, sempre que tal seja considerado conveniente pelo conselho pedagógico.

45 — As provas referidas no número anterior são elaboradas, coordenadas e avaliadas sob a responsabilidade do conselho pedagógico.

Avaliação especializada

46 — A avaliação especializada consiste na avaliação multidisciplinar e interdisciplinar efectuada por professores e outros técnicos de educação, nos casos em que uma programação individualizada pode contribuir para o sucesso educativo dos alunos.

47 — A avaliação especializada é feita, no 1.º ciclo, por solicitação do conselho escolar, mediante proposta do professor e, no 2.º e 3.º ciclos, por solicitação do conselho de turma, mediante proposta do director de turma.

48 — Na avaliação especializada participam os professores intervenientes no processo de ensino e de aprendizagem, sendo os encarregados de educação previamente ouvidos pelos técnicos de educação cuja intervenção o presidente do conselho de turma entenda conveniente.

49 — A programação individualizada e o correspondente itinerário de formação, recomendados no termo desta modalidade de avaliação, serão feitos com o conhecimento e acordo prévio dos encarregados de educação.

50 — No 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, cabe ao conselho directivo, ou ao director executivo, ouvido o conselho pedagógico e o encarregado de educação, criar as condições necessárias à implementação e controlo periódico das medidas previstas no numero anterior ou a suspensão das mesmas.

Efeitos da avaliação

Progressão e retenção

51 — O efeito da avaliação sumativa é, por norma, a progressão dos alunos, devendo a decisão sobre uma eventual retenção ocorrer, ordinariamente, no final de cada ciclo, assumindo carácter eminentemente pedagógico.

52 — A retenção consiste na manutenção do aluno no ano de escolaridade a que se reporta a avaliação, podendo traduzir-se na repetição de todo o plano de estudos desse ano ou no cumprimento de um plano de apoio específico que integre as disciplinas ou áreas disciplinares em que o aluno não demonstrou satisfazer os objectivos mínimos.

53 — Considera-se que o aluno é passível de retenção quando a avaliação sumativa revelar um grande atraso em relação aos objectivos e capacidades definidas, a nível central e local, para esse ano ou ciclo.

54 — A decisão da retenção tem sempre carácter excepcional, depois de se ter esgotado o recurso a apoios e complementos educativos, devendo, portanto, revestir-se de especial cuidado para garantir a sua necessidade, utilidade e justiça.

55 — A decisão de retenção é da competência do professor, no 1.º ciclo, e do conselho de turma, no 2.º e 3.º ciclos, devendo o respectivo presidente elaborar um relatório que contemple uma proposta sobre o disposto no n.º 52, a ser executada no ano lectivo seguinte.

56 — Compete ao conselho pedagógico, ou ao conselho de escola, no 1.º ciclo, aprovar o relatório referido no número anterior, bem como acompanhar e avaliar a sua execução.

Retenção repetida

57 — Sempre que, no decurso de uma avaliação sumativa, se concluir que um aluno que já foi retido em qualquer ano de escolaridade não possui as condições necessárias à sua progressão, deve o mesmo ser submetido a uma avaliação especializada que ponderará as vantagens educativas de nova retenção.

58 — A proposta decorrente da avaliação referida no número anterior está sujeita a ratificação pelo conselho pedagógico, com base em relatório que inclua:

a) O processo individual do aluno;
b) Relatório contendo os pareceres decorrentes do disposto no n.º 3;
c) A referência aos apoios e complementos educativos aplicados;
d) Relatório dos contactos estabelecidos com os encarregados de educação que integre o parecer destes sobre a proposta de manutenção do aluno no mesmo ano;
e) O parecer dos serviços de psicologia e orientação, quando existam na escola;
f) O plano de apoio educativo específico, a ser executado no ano lectivo seguinte.

59 — Os encarregados de educação, enquanto intervenientes regulares do processo de avaliação, devem ser chamados a participar na análise e nas decisões produzidas no âmbito do disposto no número anterior, podendo recorrer para o director regional de educação, no caso de não concordância com a decisão de uma segunda retenção.

60 — O conselho directivo, o conselho escolar ou o director executivo coordenam a execução das recomendações decorrentes do processo de avaliação previsto nos números anteriores, sendo especialmente responsáveis pela promoção do sucesso educativo desses alunos.

61 — Visando contribuir para a igualdade de oportunidades de acesso e sucesso educativos, devem os órgãos próprios das escolas instituir actividades e medidas de apoio educativo, sempre que as mesmas se revelarem necessárias.

62 — As actividades e medidas de apoio e complementos educativos podem ser realizadas quer numa perspectiva disciplinar quer numa perspectiva interdisciplinar e transdisciplinar.

63 — Todos os órgãos próprios da escola devem disponibilizar os recursos materiais e humanos necessários, assegurando em tempo oportuno as condições de espaço e horário adequados a favorecer, de modo positivamente diferenciado, os alunos que frequentem os apoios e complementos educativos.

64 — As medidas de apoio educativo traduzem-se na implementação de planos de acção ou programas, compreendendo conteúdos e processos pedagógicos adequados, que o presidente do conselho de turma propõe e avalia, o conselho pedagógico aprova e o conselho directivo, ou o director executivo, coordena.

65 — As medidas de apoio educativo podem assumir uma, ou várias, das seguintes formas:

a) Um programa específico elaborado pelo professor da turma, no 1.º ciclo, da área disciplinar, no 2.º ciclo, e de disciplina, no 3.º ciclo;
b) Um programa interdisciplinar ou transdisciplinar, no 2.º e 3.º ciclos, proposto e coordenado pelo coordenador de ano dos directores de turma, no caso do modelo de gestão instituído pelo Decreto-Lei n.º 172/91, de 10 de Maio, ou pelo coordenador dos directores de turma, no caso do modelo de gestão instituído pelo Decreto-Lei n.º 769-A/76, de 23 de Outubro, e realizado por uma equipa integrada pelos professores das diversas disciplinas envolvidas;
c) Programas alternativos, podendo incluir a constituição de grupos de nível, propostos pelo conselho pedagógico e aprovados pelo conselho de escola ou área escolar, no caso das escolas abrangidas pelo Decreto-Lei n.º 172/91, de 10 de Maio.

66 — Os professores responsáveis pelas medidas de apoio educativo deverão apresentar ao director de turma, no final de cada trimestre, um relatório descritivo do aproveitamento de cada aluno, bem como parecer sobre a conveniência da manutenção, ou suspensão, das medidas aplicadas.

67 — O relatório previsto no número anterior deve ser apresentado ao coordenador de ano dos directores de turma, que o apresentará, acompanhado de parecer, ao conselho pedagógico, para efeitos de decisão.

Certificação

68 — Ao aluno do ensino público, ou do ensino particular e cooperativo com paralelismo pedagógico, que obtiver aprovação na avaliação sumativa final do 3.º ciclo será atribuído, pelo respectivo órgão de gestão, o diploma de ensino básico.

69 — Ao aluno que atingir a idade limite da escolaridade obrigatória e que tiver frequentado a escola, com assiduidade, deverá, mediante requerimento do próprio ou do respectivo encarregado de educação, ser mandado passar, pelo órgão de gestão da escola, certificado do cumprimento da escolaridade obrigatória.

70 — O disposto no número anterior não impede que o aluno que tenha cumprido a escolaridade obrigatória sem aprovação na avaliação sumativa final do 3.º ciclo se candidate à obtenção do diploma de ensino básico, mediante a prestação de provas de exame, realizadas a nível de escola, na qualidade de aluno autoproposto.

71 — Para a realização das provas referidas no número anterior os órgãos competentes da escola facultam, sempre que possível, um apoio específico ao aluno autoproposto.

72 — As provas de exame para alunos autopropostos serão objecto de regulamentação posterior.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GABINETE DO MINISTRO

Desp. 178-A/ME/93. — O Desp. Norm. 98-A/92, de 20-6, aprova um novo sistema de avaliação dos alunos do ensino básico, no qual sobressai um conjunto de dispositivos que visam contribuir para o sucesso educativo dos alunos e para a qualidade do sistema educativo. Decorrido um ano de aplicação daquele diploma e considerando os resultados decorrentes da sua aplicação nas escolas, no ano lectivo de 1992-1993, nos 1.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade, torna-se necessário reorganizar o quadro normativo respeitante às actividades e medidas de apoio educativo, por forma a assegurar a sua eficiência.

Neste contexto, o presente despacho tem como objectivo clarificar o conceito de apoio pedagógico, enunciar as modalidades e as estratégias de apoio aos alunos, precisar os poderes e as responsabilidades dos órgãos das escolas e da administração do sistema educativo e afectar os recursos e os meios necessários e possíveis para uma educação de qualidade.

Nestes termos, determino:

I

Objecto e âmbito

1 — O presente despacho visa os seguintes objectivos:

a) Enunciar as modalidades e as estratégias de apoio pedagógico aos alunos;
b) Precisar as competências dos órgãos da administração do sistema educativo no que ao apoio pedagógico se refere;
c) Permitir uma melhor afectação de meios e recursos que possibilitem a adopção de estratégias e a realização de actividades que promovam o sucesso educativo dos alunos.

2 — O presente despacho aplica-se aos alunos do ensino básico que necessitem de apoio pedagógico com vista ao sucesso educativo.

3 — O apoio pedagógico aplica-se, em termos prioritários, aos alunos do ensino básico que cumprem a escolaridade obrigatória e que revelem dificuldades ou carências de aprendizagem em qualquer área curricular. As actividades de apoio pedagógico devem, sempre que possível, ser planeadas, realizadas e avaliadas em diálogo com os pais ou encarregados de educação.

4 — As actividades de apoio pedagógico são de inscrição facultativa e de frequência obrigatória, devendo ser projectadas atendendo às necessidades do aluno ou do grupo de alunos.

5 — Os alunos perdem o direito à frequência das actividades de apoio pedagógico sempre que o seu responsável considere que a falta de assiduidade impede a consecução das aprendizagens empreendidas, dando conhecimento desse facto ao encarregado de educação.

II

Conceito de apoio pedagógico

6 — Para efeitos deste despacho, entende-se por apoio pedagógico o conjunto das estratégias e actividades concebidas e realizadas na escola no âmbito curricular e extracurricular, incluindo aquelas que são desenvolvidas no seu exterior, que contribuam para que os alunos adquiram os conhecimentos e as competências e desenvolvam as capacidades, atitudes e valores consagrados nos currículos em vigor.

7 — O conceito exposto no número anterior abrange programas específicos no âmbito das disciplinas ou áreas disciplinares, actividades de apoio pedagógico acrescido, programas de natureza interdisciplinar ou transdisciplinar, programas ou currículos alternativos, actividades de orientação educativa, actividades de complemento curricular, bem como qualquer programa, medida e organização pedagógica que os órgãos da escola entendam útil para possibilitar o sucesso educativo.

III

Modalidades e estratégias gerais de apoio pedagógico

8 — Com base na diversidade de experiências vividas nas escolas, o apoio pedagógico pode revestir, designadamente, as seguintes modalidades e estratégias:

a) O ensino diferenciado, no interior da sala de aula, integrando o mesmo currículo;
b) O grupo de nível de carácter temporário;
c) Os diferentes modos de organização da gestão de espaços e tempos lectivos;
d) Os currículos alternativos;
e) As salas de estudo dirigido, visando a resolução de problemas de aprendizagem e o apoio à realização dos trabalhos escolares;
f) Os programas específicos elaborados pelo professor da área disciplinar (2.º ciclo) ou da disciplina (3.º ciclo);
g) Programas interdisciplinares (no 2.º e 3.º ciclos), propostos pelo coordenador dos directores de turma ou pelos directores de turma responsáveis pela orientação educativa e pelo apoio pedagógico dos alunos de cada ano de escolaridade;
h) Os programas alternativos aprovados pelo conselho pedagógico ou pelo conselho de escola;
i) Os programas de entreajuda de alunos do mesmo ou de diferentes níveis de ensino;
j) Os programas de tutoria para apoio a estratégias de estudo, orientação e aconselhamento do aluno;
l) Os programas específicos de ocupação de tempos livres, incluindo os decorrentes da falta de professores, e de actividades de complemento curricular;
m) Os programas de compensação e actualização no início do ano escolar, nomeadamente no início de um novo ciclo.

9 — As diferentes modalidades e estratégias de apoio pedagógico são concebidas e realizadas tendo em conta as necessidades dos alunos, os recursos da escola, os objectivos a atingir e a análise da relação custo-benefício.

IV

Recursos

10 — Para a realização das modalidades e estratégias de apoio referidas, as escolas dispõem, para além dos saberes profissionais e dos programas de formação contínua, dos seguintes recursos:

a) Recursos humanos;
b) Recursos financeiros específicos e suplementares;
c) Apoio técnico-pedagógico a proporcionar pela administração do sistema educativo no nível regional.

V

Recursos humanos

11 — As escolas dos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico usufruem de um crédito horário global constituído por duas componentes:

a) O número de horas resultante do somatório das reduções da componente lectiva inerentes ao exercício dos cargos de delegado de disciplina, representante de grupo, subgrupo, disciplina ou especialidade, director de turma e coordenador dos directores de turma;
b) O número de horas equivalente a 7 % do número total de aulas curriculares semanais em funcionamento na escola, nos termos do disposto no n.º 1 do Desp. 19/SERE/88, de 7-7.

12 — O crédito horário global referido no número anterior é usado para o desenvolvimento do projecto educativo da escola, nomeadamente no que respeita à concepção, realização e avaliação do apoio pedagógico aos alunos com dificuldades de aprendizagem.

13 — O referido crédito horário global pode ser utilizado de modo flexível, nomeadamente no reforço da redução da componente lectiva de um director de turma por ano de escolaridade, tendo em vista o fortalecimento das actividades de orientação educativa dos alunos de cada ano de escolaridade.

13.1 — O reforço das reduções da componente lectiva mediante a realocação de horas de redução prevista no número anterior não pode exceder 30 % do total das horas referidas na alínea b) do n.º 11.

14 — Todas as modalidades de apoio pedagógico, nomeadamente as que carecem de reforço de redução da componente lectiva para o exercício das funções de orientação educativa dos alunos, têm de ser aprovadas pelo conselho pedagógico e ratificadas pelo órgão de gestão da escola.

15 — Para além dos professores e técnicos de educação afectos a cada escola, deve o órgão de gestão, sempre que tal se afigure necessário e pela ordem a seguir indicada:

a) Recorrer à colaboração dos serviços públicos de saúde e de assistência social existentes na localidade;
b) Proceder à aquisição temporária de serviços, no âmbito da gestão orçamental corrente;
c) Solicitar à direcção regional de educação respectiva a afectação pontual de recursos humanos tendo em vista a superação de problemas de aprendizagem.

16 — A solicitação referida na alínea c) do número anterior deve ser acompanhada de um programa específico de intervenção pedagógica que justifique a sua necessidade e relevância.

VI

Recursos financeiros

17 — Na elaboração do projecto de aplicação do orçamento anual o órgão de gestão deve considerar elegíveis despesas correntes e de capital que se afigurem imprescindíveis para realizar as estratégias e modalidades de apoio pedagógico aos alunos que dele necessitem.

18 — A gestão orçamental deve privilegiar a satisfação das necessidades de apoio pedagógico.

VII

Apoio técnico-pedagógico a proporcionar pelos serviços regionais de educação

19 — Em situações especiais devidamente caracterizadas, o órgão de gestão, após parecer do conselho pedagógico, poderá solicitar à direcção regional de educação respectiva as medidas ou os recursos suplementares que entender necessários para o desenvolvimento de projectos ou estratégias de apoio pedagógico aos alunos.

20 — Consideram-se situações especiais, entre outras, as seguintes:

a) Inserção da escola em zonas de graves carências sócio-económicas e culturais;
b) Existência de turmas com programas alternativos, designadamente ao abrigo dos Desps. 68/SERE/90, de 16-11, e 32/SERE/91, de 7-9;
c) Elevada frequência de alunos integrados em programas de apoio no âmbito da educação especial;
d) Escolas com população escolar com especiais necessidades de integração multicultural.

21 — A solicitação referida no número anterior insere-se na medida 5 do Sistema de Incentivos à Qualidade da Educação, aprovado pelo Desp. 113/ME/93, de 23-6, e deve ser acompanhada de uma memória descritiva e justificativa dos projectos ou estratégias a implementar, para além de outros elementos aí referidos.

VIII

Direcção e gestão do apoio

22 — Compete ao conselho directivo ou ao director executivo, ouvido o conselho pedagógico, assegurar a direcção e gestão do apoio pedagógico.

23 — As diversas modalidades de apoio pedagógico aos alunos são organizadas, realizadas e avaliadas pelos diferentes órgãos e intervenientes no processo, segundo os critérios da adequação aos problemas diagnosticados, a relação objectivos/recursos disponíveis e os efeitos positivos nas aprendizagens.

24 — Os órgãos e intervenientes no processo de organização, gestão e avaliação do apoio pedagógico são pessoal e institucionalmente responsáveis pelo uso dos recursos disponibilizados.

IX

Avaliação do apoio pedagógico

25 — O apoio pedagógico deve ser objecto de uma avaliação contínua, participada e formativa e de uma avaliação global no final do ano lectivo, a ser realizada sob a coordenação do conselho pedagógico.

26 — A avaliação deve fornecer elementos que permitam ajuizar da qualidade dos processos de apoio e da qualidade dos resultados obtidos.

27 — Até ao dia 15-7 de cada ano lectivo e após a avaliação global aprovada pelo conselho directivo ou pelo director executivo, o órgão de gestão enviará à direcção regional de educação respectiva um relatório sucinto de avaliação, em que se descrevam as características dos processos utilizados e os resultados alcançados, dele devendo dar obrigatoriamente conhecimento à associação de pais e encarregados de educação da escola.

28 — A Inspecção-Geral da Educação procederá ao acompanhamento regular e sistemático da organização e gestão do apoio pedagógico, elaborando anualmente um relatório.

X

Disposição final

29 — São revogadas as disposições do Desp. 8/SERE/89, de 8-2, que contrariem o disposto no presente despacho.

30-7-93. — O Ministro da Educação, *António Fernando Couto dos Santos.*

ANEXO G

Excertos do Programa de Matemática do Ensino Preparatório

g) – Escrita e cálculo de expressões numéricas muito simples em que intervenham as operações já estudadas.

Observações: A prioridade da multiplicação em relação à adição e à subtracção deverá ser evidenciada por meio de problemas da vida corrente.

h) – Noção de potência de um número.
- Adição de potências.
- Subtracção de potências.
- Multiplicação de potências.

Observações: As operações serão efectuadas recorrendo à noção de potência.
Não se pretende, neste momento, estabelecer quaisquer propriedades do produto de potências.

i) – Divisão de números:
- Introdução do conceito de divisão como operação inversa da multiplicação.
- Casos particulares da divisão: dividendo igual ao divisor; divisor igual a 1; dividendo igual a zero.
- Divisão de um produto de dois números por um deles, aplicando a própria definição de divisão.
- Divisão de um produto de três ou mais números por um deles.
- Propriedade relativa à divisão de um produto por um número, quando um dos factores é divisível por esse número.
- Jogos de pensar em números; operadores dos tipos multiplicativo e seu inverso.
- Problemas concretos conducentes a equações dos tipos: $a \times x = b$, $x : a = b$ e $a : x = b$; resolução destas equações.
- Casos em que a divisão exacta não é possível.
- Conceito de divisão inteira. Escrita da identidade da divisão inteira.
- Determinação dos restos possíveis em relação a um determinado divisor; representação das diferentes classes de restos.
- Dedução intuitiva dos critérios para determinar os restos da divisão de um número por 2,5,10 e 100.
- Noção de submúltiplo ou de divisor de um número.

j) – Escrita e cálculo de expressão numérica muito simples em que intervenham as operações já estudadas.

Observações: O conceito de divisão inteira deverá ser introduzido com base em concretizações.
Embora o uso das reticências na representação de um conjunto infinito não seja correcto, poderá aceitar-se a propósito da representação das diferentes classes de resto, por motivos de ordem didáctica.
A prioridade da divisão em relação à adição e à subtracção deverá ser evidenciada por meio de problemas da vida corrente.
O cálculo do valor de expressões numéricas deverá acompanhar o estudo das diferentes rubricas e não ser feito apenas e exaustivamente quando indicado expressamente no programa. Só assim será possível a aquisição, por parte dos alunos, dum certo automatismo de cálculo.

NÚMEROS RACIONAIS

- Operadores do tipo partitivo: **um meio de, um terço de,** etc.: uso da forma de fracção na representação destes operadores.
- Numerais partitivos: **um meio, um terço,** etc..
- Operadores do tipo partitivo-multiplicativo: **dois terços de, três quartos de,** etc.; uso da forma de fracção na representação destes operadores.
- Numerais partitivo-multiplicativos: **dois terços, três quartos, etc.**.
- **Correspondência entre a preposição de** e o sinal **x** na representação dos operadores dos tipos partitivo e partitivo-multiplicativo.
- Resolução de problemas aplicando operadores inversos.
- Aplicação de operadores partitivos e partitivo-multiplicativos a rectângulos, círculos e segmentos de recta.
- Operadores equivalentes; fracções equivalentes. Noção de número fraccionário (todas as fracções equivalentes representam o mesmo número).
- Aplicação da propriedade da equivalência de fracções em exercícios de completação de identidades.
- Distinção entre fracção ordinária e fracção decimal.

– Transformação de fracções ordinárias de denominador 2,5,50,20,25 e 4 em fracções decimais equivalentes.
– Outra representação, usando vírgulas, dos números representados por fracções decimais.
– Fracções que representam números menores que 1, números iguais a 1, números maiores que 1. Fracções que representam números inteiros; fracções de denominador 1. Representação sob forma mista de números fraccionários maiores que 1.
– **O conjunto dos números racionais** como reunião de dois conjuntos disjuntos: o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números fraccionários.
– Comparação de números racionais em problemas simples que não obriguem a substituição de fracções por outras equivalentes.

Observações: Na resolução de problemas que envolvam a aplicação de operadores inversos de operadores de tipo partitivo-multiplicativo dever-se-á recorrer a esquemas.
A propósito de numerais decimais far-se-á a revisão de:
– parte inteira e parte decimal;
– unidades decimais;
– leitura de numerais decimais;
– números de décimos, centésimos, etc. contidos num dado número. Entende-se por **numeral decimal** qualquer expressão do sistema de numeração decimal; não existem números decimais, mas apenas números racionais, que, eventualmente, podem ser representados por numeros decimais.

ELEMENTOS DE GEOMETRIA

a) – Subconjuntos do espaço ocupados por corpos materiais. Observação de modelos de sólidos geométricos: cubos, paralelepípedos, prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Os sólidos geométricos na técnica, na arte e na natureza: observação de gravuras, cristais, pedras ou vidros facetados, etc..

b) – A **superfície** (ou **fronteira**) de um sólido concebida como parte do sólido que separa o **interior** do **exterior**. Apresentação de objectos em que a superfície não é fronteira.

– Noção de superfície sugerida por objectos de espessura desprezável.
– Superfícies abertas e superfícies fechadas (convirá que as superfícies fechadas se possam obter por ligações de superfícies abertas e sejam adaptáveis a superfícies de sólidos da colecção).
3 – **Bordo** de uma superfície aberta; observação da linha ou das linhas de que é formado.

c) – Noção de linha no espaço sugerida por modelos de fios metálicos pouco deformáveis. Linhas abertas e linhas fechadas (convirá que
5 as linhas fechadas se possam adaptar ao bordo das superfícies abertas da colecção).
– Noção intuitiva de recta no espaço. A recta como primeiro exemplo de linha ilimitada no espaço.
– Extremos de uma linha aberta: pontos.
– Linhas quebradas, linhas curvas e linhas mistas.

d) – Concepção do plano: maneira de verificar se determinada superfície é ou não plana. Prolongamento ideal de uma superfície plana
4 no espaço. O plano como primeiro exemplo de superfície ilimitada (que se distingue pela propriedade de conter toda a recta que passa por dois pontos distintos quaisquer da superfície). O semi-plano.

e) – Ordenação dos pontos de uma recta (comparação **eventual** com a ordem no tempo, expressa pelas locuções prepositivas "antes de" e "depois de"). Noção de semi-recta.
– Uso da preposição "entre" aplicada a pontos de uma recta. O segmento de recta como conjunto formado por dois pontos distintos (os extremos) e por todos os pontos situados em linha recta **entre** os primeiros.

6 f) – Linhas fechadas simples traçadas em superfícies planas. Noções de "ponto interior" e de "ponto exterior" em relação à linha: o conjunto formado pelos pontos interiores à linha e pelos pontos da linha é uma superfície limitada, que tem essa linha por **fronteira** (chamada bordo da superfície no espaço). Exemplos concretos: fronteira de um país (considerada num mapa); periferia de uma cidade; contorno de uma figura; limite (ou extrema) de uma propriedade, etc..

o) – Ângulos internos de um polígono. Etimologia das palavras "triângulo", "quadrilátero", "pentágono", "hexágono", etc., e "polígono". Polígonos regulares. Classificação dos triângulos quanto a lados e quanto a ângulos (estudo elementar).

2.2 – 2.º ANO

ACERTO DE PROGRAMAS

Chama-se a atenção dos professores para os seguintes pontos:

a) – As rubricas
- Determinação dos restos possíveis em relação a um determinado divisor; representação das diferentes classes de restos,
- Dedução intuitiva dos critérios para determinar os restos da divisão de um número por 2, 5, 10 e 100, que passaram a ser incluídas no esquema programático do 1.º Ano, deverão ser estudadas no 2.º Ano, no ano lectivo de 1974/75.

b) – O programa de Geometria do 1.º Ano que, duma meneira geral, não foi totalmente cumprido no ano lectivo de 1973/74, deverá ser oportunamente retomado.

CONJUNTOS E NÚMEROS INTEIROS

a) – Noção de submúltiplo ou divisor de um número (revisão).
- Conjunto dos divisores de um número.
- Conjunto dos divisores comuns de dois ou mais números (em exemplos simples, aplicando a intersecção de conjuntos). **Máximo divisor comum** de dois ou mais números.
- Números primos entre si.

Observações: O estudo destas rubricas permitirá a revisão de noções sobre conjuntos: representação de conjuntos pela notação de chavetas, uso de diagramas, relações de pertença e não pertença, relações de inclusão, operação intersecção e operação reunião.

A noção de **número primo** surgirá a propósito da exploração da rubrica conjunto dos divisores de um número.
Cálculo mental do m.d.c. de dois números em casos muito simples.

b) – Noção de múltiplo de um número (revisão).
- Conjunto dos múltiplos de um número.
- Conjunto dos múltiplos comuns de dois ou mais números (em exemplos simples aplicando a intersecção de conjuntos). **Mínimo múltiplo comum** de dois ou mais números.

Observações: O estudo destas rubricas permitirá, novamente, a revisão de noções sobre conjuntos.
Embora o uso das reticências na representação de um conjunto infinito não seja correcto, poderá aceitar-se a propósito da representação de conjuntos de múltiplos, por motivos de ordem didáctica. No estudo do mínimo múltiplo comum de dois ou mais números, os alunos deverão aperceber-se do motivo da exclusão do zero.
Cálculo mental do mínimo múltiplo comum em casos muito simples.

NÚMEROS RACIONAIS

a) – Revisão dos conceitos de
- fracção
- fracções equivalentes
- número racional

- Aplicação da propriedade de equivalência de fracções
  - na simplificação de fracções
  - na substituição de fracções por outras equivalentes com o mesmo denominador para comparar os números por elas representados.

Observações: Os exercícios que envolvam a substituição de fracções por outras equivalentes com o mesmo denominador devem limitar-se a casos simples, em que o cálculo do denominador comum possa fazer-se mentalmente.

b) Adição e subtracção de números racionais:

- Exemplos concretos e progressivos que levem o aluno a admitir intuitivamente os conceitos de soma e de diferença de números racionais.
- Adição e subtracção de números racionais em casos pouco laboriosos.
- Adição e subtracção de números racionais representados por fracções decimais. Tradução desses cálculos em escrita abreviada, usando vírgulas, a fim de justificar o cálculo já aprendido na Escola Primária, e reconhecido agora como caso particular do cálculo com numeros racionais.
- Verificação da permanência das propriedades da adição já conhecidas no campo dos inteiros. Uso de letras nas fórmulas que exprimem as propriedades da adição.

Observações: No estudo da adição e subtracção de números racionais deverão ser considerados os casos em que:

- os números são representados por fracções com o mesmo denominador;
- um dos números é inteiro e o outro é fraccionário;
- os números são representados por fracções com diferentes denominadores (o cálculo de um denominador comum deverá fazer-se mentalmente).

A verificação, nas aulas, da permanência das propriedades da adição deverá fazer-se de modo a aproveitar as tarefas de casa, devidamente programadas nesse sentido.

c) – Expressões numéricas muito simples, em que intervenham as operações adição e subtracção e quando muito parênteses curvos; uso de numerais mistos e numerais decimais.

d) – Multiplicação de números racionais

- Com base em exemplos concretos e recorrendo à aplicação de operadores partitivo-multiplicativos a figuras geométricas, concluir a regra do cálculo do produto de dois números racionais.
- Multiplicação de números racionais representados por fracções decimais. Tradução desses cálculos em escrita abreviada a fim de

justificar o cálculo já aprendido na Escola Primária e reconhecido agora como caso particular do cálculo com números racionais.

- Verificação da permanência das propriedades da multiplicação já conhecidas no campo dos inteiros.
- Propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtracção, introduzida primeiro com inteiros e depois generalizada para os racionais.
- Uso de letras na escrita das fórmulas que exprimem as propriedades da multiplicação.

Observações: Ao fazer-se o estudo da multiplicação de números racionais e ao considerar-se o caso do produto de um número inteiro por um número fraccionário deverá atender-se à definição de multiplicação.

e) – Expressões numéricas muito simples onde intervenham as operações adição, subtracção e multiplicação; uso de numerais mistos e de numerais decimais.

f) – Noção de potência no caso de a base ser um número inteiro (revisão).

- Noção de potência no caso da base ser um número representado por uma fracção.
- Propriedades da potenciação, estabelecidas primeiro quando as bases são números inteiros e depois generalizadas para qualquer base.

g) – Divisão de números racionais:

- Verificação do facto da equação a x x = b ($a \neq 0$), quando a e b são números inteiros, ter agora sempre solução, mesmo quando b não seja divisível por a; indicação da solução sobre as duas formas equivalentes a: b e $\frac{a}{b}$.
- Divisão de um número racional por outro como operação inversa da multiplicação. Regra do cálculo do quociente da divisão de dois números racionais (dividir um número racional por outro equivale a multiplicar o dividendo pelo inverso do divisor).
- Divisão de números representados por fracções decimais.
- Consciencialização de que a divisão exacta entre números racionais (com o divisor diferente de zero) é sempre possível.
- Fracções de termos fraccionários.

Observações: A divisão entre números racionais pode surgir da necessidade de resolver problemas conducentes a uma equação do tipo $a \times x = b$. Ao resolvê-la, atendendo a que a divisão é a operação inversa da multiplicação, o aluno deparará com um quociente de números racionais, que não saberá cálcular. Contudo, se resolver o problema apoiando-se num esquema auxiliar e recorrendo ao operador inverso de um operador partitivo-multiplicativo, encontrará um produto. Igualando os resultados obtidos e considerando ainda outros exemplos semelhantes, concluirá a regra do cálculo do quociente de dois números racionais.

Na transformação de uma fracção de termos fraccionários numa fracção simples deve aplicar-se a regra do cálculo do quociente de dois números racionais. De qualquer modo não será de insistir em problemas deste tipo.

A propósito do estudo destas rubricas surgirá a oportunidade de considerar:

- casos de divisões que conduzam a quociente com vírgula e resto zero;
- casos em que nunca se possa chegar a resto zero (conducentes à noção intuitiva de dízima periódica);
- arredondamentos de numerais decimais (determinação de valores aproximados de números a menos de uma décima e a menos de uma centésima).

h) – Expressões numéricas simples onde intervenham as operações com racionais já estudadas; uso de numerais decimais e de numerais mistos.

i) – Problemas concretos conducentes a equações dos tipos $a \times x = b$, $x : a = b$ e $a : x = b$; resolução destas equações.

j) – Igualdades numéricas do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Introdução das expressões razão, proporção, meios e extremos.

– Verificação de que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se e só se $a \times d = b \times c$.

– Resolução de equações do tipo das proporções.

Observações: Na resolução de equações do tipo das proporções aplicar-se-ão sempre as regras de cálculo relativas a números racionais; os dados deverão ser, primeiramente, números inteiros e, depois números fraccionários, especialmente na forma decimal.

GRANDEZAS E PROPORCIONALIDADE

a) – Correspondência entre o conjunto de valores de uma grandeza e o conjunto de valores correspondentes de outra; noção de proporcionalidade directa a partir de casos em que é constante a razão entre os valores correspondentes dessas grandezas.

Observações: Para introduzir a noção de proporcionalidade devem considerar-se exemplos adequados da vida corrente.

A correspondência entre o conjunto dos perímetros de círculos e o conjunto dos comprimentos dos diâmetros correspondentes poderá ser um exemplo a considerar.

Será de estudar a correspondência entre o conjunto dos espaços percorridos por um móvel e o conjunto dos tempos gastos em os percorrer, no caso de ser constante a razão entre as medidas do espaço e do tempo correspondentes; significado da constante de proporcionalidade (velocidade).

b) – Problemas de composição de substâncias e de companhia.

c) – Noção de percentagem.
- Equivalência de expressões tais como: 38% = 38/100 = 0,38.
- Cálculo de percentagens em problemas directos e ligados à vida real.
- Interpretação de gráficos circulares. Gráficos de barras ou colunas.

d) – Cálculo do juro que rende um capital no período de um ano com uma determinada taxa. Cálculo do **juro simples** ao fim de dois anos, três anos, etc.. Cálculo dos juros em períodos que não sejam múltiplos do ano, mas que sejam múltiplos do mês.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abreu, G. (1993). *The relationship between home and school mathematics in a farming community in rural Brazil.* Tese de Doutoramento, University of Cambridge, Cambridge.

Ainscow, M. (1989). Special education in change: themes and issues. In Mel Ainscow (Ed.), *Special Education in Change.* Londres: David Fulton Publishers, Cambridge Institute of Education.

Ainscow, M. (1991). Effective Schools for All: An Alternative Approach to Special Needs in Education. In Mel Ainscow (Ed.), *Effective Schools for All.* Londres: David Fulton Publishers, Cambridge Institute of Education.

Almeida, L., Fernandes, J. A. & Mourão A. P. (1993). *Ensino-Aprendizagem da Matemática.* Riba d'Ave: Didaxs, Cooperativa de Ensino.

Alverca, C. M. (1990). *Estudo sobre a ocorrência de erros na resolução de situações problemáticas na Matemática.* Tese de Mestrado não publicada, Instituto Superior de Psicologia Aplicada, Lisboa.

Amaro, G. (1985). *Teaching selected rational number concepts using a geoboard model approach.* Tese de Mestrado não publicada, Universidade de Boston.

Ana, P. M. (1988). *Teaching Mathematics in Mixed Ability Classes.* Tese de Mestrado na Universidade de Londres. Lisboa: APM.

Anderson, J. R. (1990). *Cognitive Psychology and its Implications.* New York: W.F. Freeman and Company.

Artigue, M. & Douady, R. (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue Française de Pédagogie,* 76, Julho-Agosto-Setembro, 69-88.

Associação de Professores de Matemática (1985). *Agenda para Acção-Recomendações para o Ensino da Matemática nos anos 80.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do Currículo de Matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Bastien, C. (1987). *Schèmes et stratégies dans l'activité cognitive de l'enfant,* Paris: Presses Universitaires de France.

Bednarz, N. & Garnier, C. (1989). Introduction. In In N. Bednarz & C. Garnier (Org.), *Construction des savoirs - Obstacles & conflits.* Montréal: Agence d'ARC.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* London: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of racional numbers: a clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education,* 15 (5), 323-341.

Behr, M., Wachsmuth, I., & Post, T. R. (1985). Construct a sum: a measure of children's understanding of fraction size. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (2), 120-131.

Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio and Proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, A Project of the NCTM.* New York: Macmillan Publishing Company.

Bell, A. (1991). *Learning Process in Mathematics - Observation and Evaluation.* Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.

Bennett, N. (1991). The Quality of Classroom Learning Experiences for Children with Special Educational Needs. In Mel Ainscow (Ed.), *Effective Schools for All.* Londres: David Fulton Publishers, Cambridge Institute of Education.

Bennett, A. & Williams H. (1992). Whatt will happen if ...?: an active approach to mathematics teaching. In T. Booth, W. Swan, M. Masterton & P. Potts (Eds.), *Curricula for Diversity in Education.* Londres: Routledge, The Open University.

Blaye, A. (1987). Organization du produit de deux ensembles: influence des interactions sociales entre pairs sur les procédures de résolution et les performances individuelles. *European Journal of Psychology of Education*, 1(4), 29-43.

Bishop, A. J. (1988). Mathematics Education in its Cultural Context, *Educational Studies in Mathematics*, 19, 179-191.

Borasi, R. (1987). Exploring Mathematics Through the Analysis of Errors. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), 2-8.

Bouvier A. (1987). The Right to Make Mistakes. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), 17-25.

Botelho, D. (1991). *Interacção e desenvolvimento: análise procedimental de situações de resolução e co-resolução de problemas.* Tese de mestrado não publicada, Instituto Superior de Psicologia Aplicada, Lisboa.

Bryant, P. (1991). Desenvolvimento cognitivo: Algumas questões que subsistem. In L. S. Almeida (Ed.), *Cognição e aprendizagem escolar.* Porto: Associação dos Psicólogos Portugueses.

Bronckart, J. P. (1985). Vygotsky, une oeuvre en devenir. In B. Schneuwly & J. P. Bronckart (Eds.), *Vygotsky aujourd'hui.* Paris: Delachaux et Niestlé.

Brown, M. (1981). Place value and decimals. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: Murray.

Brown, A. L. & Ferrara, R. A. (1985). Diagnosing zones of proximal development. In James V. Wertsch (Ed.), *Culture Communication and Cognition.* Cambridge:University Press.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18 (1), 32-42.

Brown, M. (1992). Desenvolvimentos em Investigação em Educação Matemática no Reino Unido. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & J. P. Ponte (Org.), *Educação Matemática.* Lisboa: IIE e SEM da SPCE.

Brousseau, Guy (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In N. Bednarz & C. Garnier (Org.), *Construction des savoirs - Obstacles & conflits.* Montréal: Agence d'ARC.

Brunner, J. (1966). *Towards a theory of instruction.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Brunner, J. (1983). *Le développement de l'enfant. Savoir-faire, savoir-dire* Paris: Presses Universitaires de France.

Brunner, J. (1990). *Actes of Meaning.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Brunner, J. (1985). Vygotsky: a historical and conceptual perspective. In James V. Wertsch (Ed.), *Culture Communication and Cognition.* Cambridge: University Press.

Carraher, T.N., Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (1988). *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez Editora.

Carugati, F. (1988). Perspectives: Interactions, déstabilisations, conflits. In A. N. Perret-Clermont & M. Nicolet (Eds.), *Interagir et connaître - enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif.* Fribourg: Del Val.

César, M. (1994). *O papel da interacção entre pares na resolução de tarefas matemáticas. Trabalho em díade vs. trabalho individual, em contexto escolar.* Tese de Doutoramento não publicada, Universidade de Lisboa.

Cole, M. (1985). The zone of proximal development: where culture and cognition create each other. In James V. Wertsch (Ed.), *Culture Communication and Cognition.* Cambridge: University Press.

Cortes, A. (1993). Analysis of Errors and a Cognitive Model in the Solving of Equations. In *Proceedings of the Seventeenth International Conference of Psychology of Mathematics Education.* Tsukuba, Ibaraki, Japão, I,146-153.

D' Andrade, R. G. (1989). Cultural Cognition. In M. I. Posner (Ed.), *Foundations of Cognitive Science.* Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

D' Ambrósio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the History and Pedagogy of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 5 (1), 44-48.

De Corte, E. & Verschaffel, L. (1989). Teaching Word Problems in the Primary School: What Research Has to the Teacher. In B. Greer & Mulhern (Eds.), *New Directions in Mathematics Educations.* London/New York: Routledge.

De Corte, E. (1990). Toward powerful learning environments for the aquisition of problem solving skills. *European Journal of Psychology of Education,* V (1), 5-19.

De Corte, E. (1993). Fostering Cognitive Growth a Perspective from Research on Mathematics Learning and Instruction. COmunicação apresentada no American Educational Research Association, Atlanta, USA, Abril 1993.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1984). *Children Learning Mathematics.* Oxford: Chanel Educational Lda.

Doise W. & Mugny G. (1981). *Le développement social de l'intelligence.* Paris: Inter-Editions.

Doise W. (1988). Pourquoi le marquage social?. In A.-N. Perret-Clermont & M. Nicolet (Eds.), *Interagir et connaître - enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif.* Fribourg: Del Val.

Doise W. & Hanselmann, C. (1990). Interaction sociale et acquisition de la conservation du volume. *European Journal of Psychology of Education,* V, 1, 21-32.

Efklides, A. (1991). Aptidões cognitivas e o desempenho na matemática. In L. S. Almeida (Ed.), *Cognição e aprendizagem escolar.* Porto: Associação dos Psicólogos Portugueses.

Engelmann, S., Carnine, D., & Steely, D. (1991). Making Connections in Mathematics. *Journal of Learning Disabilities,* 24 (5), 292-303.

Ernst, P. (1989). *Mathematics Teaching the State of the Art.* UK: The Falmer Press.

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes.* Paris: Delachaux et Niestlé.

Farrell, M. A. (1993). Aprender com os alunos. *Educação e Matemática,* 28, 25-27.

Fernandes, M. H. (1990). *Efeitos de três métodos de ensino na aprendizagem do conceito de número racional no segundo ciclo do Ensino Básico* (Tese de Mestrado na Universidade do Minho). Lisboa: APM.

Foxman, D., Ruddock, G. & Thorpe J. (1989). *Graduated Tests in Mathematics.* Windsor: NFER-NELSON Publishing Company Ltd..

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht, Holland: D. Riedel.

Gilly, M., Fraisse, J. & Roux, J. P. (1988). Résolution de problèmes en dyades et progrès cognitifs chez des enfants de 11 à 13 ans. In A. N. Perret-Clermont & M. Nicolet (Eds.), *Interagir et connaître - enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif.* Fribourg: Del Val.

Gilly, M. (1989). À propos de la théorie du conflit socio-cognitif et des mécanismes psycho-sociaux des constructions cognitives: perspectives actuelles et modéles explicatifs. In N. Bednarz & C. Garnier, *Construction des savoirs - Obstacles & conflits.* Montréal: Agence d'ARC.

Gimenez, J. (1994a). Del fraccionamiento a las fracciones-Contribución a la mejora del status de los referentes culturales numéricos en el aula. *Revista de Didàctica de las Matemáticas*, 1, Julho, 101-117.

Gimenez, J. (1994b). Da sala de aula à epistemologia passando pela história. O caso das fracções. *Pro-Posições*, Setembro.

Gimenez, J. (1994c). Les fracciones com a concepte. *Didàctica, 3i4ix*, 14-18.

Ginsburg, H. P. (1983). *The development of mathematical thinking*. New York: Academic Press.

Giordan, A (1989). Quelques obstacles à l'utilization didactique du concept d'obstacle épistémologique. In N. Bednarz & C. Garnier (Org.), *Construction des savoirs-Obstacles & conflits*. Montréal: Agence d'ARC inc.

Godino, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*, 2 (2), 69-79.

Goodnow, J. & Warton, P. M. (1992). Contexts and cognitions: taking a pluralist view. In P. Light & G. Butterworth, *Context and Cognition*. London: Harvester-Wheatsheaf.

Greer, B. (1989). Cognitive Psychology and Mathematics Education: convergence, Collaboration, and Challenge. In B. Greer & G. Mulhern (Eds.), *New Directions in Mathematics Education*. London: Routledge.

Harrison, J. & Greer, B. (1993). Children's Understanding of Fractions in Hong Kong and Northern Ireland. In *Proceedings of the Seventeenth International Conference of Psychology of Mathematics Education*. Tsukuba, Ibaraki, Japão, III, 146-156.

Hart, K. M. (Ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: John Murray.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies & errors*. Windsor, England: NFER-NELSON Publishing Company.

Hart, K. M. (1988). Ratio and Proportion. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hart, K. M. (1993). Confidence in Success. In *Proceedings of the 17th International Conference of Psychology of Mathematics Education*. Tsukuba, Ibaraki, Japão, I, 17-31.

Hart, S. (1992). Collaborative classrooms. In T. Booth, W. Swann, M. Masterton & P. Potts (Ed.), *Curricula for Diversity in Education*. Londres: Routledge, The Open University.

Harel, G., Behr, M., Post, T. & Lesh, R. (1992). The Blocks Task: Comparative Analyses of the Task With Other Proportion Tasks and Qualitative Reasoning Skills of Seventh-Grade Children in Solving the Task. *Cognition and Instruction*, 9(1), 45-96.

Hasemann, K. (1986). Analysis of Fraction Errors by a Model of Cognitive Science. *European Journal of Psychology of Education*, I (2), 57-66.

Hennessy, S. (1993). The Stability of Children's Mathematical Behavior:When is a Bug Reality a Bug? *Learning and Instruction*, 3, 315-338.

Hiebert, J. & Wearne D. (1985). A Model of Student's Decimal Computation Procedures. *Cognition and Instruction*, 2 (3&4), 175-205.

Hiebert, J. & Wearne D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. & Wearne D. (1988). Instruction and Cognitive Change in Mathematics. *Educational Psychologist*, 23(2), 105-117.

Hoffer, A. R. (199 ?). Ratios and Proportional Thinking. In T. R. Post (Ed.), *Teaching Mathematics in Grades K-8 - Research Based Methods*. Boston: Allyn and Bacon, inc.

Hunting, R. P. (1986). Rachel's schemes for constructing fraction knowledge. *Educational Studies in Mathematics*,17, 49-66.

Janvier, C. & Vergnaud G. (1994). Working Group on Representations. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.III, pp.208-215). Lisboa, Portugal.

Jencks, S. M., Peck, D. M., & Chatterley, L. J. (1980). Why Blame the Kids? We Teach Mistakes! *Arithmetic Teacher*, Outubro.

Julo, J. (1990). Surface Features, Representations and Tutorial Interventions in Mathematical Problem Solving. *European Journal of Psychology of Education*, V, 3, 255-272.

Karplus, R., & Karplus, E. F. (1972). Intellectual Development Beyond Elementary School III: Ratio, A Longitudinal Study. *School Science and Mathematics*, Novembro, Vol. LXXII.

Karplus, E. F., Karplus, R., & Wollman, W. (1974). Intellectual Development Beyond Elementary School IV: Ratio, The Influence of Cognitive Style. *School Science and Mathematics*, 74 (6), 476-482.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983a). Early adolescents' proporcional reasoning on "rate". *Educational Studies in Mathematics*, 14, 219-233.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. K. (1983b). Proportional reasoning in early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. London: Academic Press.

Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. A. Lesh & D. A. Bradbard (Eds.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* Columbus, OH: State University, ERIC/SMEAC.

Kieren, T. & Nelson D. (1978). The Operador Construct of Rational Numbers in Chilhood and Adolescence - An Exploratory Study. *The Alberta Journal of Educational Research*, IV, 1, March, 22-30.

Kieren, T. & Southwell, B. (1979a). The Development in Children and Adolescents of the Construct of Rational Numbers as Operators. *The Alberta Journal of Educational Research*, V, 4, Dezembro, 234-247.

Kieren, T. & Ganson, R. E. (1979b). Operador and Ratio Thinking Strutures with rational Numbers - A Theoretical and Empirical Exploration. (versão policopiada).

Kieren, T. E. (1980a). Knowing Rational Numbers: Ideas and Symbols. In M. M. Linquist (Ed.), *Selected Issued in Mathematics Education*. Chicago: National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. E. (1980b). The Rational number construct: Its Elements and Mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning*, Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1985). Mathematical knowledge building: The mathematics teacher as consulting architect. In A. Bell, B. Low & J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, Research & Practice in Mathematical Education*, (Working group reports and collected papers from ICME 5). Nottingham, U.K.: Shell Centre for Mathematical Education.

Kieren, T., Nelson, D. & Smith, G. (1985). Graphical Algoritms in Partitioning Tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 4 (1), 25-36.

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 53-92), Laurence Erlbaum Associates, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.: Reston, Virgínia.

Kirby, J. (1984). *Cognitive Strategies and Educational Performance*. London, Academic Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice. Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge: Cambridge University Press.

Leal, T. M. (1990). *Contributos para o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos elementares*. Estudo apresentado às Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação, UNiversidade do Porto.

Lesh, R., & Landau, M. (Eds.) (1983). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, London: Academic Press, Inc.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 263-343), London: Academic Press, Inc.

Lesh, R., Behr, M., & Post, T. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Lesh, R., Post, T., & Behr M. (1988). Proportional Reasoning. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Light, P., Gorsuch, C., & Newman, J. (1987). "Why Do You Ask?" Context and Communication in the Conservation Task. *European Journal of Psychology of Education*, II, 1, 73-82.

Lo, J.-J. & Watanabe T. (1993). Conceptual Bases of Young Children's Solution Strategies of missing Value Proportional Tasks. In *Proceedings of the 17th International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Tsukuba, Ibaraki, Japão, III, 162-169.

Maher, C. (1994). Children's different ways of thinking about fractions. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.III, pp.208-215). Lisboa, Portugal.

Matos, J. F. (1994). Processos Cognitivos Envolvidos na Resolução de Problemas de Aplicação da Matemática. In D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Org.), *Resolução de problemas: Processos cognitivos Concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: IIE.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática*. Lisboa: APM.

ME (1991). Organização Curricular e Programas - Ensino Básico 2° ciclo. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário.

MEIC (1975). Programas do ensino preparatório. Ministério da Educação e Investigação Científica, Direcção Geral do Ensino Básico.

Meadows S. (1983). *Developing Thinking*. Cambridge: The Burlington Press.

Meissner, H. (1986). Cognitive Conflits in Mathematics Learning. *European Journal of Psychology of Education*, I, 2, 7-16.

Mercer, C. & Miller, S. (1992). Teaching Students with Learning Problems In Math to Adquire, Understand and Apply Basic Math Facts. *Remedial and Special Education*, 13, Maio/Junho, 19-35.

Monteuil, J. M. (1988). Comparation sociale, stratégies individuelles et médiations socio-cognitives. Un effect de différenciations comportementales dans le champ scolaire. *European Journal of Psychology of Education*, III, 1, 3-18.

Mulhern, G. (1989). Between the Ears: Making Inferences about Internal Processes. In B. Greer & G. Mulhern (Eds.), *New Directions in Mathematics Education*, London: Routledge.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

Neuman, D. (1993). Early Conceptions of Fractions - A Phenomenographic Approach. In *Proceedings of the 17th International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Tsukuba, Ibaraki, Japão, III, 170-177.

Nesher, P. (1987). Towards an Instructional Theory: the Role of Student's Misconceptions. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), 33-39.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217-254.

Noelting, G. (1980b). The development of proporcional reasoning and the ratio concept. Part II: Problem-structure at successive stages: Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 331-363.

Novillis, C. F. (1976). An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7, 131-144.

Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Nunes, T. (1992). Ethnomathematics and Everyday Cognition. In D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York: MacMillan.

Nunes, T. (1994). *I don't see why you don't see it: Systems of signs and conceptual development*. (Comunicação preparada para a conferência "Conceptual Change" em Jena - versão policopiada).

Ohlsson, S. (1988). Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Relared Concepts. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepst and Operations in the Middle Grades*, Vol 2. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oliveira, I. (1993). Que apoio e complementos educativos? O possível e o desejável .... *Noesis*, 27, Junho, Julho, Agosto.

Oliveira, I., Pereira, J. & Fernandes, D. (1993). *Desenvolvimento de Instrumentos de Avaliação da Aprendizagem em Matemática*. Lisboa: IIE.

Payne, J. N. (1976). Review of Research on Factions. In R. A. Lesh & D. A. Bradbard (Eds.), *Number and Measurement: Papers from a research workshop*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC Information Analysis Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

Pereira, F. & Martins, M. A. (1978). O Insucesso Escolar e as suas explicações. Crítica de Algumas Teorias. *Análise Psicológica*, II, 1, 33-56.

Perrenoud, Ph. (1978). Das Diferenças Culturais às diferenças Escolares, a avaliação e a norma num ensino diferenciado. *Análise Psicológica*, II, 1, 213-155.

Perrenoud, Ph. (1992). La triple fabrication de l'échec scolaire. In B. Pierrehumbert (Ed.). *L'échec à l'école: échec de l'école?* col. Textes de base en pédagogie. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Perret-Clermont, A.-N. (1979). *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*. Berne: Peter Lang.

Perret-Clermont, A.-N. & Brossard, A. (1988). L'intrication des processus cognitifs et sociaux dans les interactions. In Robert A. Hinde, Anne-

Nelly Perret-Clermont & Joan Stevenson-Hinde (Org.), *Relations interpersonneles et développement des savoirs*. Fribourg: Del Val.

Perret-Clermont, A.-N. & Nicolet, M. (1988). *Interagir et Connaître - Engeux et régulations sociales dans le développement cognitif.* Fribourg: Del Val.

Perret, J.-F. (1987). Quelle Psychology Pour Quel Apprentissage des Mathématiques?. *European Journal of Psychology of Education*, II, 3, 247-260.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1966). *The child's conception of geometry*. London: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J. (1923/1977). *A linguagem e o pensamento da criança*. Psicologia e pedagogia. Lisboa: Morais Editores. (Trabalho original em francês publicado em 1923).

Piaget, J. (1948/1978). *Para onde vai a educação?*. Biblioteca do Educador Profissional. Lisboa: Livros Horizonte. (Trabalho original em francês publicado em 1948).

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1948/1973). *La géometrie spontanée de l'enfant*. Presses Universitaires de France. (Trabalho original em francês publicado em 1948).

Pires, I. V. (1992). *Processos de resolução de problemas: Uma abordagem à construção de conhecimento matemático por crianças do Ensino Primário* (Tese de mestrado na Universidade Nova de Lisboa). Lisboa: APM.

Pirie, S. E. B. (1988). Understanding: Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalized ...? How can we Know? *For the Learning of Mathematics*. 8 (3), 2-6.

Pirie, S. E. B., Martin, L. & Kieren, T. E. (1994). Mathematical Images for Fractions: Help or Hindrance? In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.III, pp.247-254). Lisboa, Portugal.

Ponte, J. P. (1987). A Matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a vêem como simples disciplina de serviço. *Educação e Matemática*, 4, 5-6.

Ponte, J. P. (1992). A modelação no processo de aprendizagem. *Educação e Matemática*, 23, 15-19.

Ponte, J. P. (1993). A Educação Matemática em Portugal: Os primeiros passos de uma comunidade de investigação. *Quadrante*, Vol. 2, Nº 2, 95-125.

Pontecorvo, C. (1987). Interactions Socio-Cognitives et Acquisition des Connaissances en Situation Scolaire: Contextes Théoriques, Bilan et Perspectives. *European Journal of Psychology of Education*, nº especial com as comunicações do Congresso de Poitiers, Junho 139-149.

Post, T., Harel, G., Behr, M., & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on*

Mathematics Teaching and Learning, New York: Macmillan Publishing Company National Council of Teachers of Mathematics.

Post, T., Wachsmuth, E., Lesh, R., & Behr, M. (1985). Order and Equivalence of Rational Number: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol 16, Nº 1, 18-36.

Ramalho, G. (1993). Domínios e campos de conhecimento. *Inovação*, 6, 157-171.

Resnick, L. B., & Ford, W. (1981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. (1982a). A developmental theory of number understanding. In H. P.Ginsburg (Ed.), *Children's Knowledge of Arithmetic*. New York: Academic Press, Inc.

Resnick, L. (1982b). Syntax and semantics in learning to subtract. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.). *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 136-155). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Resnick, L. (1983). Toward a Cognitive Theory of Instruction. In S. G. Paris, G. M. Olson & H. W. Stevenson (Eds.), *Learning and Motivation in the Classroom*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Resnick, L. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Resnick, L. (1989a). Treating Mathematics as an Ill-Structured Discipline. In Charles Randall & Edward A. Silver (Eds.). *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, NJ: Lawrence Erlbaum.

Resnick, L. (1989b). Developing Mathematical Knowledge. *American Psychologist*, Fevereiro, 162-169.

Resnick, L. (1989c). Les approches pédagogiques et les conceptions conflictuelles. In N. Bednarz & C. Garnier (Org.), *Construction des savoirs-Obstacles & conflits*. Montréal: Agence d'ARC inc.

Resnick, L. (1990). Instruction and the Cultivation of Thinking. In *Handbook of educational ideas and practices*. London: Routledge.

Roux, J.-P & Gilly, M. (1988). Contribution à l'étude des mécanismes d'action du marquage social dans une tâche d'ordination à 12-13 ans. In A. N. Perrat-Clermont & M. Nicolet (Eds.). *Interagir et connaître - Enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif*. Fribourg: Del Val, 153-166.

Schubauer-Leoni, M. L. & Perret-Clermont, A.-N. (1985). Interactions sociales dans l'apprentissage de connaissances mathématiques chez l'enfant. In G. Mugny (Ed.). *Psychologie social du développement cognitif*. Berna: Peter Lang, 225-250.

Schubauer-Leoni, M. (1986). Le Contrat Didactique: un Cadre Interprétatif pour Compreendre les Savoirs Manifestés par les Eléves. *European Journal of Psychology of Education*. Vol. I, Nº 2, 7-16.

Schubauer-Leoni, M. (1988a). L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: la situation de test revisitée. In A. N. Perret Clermont e M. Nicolet (Eds.). *Interagir et connaître - enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif.* Fribourg: Del Val, 251-264.

Schubauer-Leoni, M. L. & Perret-Clermont, A.-N. (1988). Représentation et Significations de Savoirs Scolaires. *European Journal of Psychology of Education*, n° especial com o tema Funcionamento Cognitivo da Criança.

Schubauer-Leoni, M. (1989). Problématisation des notions d'obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. In M.-L. Schubauer-Leoni (Ed.). *Construction des Savoirs - Obstacles et Conflits.* CIRADE, Québec: Ed. Agence d'Arc inc.

Schneuwly, B. (1987). Les Capacités Humaines sont des Constructions Sociales. Essai sur la Théorie de Vygotsky. *European Journal of Psychology of Education*, III, 4, 5-16.

Sousa, C. S. (1994). Prova das concentrações de Noelting: Estudo adaptativo para Portugal. Comunicação apresentada na II Conferência Internacional da Associação dos Psicólogos Portugueses, Braga, Portugal, Maio 1994.

Silva, M. E. (1994). Avaliação psicológica de crianças com dificuldades de aprendizagem: Inclusão de instrumentos avaliativos das competências escolares. Comunicação apresentada na II Conferência Internacional da Associação dos Psicólogos Portugueses, Braga, Portugal, Maio 1994.

Steiner, H-G. (1993). Teoria da Educação Matemática (TEM): Uma introdução, *Quadrante*, Vol. 2, N° 2, 19-39.

Streenfland, L. (1982). Subtracting fractions with different denominators. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 233-255.

Streenfland, L. (1984). *Teaching fractions so as to be useful.* Utrecht: University of Utrecht.

Streenfland, L. (1986). Rational Analysis of Realistic Mathematics Education as a Theoretical Source for Psychology. Fractions as a Paradigm. *European Journal of Psychology of Education*, Vol I, n°2, 67-82.

Streenfland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of developmental research.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Thyer, D. & Maggs, J. (1981). *Teaching Mathematics to Young Children.* Londres: Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1976). Invariants quantitatifs, qualitatifs et relationnels. *Bulletin de Psychologie*, n° 327, 387-389.

Vergnaud, G., & Ricco, G. (1976). Psychogenèse et programme d'enseignement: différents aspects de la notion de hiérarchie. *Bulletin de Psychology*, n° 330, 877-882.

Vergnaud, G. (1981a). *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berna: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1981b). Quelques Orientations Théoriques et Méthodologiques des recherches Françaises en Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 2, 2, 215-232.

Vergnaud, G., Halbwachs., & Rouchier, A. (1981). Estructura de la materia enseñada, historia de las ciencias y desarrolo conceptual del aluno. In César Coll (Ed.), *Psicologia genética y educación*, Oikos Tan.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. London: Academic Press, Inc.

Vergnaud, G. (1986a). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, N° 1-série V, 75-90.

Vergnaud, G. (1986b). Editorial, *European Journal of Psychology of Education*, Vol. I, N° 2.

Vergnaud, G. (1988). L'élève face à la tâche: problèmes à résoudre, difficultées à surmonter. *European Journal of Psychology of Education*, Numéro Spécial Hors Série, 15-21.

Vergnaud, G. (1989a). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In N. Bednarz & C. Garnier (Org.), *Construction des savoirs-Obstacles & conflits*. Montréal: Agence d'ARC inc.

Vergnaud, G. (1989b). L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre. In N. Bednarz & C. Garnier (Org.), *Construction des savoirs-Obstacles & conflits*. Montréal: Agence d'ARC inc.

Vergnaud, G. (1989c). Questions vives de la psychologie du développement cognitif, *Bulletin de Psychologie*, Tome XLII - N° 390 Maio-Junho.

Vergnaud, G. (1989d). La formation des concepts scientifiques. Relire Vygotsky et débattre avec lui aujourd'hui. *Enfance*, 42, n° 1-2, 111-118.

Vergnaud, G. (1990). Problem solving and concept-formation in the learning of mathematics. In Heinz Mandl, Erick de Corte, Neville Bennett & Helmut F. Friedrich (Eds.), *Learning and Instruction*, New York: Pergamon Press.

Vergnaud, G. (1990a). La Théorie des Champs Conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, n°23, pp. 133-170.

Vergnaud, G. (1990b). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In P. Nesher e J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cambridge: Cambridge University Press, 14-30.

Vergnaud, G. (1991). Morphismes fondamentaux dans les processus de conceptualisation. In Gérard Vergnaud (Ed.), *Les Sciences Cognitives en débat*. Paris: CNRS Editions.

Vergnaud, G. (1992). Qu'est-ce que la didactique? En quoi peut-elle intéresser la formation des adultes peu qualifiés? *Education Permanente*, n° 111, p. 19-31.

Vygotsky, L.S. (1985). *Langage et Pensée*. Paris: Editions Sociales, Messidor.

Von Glasersfeld, E. (1992). *Notes constructivistes sur l'éducation*. Cirade, UQUAM, 1-9

Watanabe, T. (1993). Construction and Coordination of Units: Young Children's Fraction Knowledge. *Proceedings of the 17th International Conference of Psychology of Mathematics Education*, Tsukuba, Ibaraki, Japão, 194-201.

Wearne, D., & Hiebert, J., (1988a). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 19, N° 5, 371-384.

Wearne D., & Hiebert, J. (1988b). Constructing and Using Meaning for Mathematical Symbols: The Case of Decimal Fractions. In M. Behr & J. Hiebert (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Wearne D., & Hiebert, J. (1989). Cognitive Changes During Conceptually Based Instruction on decimal Fractions. *Journal of Educational Psychology*, 81 (4), 507-513.

Weil-Barais, A.., & Vergnaud, G. (1990). Students' conceptions in physics and mathematics: biases and helps. In J. P. Caverni, J. M. Fabre & M. Gonzalez (Eds.), *Cognitive Biases*, North Holland: Elsevier Science Publishers B. V.

Wertsch, J. V. (1985). La médiation sémiotique de la vie mentale: L. S. Vigotsky et M. M. Bakhtine. In B. Schneuwly & J. P. Bronckart (Eds.), *Vigotsky aujourd' hui*. Paris: Delachaux et Niestlé.

Wertsch, J. V. & Stone C. A. (1985). The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions. In James V. Wertsch (Ed.), *Culture Communication and Cognition*. Cambridge: University Press.

Wollman, W., & Karplus, R. (1974). Intellectual Development Beyond Elementary School V: Using Ratio in Differing Tasks. *School Science and Mathematics*, 74.