D.M
MARQ/T.1

FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA

Departamento de Estatística e Investigação Operacional

POR UMA TEORIA DE PROBABILIDADE SUBJECTIVA:

REVISITANDO OS ALICERCES

Dissertação original apresentada Faculdade de Ciências para a obtenção do grau de Mestre em Probabilidades e Estatística, pela Universidade de Lisboa

Teresa Maria F. T. de Morais Garcia-Marques

1993

Reg. 7622

Instituto Superior de Psicologia Aplicada
BIBLIOTECA
C

ISPA

7622

AGRADECIMENTOS

Alguma virtude que se possa encontrar neste trabalho deve ser referenciada a um conjunto de pessoas sem as quais ele nunca teria sido realizado.

Ao meu orientador Prof. João Faria o agradecimento não só por me ter indicado um ponto de partida e um novo horizonte mas por me ter acompanhado no longo e árduo caminho.

À Prof. Antónia Turkman agradeço por ter atendido às minhas dúvidas e receios incutindo-me prese~~r~~verânç~~i~~a no caminho.

À minha colega Maria Manuela Azevedo agradeço a amizade, o estímulo e apoio ao longo de toda a realização deste mestrado.

E por fim, e sem dúvida o agradecimento mais importante, à minha filha Inês que nasceu após um exame deste mestrado e ao meu marido que tão bem têm aturado este seu grande rival.

ÍNDICE

II PARTE

A ABORDAGEM AXIOMÁTICA À RELAÇÃO

DE PROBABILIDADE QUALITATIVA/COMPARATIVA

TABELAS:

INTRODUÇÃO

The mathematician, the statistician, and the philosopher do different things with a theory of probability. The mathematician develops its formal consequences, the statistician aplies the work of the mathematician, and the philosopher describes in general terms what this application consists in. (...) Each does his job better if he knows something about the work of the other two. (Good, I.J., 1959).

Five international conferences on subjective probability have been held (Hamburg, 1969; Amesterdam, 1970; London, 1971; Rome, 1973; and Darmstadt, 1975) in order to bring together psychologists, mathematicians, staticians and others. Yet progress towards mutual understanding seems slow and awkward (de Finetti, 1978)

O desenvolvimento de teorias de probabilidade emerge de uma união de esforços multidisciplinares - probabilidade é um objecto sob a perspectiva de diferentes disciplinas! No entanto, nos nossos tempos, o estudo da probabilidade, pela sua complexidade e profundidade, deu origem à constituição como que de uma nova disciplina. Uma disciplina que, tendo a noção de probabilidade como objecto, visa a construção de modelos ou teorias que integram uma definição do conceito e seus limites, e a compreensão dos significados com que esses conceitos são abordados e das contigências de aplicação.

A confluência interdisciplinar está, provavelmente, patente neste trabalho. Assim nalguns capítulos e subcapítulos a abordagem é essencialmente filosófica ou psicológica, enquanto noutros a linha de pensamento é essencialmente matemática. É que eu subescrevo totalmente Good (1959) quando este afirma: « *Each does his job better if he knows something about the work of the other two.*»

Tal como o nome deste trabalho indica, procurarei fazer uma digressão pelas noções básicas associadas ao conceito de probabilidade de forma a que os seus alicerces se tornem mais perceptíveis. O conceito de probabilidade subjectiva e os argumentos que servem de base a esta opção epistemológica constituiem o cerne deste trabalho. A digressão mais ou menos crítica por alguns dos modelos mais importantes oferecidos na literatura, pretende clarificar o que se entende por probabilidade subjectiva, em que contexto o conceito emerge, que críticas sofre e que ligação estabelece com a abordagem estatística construída sobre a axiomática de Kolmogorov.

Perfilhando a noção de probabilidade como reflectindo o conhecimento que o sujeito num dado momento possui do mundo que o rodeia, referir-me-ei igualmente a modelos *não-standard*, i.e, modelos que visando a aproximação ao indivíduo procuram contemplar a hipótese de indecisão. Tratam-se de modelos que ou nos oferecem medidas inexactas de credibilidade ou procuram as condições de mensuração de um conhecimento incompleto.

Assim:

A primeira parte deste trabalho refere os fundamentos básicos do conceito de probabilidade. O primeiro capítulo centrar-se-à no conceito de probabilidade e analisará toda a subjectividade que o rodeia. O segundo, por sua vez, tem por objecto a noção de acontecimento e analisa a subjectividade que a caracteriza. Distinguir-se-ão, seguidamente, as abordagens normativas ao conceito de probabilidade subjectiva, das abordagens descritivas e prescritivas.

A segunda parte deste trabalho refere os modelos axiomáticos de probabilidade qualitativa. Após a referência a alguns conceitos básicos, serão apresentados e contrastados alguns dos modelos que melhor caracterizam a escola subjectivista/personalista. Um estudo comparativo relativamente aprofundado, permitirá, apontar equivalências e isolar idiossincrasias nas diferentes propostas analisadas.

I PARTE

OS FUNDAMENTOS DA NOÇÃO DE PROBABILIDADE SUBJECTIVA

I) O SIGNIFICADO DE PROBABILIDADE

A mera existência de um debate sobre o significado de probabilidade, passa ao lado da maioria dos utilizadores deste conceito. Do uso, e por vezes abuso, feito desta palavra não se vislumbra o fosso que muitas vezes nos separa, nem o esforço de construção de pontes que permite o encontro cordial entre opositores (mais ou menos) inconscientes.

Não necessitamos de recuar aos primórdios[1] do desenvolvimento dos estudos no campo da probabilidade, para percebermos a essência do debate do significado do conceito de probabilidade. Os trabalhos de Bernoulli (1713) , Bayes (1763) e Laplace (1774) (citados por exemplo em Jaynes, 1983) representam o que hoje em dia se designa[2] de *noção clássica* de probabilidade.

A maioria das críticas à abordagem clássica centram-se na circularidade da sua definição, i.e., probabilidade é definida à custa da noção de (equi)probabilidade. Este requisito de equipossibilidade, para desenvolvimento do cálculo probabilístico, impossibilita a predição de comportamentos e processos do mundo real visto *não haver meio* de o garantir. Tal é de facto já salientado pelo próprio Bernoulli:

---

[1] Se historicamente estes primórdios podem ser referênciados an uso de termos como *chance, luck, fate* etc, ou até à definição de Aristotles "*the probable is what usually happens*" (Good,I.J., 1959) as origens da teoria matemática de probabilidade são regra geral referenciadas à correspondência entre Pascal e Fermat (1654).

[2] Os qualificativos da palavra *probabilidade* pretendem diferenciar e categorizar diferentes noções de probabilidade. Eles são inúmeros, nem sempre associados a uma dimensão que garanta exclusividade no processo categorial (ex: Subjectiva, Inversa, Fisica, Frequencista- ver Good,1959). Este trabalho contrasta, essencialmente, a dicotomia classificatória Subjectivo vs Objectivo.

> But here, finally, we seem to have **met our problem**, since this may be done only in games of chance (...) (construidos com o propósito de estabelecer equiprobabilidades).
> But what mortal will ever determine for example the number of diseases - these and other such things depende upon causes completly hidden to us" (Bernoulli, 1713 citado por Jaynes 1983).

Mas, segundo Jaynes (1983), existe uma discrepância entre a noção de probabilidade subjacente aos trabalhos de Bernoulli e a definição operacional por este fornecida. Note-se que o requisito de equipossibilidade relaciona-se com o Princípio da Razão Insuficiente. Princípio que oferece um meio de fazer face a um problema de probabilidade quando não dispomos de informação que nos permita especificar juízos probabilísticos: se desconhecemos alguma razão (informação) que ponha em causa a consideração de A e B como acontecimentos igualmente credíveis é razoável supor que ambos têm a mesma probabilidade. Está, assim, subjacente a noção de probabilidade como referente a um certo estado de conhecimento pelo que, é admissível ler nos trabalhos de Bernoulli traços de uma perspectiva subjectivista (Jaynes, 1983). Uma leitura cuidada dos primeiros desenvolvimentos relativos à noção de probabilidade, leva-nos a pensar que a visão original de probabilidade é subjectivista e que esta visão, embora ofuscada pela interpretação frequencista ou estatística de probabilidade, teve sempre defensores.

Independentemente dos pressupostos subjacentes ao Príncipio da Razão Insuficiente, Bernoulli (1713), em *Ars Conjectandi,* refere que, visto não podermos ter a certeza se um acontecimento ocorre ou não, apenas poderemos referir o grau de confiança na verdade da proposição que afirma a sua ocorrência (Kyburg & Smokler, 1964). A discrepância entre a noção e definição de probabilidade em Bernoulli apenas pode ser entendida como fruto de uma limitação de resultados até então obtidos. O modo como o autor define probabilidade parece visar uma atitude pragmática.

É certo que nos seus trabalhos, Bernoulli estabelece uma ligação entre frequências observadas numa amostra aleatória de observações e as probabilidades teóricas, mas nunca tomou umas pelas outras (Jaynes, 1983). Ao admitir as limitações do Princípio de Razão Insuficiente, Bernoulli pretendia, através do conhecimento dos resultados de uma amostra, atingir a população (cuja existência era meramente hipotética). Pelo que, já se referia ao problema de inversão de probabilidade. Objectivo que orientou explicitamente os trabalhos posteriores de Bayes (1763) e Laplace (1774) e que, apesar de serem *per se* insuficientes e inadequados, foram um trampolim para os desenvolvimentos e trabalhos que hoje caracterizam a perspectiva Bayeseana (ver importância dos trabalhos de Laplace em Jeffreys, 1939, e a centralidade do seu teorema - teorema de Bayes - para esta escola).

O desenvolvimento histórico das noções de probabilidade posteriores a Bernoulli é caracterizado por uma oposição à noção subjectivista, por uma rejeição do conceito de probabilidade enquanto sumário de um estado de conhecimento.

Mesmo na viragem do século, diferentes autores [Jaynes (1983), cita os trabalhos de Ellis (1842) de Boole (1854) de Venn (1866)] desenvolvem trabalhos inspirados nos resultados e ideias de Bernoulli, mas insistem em ver probabilidade como frequência numa experiência aleatória (probabilidade assume uma natureza "objectiva", ou até como Good (1959) refere, uma natureza física).

Mas mesmo ofuscada por esta interpretação frequencista (ou estatística) de probabilidade , a noção subjectivista não desaparece com o virar do século. Augustus De Morgan em 1847 explicita-a do seguinte modo:

> By degrees of probability we really mean, or ought to mean, degree of belief...Probability then, refers to and implies beliefs, more or less, and beliefs is but another name for imperfect knowledge, or it may be, expresses the mind in a state of imperfect knowledge (p. 173 Formal Logic citado,em Kyburg & Smokler, 1964).

E já em 1921 Keynes, definindo o domínio de aplicação de probabilidade como essencialmente lógico, toma o significado da noção de probabilidade como residindo na relação lógica que se traduz no grau de credibilidade associado a uma proposição, dado um conjunto de proposições (que definem o estado de conhecimento do sujeito).

O debate do significado de probabilidade não deixa de estar associado aos seus domínios de aplicação (Murteira, 1990). O grande defensor da tese frequencista, R. von Mises (1883-1953), pretende até (um pouco isoladamente) retirar o conceito de probabilidade das mãos dos matemáticos, referenciando-o como um fenómeno directamente observável no mundo real, a ser estudado pela ciência (empirismo lógico) e não pela metodologia matemática (racionalismo). Ele e a sua escola defenderam que a noção de probabilidade só tem sentido quando reportada a uma realidade passível de ser observada repetidamente - fenómenos de massa ou colectivo.

> The word collective...denotes a series of similar events or processes which differ by certain observable attributes, i.e. colors, numbers, or anything else...The principle which underlines the whole of our treatment of the probability problem is that a collective must exist before we begin to speak of probability (von Mises 19 ,p.16 in Maistrov, 1974).

Este colectivo deve satisfazer duas condições (ter duas propriedades[3]): 1) Deve existir um limite das frequências relativas e 2) o limite deve ser invariante relativamente à escolha de um colectivo, que é arbitrário, aleatório. O limite dessas frequências, define probabilidade.

A abordagem de Von Mises, devido a todo o seu radicalismo e ao requerimento da existência de um limite de frequências, nunca foi bem aceite junto dos matemáticos. O apoio que sofreu vinha essencialmente da área da física (Maistrov,1974).

Diferentes trabalhos que se desenvolveram sob uma perspectiva frequencista, tornaram esta noção de probabilidade independente das propriedades que Von Mises lhe atribuiu; principalmente pelo abandono do pressuposto de existência de um limite de frequências relativas num colectivo.

Para as abordagens puramente matemáticas os desenvolvimentos do campo da probabilidade do início de século impunham uma clarificação e justificação das noções de probabilidade, uma re-avaliação e refinamento dos seus fundamentos lógicos (Maistrov,1974). Contribuiu para isso o desenvolvimento da Teoria da Medida (que chegou a definir a teoria da Probabilidade como um subcapítulo seu) acompanhada por grandes avanços nos processos de axiomatização da Teoria dos Conjuntos (Faria, 1991). A necessidade de uma teoria axiomática baseada em noções da teoria de medida, na opinião de Maistrov (1974), parecia querer impor-se. Pelo que, o desenvolvimento do conceito de

---

[3]"*Proceeding from the premise that probability theory is not a mathematical discipline, von Mises regarded his axioms as proprieties of a collective and did not interpret them as axiomas of a mathematical theory*" (Maistrov, 1974).

probabilidade concretizou-se na criação de sistemas axiomáticos que o representassem. Daí que uma medida de probabilidade surja como um conceito derivado em vez de se constituir como entidade primitiva.

> The first systematically developes axiomatization of probability theory, based on the notion of qualitative comparasion of events according to their probability is due to S.N. Bernstein. The numerical value of the probability appears in this conception as a derived rather than as a primary notion. (Kolmogorov, citado por Maistrov, 1974)

No entanto Bernstein deixa bem claro a natureza não categórica do seu modelo:

> Purely mathematical probability theory cannot be concerned whether the coeficient called mathematical probability has any practical value, either subjective or objective. (Bernstein, 1927, in Maistrov,1974)

O conceito de probabilidade (medida de probabilidade como conceito derivado) é reportado por Kolgomorov (1921) a uma entidade qualitativa: o sistema empírico definido por um critério frequencista.

> The axiomatization resulted in abstracting the notion of probability from its frequency interpretation, but at the same time made it possible always to pass over from a formal system to real-wold processes. Naturally enough, every inference from this theory can be interpreted in frequency terminology (Maistrov, 1974).

Mas embora construído sob a noção frequencista de probabilidade (pelo que, gerando apoio a esta perspectiva), o sistema formal resultante (modelo matemático) acaba por ser desprovido de entidade real (por ele representada). O modelo matemático abstracto sendo independente do processo pelo qual foi construído, não traduz uma verdadeira noção de probabilidade, pelo que não intervém no debate entre os subjectivistas e objectivistas. Uma verdadeira definição de probabilidade advém do estabelecimento de uma relação entre esta entidade matemática e um conteúdo ou significado real. Pelo que, a verdadeira controvérsia reside em torno das propriedades extra-matemáticas do conceito: o critério relacional que "permite" a sua "aplicação ao mundo". Tomar probabilidade como um simples conjunto de funções não-negativas aditivas cujo máximo valor é a unidade, embora não seja ambíguo é totalmente vazio de conteúdo empírico - probabilidade não se fica por uma simples função matemática. Como Savage (1972) refere, considerando a confusão existente em torno dos fundamentos da estatística é espantoso o grau de consenso que existe relativamente às propriedades puramente matemáticas da probabilidade.

Assim, teorias subjectivistas e objectivistas unem-se nas propriedades matemáticas dos seus conceitos e na abordagem matemática dos seus problemas, mas diferem na forma como estabelecem a relação com o mundo: as primeiras introduzem o sujeito nessa relação e as segundas definem a relação em termos empíricos. A forma como o sujeito é introduzido pode, no entanto, diferir de teoria para teoria, impondo-lhe mais ou menos regras de funcionamento lógico no processamento da informação que visa um juízo probabilístico (probabilidade é *uma propriedade do conhecimento* que temos sobre um dado acontecimento). Para um objectivista para quem probabilidade tem uma natureza física, directamente observável, o papel do sujeito é meramente o de fazer o "levantamento" da informação, (probabilidade é *uma propriedade do acontecimento*). A validade desta teoria é contigente a um domínio específico de acontecimentos, os de passível repetição[4].

Embora a perspectiva objectivista continue hoje em dia a chamar a sí o maior número de adeptos é salientar o desenvolvimento de outras perspectivas. A escola subjectivista (Keynes, 1921; Ramsey, 1926; de Finetti, 1937; Jeffreys, 1939; Koopman, 1940; Savage, 1954, etc) vê probabilidade como a expressão da ignorância humana, uma expressão formal das nossa expectativas, das nossas crenças, da credibilidade que atribuimos a dados acontecimentos. Trata-se de uma definição de probabilidade bem mais global do que aquela que nos reporta à análise das frequências relativas. Encontramos muito mais tolerância (se assim se pode falar) no modo como os defensores da escola subjectivista interpretam os trabalhos da sua oponente do que o contrário. É que, para um subjectivista o frequencista é aquele que faz um juízo probabilístico por uma metodologia empírica[5]; para um objectivista o juízo probabilístico não tem razão de ser, a realidade é o que é[6] e a intervenção do sujeito nada mais é do que uma fonte de enviesamento no processo que visa o acesso a essa realidade.

---

[4] Daqui decorre a impossibilidade de se probabilizarem acontecimentos únicos. O gato de Schrodinger não pode estar meio vivo e meio morto ao postular-se 50% de probabilidade de sobreviver e esse seria o seu estado ao postula-se probabilidade como uma característica do mundo físico. Pelo contrário, para a perspectiva subjectivista tem sentido falar da probabilidade 1/2 vivo e 1/2 morto pois probabilidade traduz um estado do sujeito cognicente.

[5] "*Again, objectivistic views can be regard as personalist views according to which comparasions of probability can be made only for very special pairs of events, and then only according to such critéria that all people agree in their comparasions.* [Savage, 1972, p.60].

[6] Não resisto a apresentar uma citação de Venn que ilustra claramente esta posição frequencista.

The best example I can recall of the distinction between judging from the subjective and the objective side, occurred once in a railway train. I met a timid old lady who was in much fear of accidents. I endeavoured to sooth her on the usual statistical ground of the extreme rarity of such events. She listened patiently, and then replied, "Yes,Sir, that is all very well; but I don't see how the real danger will be a bit the less because I don't believe in it." (Venn, 1888)

O subjectivismo associado ao conceito de probabilidade tem sido assim, assumido por uns, tolerado por alguns e contrariado por outros.

II) A NOÇÃO DE ACONTECIMENTO

"Probabilidades consubstanciam-se em acontecimentos" (Faria,1991), pelo que não podemos discutir o conceito de probabilidade sem ter subjacente a noção de acontecimento. O significado de um conceito está imbrincado no significado do outro.

Cabe, assim, a qualquer teoria de probabilidade deixar bem claro o que entende por acontecimento, e a este trabalho o explicitar se " *trata de um conceito simples ou multiforme e nesse caso se há um denominador comum que permita a aglutinação.*" (Faria,1991).

Antes de atendermos ao modo como a noção de acontecimento tem sido utilizada na literatura das probabilidades, é conveniente tomar em consideração a etimologia da palavra, o seu significado psicológico, e algumas considerações epistemológicas.

A) A subjectividade da definição do que é acontecimento

Acontecimento, é definível como o "acto ou efeito de acontecer, de realizar-se", ou como uma "ocorrência", a verificação de um "facto". Na realidade só se pode considerar um acontecimento aquilo que sabemos existir, ao qual atribuimos limites precisos de existência (fronteiras que nos dizem o que é e o que já o não é), aquilo que conhecemos como uma entidade, um todo. Pelo que a noção de acontecimento pode ser entendida como um todo significativo (i.e., à qual se atribui um dado significado), mentalmente representado (i.e., que é conhecido).

Toda a realidade com que lidamos é uma realidade representada mentalmente. Sendo o conhecimento representação, ele é sempre uma má-representação (McGuire, 1983), uma representação mais ou menos incompleta e mais ou menos destorcida da realidade. O "erro" associado às representações confere-lhes maior ou menor validade, sendo o critério de validação uma mera convicção epistemológica. São diversos os critérios de validade de um conhecimento utilizados pelo conhecedor, pelo que casos concretos podem levá-lo a questionar uma representação: quando esta não é partilhada (*falta de consenso*), quando é desafiada por regras lógicas (*racionalismo*), quando a experiência sensorial contraria a representação (*empirismo*) ou ainda e entre outros, quando se encontra uma representação alternativa mais frutuosa. Note-se que a ausência de qualquer critério deste tipo nos levaria à situação de ausência de orientação comportamental. Tal como Bertrand Russel sugere: *a acção consensual é normal, e a não consensual poderá traduzir a presença de um génio ou de um louco, pelo que são necessários critérios de delimitação.*

Um conhecimento válido (qualquer que seja o critério de validade) é um conhecimento "objectivo". A sua "objectividade" é definida por uma intersubjectividade: o acordo ou consenso social sobre os seus limites quer estes tenham sido mais ou menos impostos pelo próprio real (empirismo). Acontecimentos como *viajar por terra, água* ou *ar* são, de certo modo, bastante delimitados pelas suas características físicas. Mas se pensarmos os acontecimentos *ser dia* e *ser noite*, se bem que as suas características físicas participem na sua delimitação não deixa de haver uma "zona cinzenta" (*fuzzy*[7]) onde o seu significado não será (pelo menos à partida) consensualmente partilhado. Acontece também que, por vezes, a realidade "apresenta-se" numa dimensão contínua e se procede à sua categorização (a leitura é feita numa escala nominal). Neste caso existirão muitas "zonas cinzentas" onde os significados não serão (pelo menos á partida) consensuais. A questão da probabilidade de "*o leitor enlouquecer após a leitura deste trabalho*", passa pela definição do acontecimento "*estar louco*" - a loucura pode ser considerada num contínuo de perda de sanidade mental. Dois sujeitos independentes podem estar a situar o leitor no mesmo ponto desse contínuo mas atribuir-lhe um significado diferente (consoante pertença ao intervalo que "define" loucura ou não pertença). O "desacordo" manifestado relativamente à credibilidade associada à afirmação de loucura é meramente aparente (visto atribuirem igual credibilidade à localização num dado ponto do contínuo onde se define o grau de loucura). É por um processo de estabelecimento de convenções (o partilhar de significados), pelo uso da comunicação, que poderemos esperar consenso num juízo probabilístico. Daí que, apenas faça sentido comparar graus de credibilidade de diferentes sujeitos se a realidade inserida nos seus sistemas relacionais, for particionada do mesmo modo.

Na realidade os limites estabelecidos em torno de um acontecimento, eles próprios eventualmente subjectivos, estabelecem o estatuto de acontecimento como uma instância de uma categoria mais vasta ou como entidade única. David Blackwell por volta de 1950, é contactado por um economista

---

[7] *By fuzziness we mean a type of imprecision which is associated with fuzzy sets, that is, classes in which there is no sharp transition from membership to nonmembership. For example a class of green objects is a fuzzy set.(...)Actually(...) most of the class in the real world do not have crisp boundaries which separates those objects which belongs to a class from those which do not.* (Bellman & Zadeh, 1970 citado por Faria, 1991).

que o questiona sobre a probabilidade de se verificar uma guerra no prazo de 5 anos. A resposta de Blackwell identifica este acontecimento como uma instância única, que na visão de probabilidade como referente a uma situação de acontecimentos repetitíveis é intratável. Mas podemos entender a hipotética situação de guerra como uma instância de uma categoria mais vasta: todas as guerras que se já verificaram são uma amostra de elementos dessa categoria. Esta identificação subjectiva de todas as guerras umas com as outras acarrecta consigo alguns problemas de validade, que numa situação como esta são facilmente compreendidos. Note-se porém que, ao considerar à priori idênticos os lançamentos de um dado, problemas semelhantes podem emergir.

A própria limitação do universo dos acontecimentos, é caracterizada por uma componente subjectiva, que apenas poderá encontrar alguma "objectividade" via convenção, pré-definição. Um universo é sempre um subconjunto de uma realidade mais vasta porque definida a um nível de abstração superior. O "problema probabilístico" tende, per si, a definir o universo que lhe está associado. O julgamento é realizado sobre resultados (que definem o espaço de acontecimentos possíveis) não conhecidos de uma "experiência" (que pode ser uma mera actividade mental sem recorrência física ou não), pelo que a primazia aos acontecimentos inseridos, como que, na mesma "dimensão". Ao questionar-mo-nos sobre a probabilidade de "*o leitor enlouquecer*" não definimos como acontecimento o *leitor ganhar a lotaria* ou *escorregar em alguma casca de banana*. Não que eles não possam fazer parte do meu universo, até que podem, se eu assim o definir. Eles não são, no entanto, elicitados pela "experiência" que está a ser levada a cabo "a de ler estas páginas". Mais facilmente se integrará no universo qualquer acontecimento associado a esta experiência, como por exemplo de "*total aborrecimento*".

A especificidade com que é definido um Universo de acontecimentos (fineza da partição), pode também ela ser variada (estando relacionada com a definição do problema probabilístico e natureza dos acontecimentos que se lhe associam). Quaisquer dois acontecimentos concretos/específicos podem ser considerados equivalentes/sinónimos num nível de categorização abstracto e díspares de quando elementos de diferentes categorias, a um nível de abstracção inferior (se o "problema probabilístico" assim o exige). Pelo que, esses dois acontecimentos podem ou não reportar-se a um único **acontecimento**. Um "aluno bom" e um "aluno médio" podem ser considerados equivalentes se apenas nos interessar saber a probabilidade do *"aluno passar"*[8]. Relativamente à possibilidade de enlouquecer com a leitura deste trabalho o nível mais global de definição do nosso universo será o que incorpora pelo menos "dois" acontecimentos: o de "*enlouquecer*" e a sua negação, "*não enlouquecer*", isto é, os acontecimentos que completam a dimensão em causa.

B) A noção de acontecimento no campo da probabilidade subjectiva

Um modelo ou uma teoria de probabilidade incorpora, define, uma noção de acontecimento, de forma a reduzir a ambiguidade que (como vimos) lhe está associada. Os diferentes modelos e teorias de probabilidade subjectiva não são consensuais na noção que perfilham de acontecimento. Não só a sua "definição" não é consensual como não existe acordo

[8] No entanto a não necessidade de uma partição do Universo a um outro nível de especificidade, é apenas aparentemente, visto que na procura de mensuração do grau de credibilidade associado a cada um dos dois acontecimentos, um outro tipo de partição do Universo teria de ser postulado (ver segunda parte deste trabalho).

na escolha do modelo matemático onde se define o seu análogo. Além disso os modelos diferem no grau em que abarcam a realidade passível de ser definida como acontecimento, i.e., diferem no conteúdo empírico que lhes está associado.

A definição de acontecimento por alguns autores dá-nos uma breve panorâmica da problemática[9]:

Keneys (1921) adverte que a noção de probabilidade deve ser associada a um julgamento, a uma proposição, em vez de a factos ou "acontecimentos". Estabelece assim a opção de **acontecimento-proposição.**

De Finetti (1937) tem uma opção idêntica ao defender que probabilidades são atribuidas a proposições com a propriedade de serem um acontecimento em qualquer classe de proposições semelhantes: "*an event is a proposition, a sentence, we do not know at the moment if it is true or false*"[pag.307]. Para além disso, De Finetti afirma que uma classe de proposições não é uma entidade estática pré-definida podendo, por tal, ser extendida a qualquer outra proposição, independentemente da sua natureza. Deste modo, De Finetti, defende a não existência de proposições atómicas (que limitam de algum modo a estrutura elementar do universo) e liberta o universo de uma natureza categorial[10].

---

[9] Faria (1991) aponta a ambiguidade com que muitas vezes o próprio termo "acontecimento" é utilizado, como uma das fontes da confusão conceptual que circunda o conceito. Os trabalhos de Keneys ilustram bem essa ambiguidade por utilizarem acontecimento como sinónimo de "facto", como podemos ler em Borel (1924, em nota de p.16 de Faria, 1991))"(...) there are cases where it is legitimate to speak of the probability of an event: these are the cases where one refers to the probability which is common to the judgments of all the best informed persons, that is to say, the persons possessing all the information that is humanly possible to possess at the time of the judgments."

[10] Tal como Faria (1991) adverte, desta forma De Finetti parece perder o controlo do que é ou não é acontecimento.

Koopman (1940), por sua vez, embora defina como substracto da sua estrutura teórica um categoria de proposições relaciona-a directamente com uma realidade empírica: *"experimental propositions"(..) "statements of the outcome of a particular physical or biological event as may in principal be verified by the performance of a single crucial experiment"* [Koopman, 1940 p.162].

Savage (1972) define "acontecimento " relacionando-o com a noção de "Natureza" (World) e "estados da natureza" (states) integradas na perspectiva de uma teoria de utilidade: *"An event is a set of states". "The world is the object about which the person is concerned", and "its states are descritptions of the world leaving no relevant aspect underscribed"* [pag.9]. A noção **acontecimento-conjunto** é totalmente perfilhada por este autor que a referencia ao modelo matemático de uma álgebra de Boole.

Ao modelo matemático de probabilidade representado pela axiomática de Kolgomorov subjaz igualmente a noção de acontecimento-conjunto. Kolgomorov pré-especifica o conjunto de acontecimentos elementares, constituintes ou pontos, e define o espaço de probabilidade á custa de acontecimentos que se definem via operação de conjuntos sob esses constituintes ou pontos.

Partindo da posição de De Finetti, (i.e.,partindo da noção de acontecimento-proposição), Corielli (1990) argumenta que ao submeter o seu sistema de credibilidade a princípios de coerência (ver próximo capítulo) existe uma necessidade de conceber acontecimento como um conjunto de constituintes.

One could see only a pharisaic distinction between the point

> of view of Kolgomorov and that of De Finetti: the first starts with the points, the second asserts to start with propositions but, to evaluate the gain has to come back to the points. [p.5, Corielli, 1990].

Na realidade como Corielli (1990) e Faria (1991) referem, a **questão da dicotomia acontecimento-proposição acontecimento-conjunto** parece ser uma falsa questão. Já Brunk (em Corielli,1990) referia:

> The objects of Kolgomorov theory are propositions too, the set representation is only an analytical tool for the manipulation of these entities [Corielli,1990].

E Grize (1967) ao definir a lógica das classes e proposições deixa bem claro que ambas definem uma álgebra de Boole, se "*definirmos U como o conjunto das proposições, sendo os operadores respectivamente a dijunção, a conjunção e a negação e se a relação '=' for interpretada como a equivalência tautológica*" [pag. 230, Grize, 1967].

Uma análise mais cuidada das implicações matemáticas da distinção **acontecimento-proposição** e **acontecimento-conjunto** demonstra (Corielli, 1990, Faria, 1991), a existência de uma ponte que as une: o teorema de Stone[11]. Este teorema estabelece a possibilidade de associar a qualquer álgebra Booleana abstracta (acontecimento-proposição) uma álgebra Booleana concreta, onde se definem acontecimentos como conjuntos. Trata-se, assim, de um teorema de extrema importância para todos os autores que vêem acontecimentos materializados em proposições.

Uma vez ultrapassada a falsa questão de dicotomia

---

[11] **Teorema de Stone**: Se S é uma álgebra abstracta então existe uma álgebra de conjuntos S* de subconjuntos de um espaço X (o espaço de Stone de S) que está numa correspondência bijectiva com S.

acontecimento-proposição vs. acontecimento-conjunto fica ainda em aberto a questão colocada por De Finetti da própria estrutura Booleana ser *um fardo pesado de transportar* (Faria, 1991): não só pressupõe uma limitação da estrutura do universo como também engloba em si acontecimentos que não acarrectam significado para o sujeito. O fardo e artificialidade da situação ainda seria maior para o domínio infínito onde se subescrevesse a recorrência a um álgebra-σ.

Ao arrepio de De Finetti, quer a noção de acontecimento seja a de conjuntos ou de proposições, tomaremos (ao longo deste trabalho) como ambiente a estrutura de uma álgebra de Boole, visto ser a posição majorante do campo das probabilidades. Tal opção justifica-se quer pela consideração da estrutura de uma álgebra como uma analogia perfeita com a realidade sob a qual se consubstancia a noção de probabilidade, quer por se considerar que fornece uma analogia produtiva no sentido de ser um campo de resultados favoráveis à prova[12].

Podemos considerar mínimalista a posição assumida pelos autores que constroem os seus modelos sob a estrutura de uma álgebra evitando a posição mais pesada (apesar de fornecer um campo mais favorável à demostração de certos resultados) de lhe conferir uma estrutura de álgebra-σ. Assumindo uma postura de certo modo comodista (e por tal limitativa) temos ainda que, alguns autores (por exemplo Savage) identificam a estrutura de uma álgebra com a classe $2^{\mathbf{U}}$, formada por todos os subconjuntos ou partes de $\mathbf{U}$, (posição comum para o caso finito) (Faria & Garcia-Marques, 1993). Note-se que as demonstrações feitas para uma álgebra são igualmente válidas

[12] Esta posição não se adequa ao radicalismo demonstrado por De Finetti. Sendo a posição que recolhe a quasi-unanimidade dos subjectivistas, verificamos inclusívelmente que os trabalhos de De Finetti, por via do Teorema de Stone, têm sido enquadrados no ambiente de uma àlgebra pelos seus seguidores ou leitores.

para uma álgebra-σ não sendo as recíprocas verdadeiras. *"Nomeadamente são válidas para uma álgebra-σ as demonstrações feitas para 2^U sempre que as operações entre conjuntos se circunscrevam ao caso finito ou numerável. A mesma estrutura de raciocinio não funciona ao passar de uma álgebra-σ para uma álgebra de Boole, uam vez que mesmo para certo resultados de carácter finito, é por vezes necessária a utilização de operações de carácter não finito"* [p. 47, Faria, 1991]

Os diferentes modelos de probabilidade subjectiva, ao assumirem estas diferentes posturas, distinguem-se pelo modo como modelam o espaço de acontecimentos. Como veremos na segunda parte deste trabalho, distinguem-se igualmente pelo modo como definem o espaço de acontecimentos probabilizáveis; nomeadamente se definem a existência de uma medida de probabilidade relativamente a um espaço finito e/ou infinito.

III) PROPRIEDADES NORMATIVAS E DESCRITIVA DO CONCEITO DE PROBABILIDADE SUBJECTIVA

Uma teoria de probabilidade subjectiva não é uma teoria subjectiva de probabilidade, nem um teoria de como o sujeito atribui probabilidades a acontecimentos. Após se distinguir estas diferentes situações, procurar-se-à, neste capítulo, apresentar as características de um modelo normativo de probabilidade e referir em que aspectos o comportamento do ser humano se revelou díspar.

1) OS CONCEITOS DE DESCRIÇÃO E NORMA

Bell, Raiffa e Tversky (1988), classificam as abordagens á noção de probabilidade subjectiva e à teoria da decisão em três categorias de análise: descritiva, normativa e prescritiva.

Uma análise **descritiva** é aquela que visa a mera descrição do modo como os sujeitos têm acesso aos graus de credibilidade que atribuem a um conjunto de acontecimentos. Procura-se, assim, explicitar as regras ou rotinas processuais, subjacentes a esse comportamento do sujeito.

A análise **normativa** pretende ser a descrição do comportamento ideal, racional, superinteligente, pelo que aquele a que todo o ser humano deveria aspirar, no processo de atribuição de graus de credibilidade a acontecimentos. Os pontos fundamentais desta descrição são a coerência e racionalidade pelo que assume a forma de "*se o sujeito pensa isto e aquilo então ele* ***deve*** *fazer isto e aquilo*". Este "*deve*" é explicitado pelas condições previamente definidas de coerência, que estabelecem as propriedades subjacentes a um sistema de credibilidade racional. As condições ou princípios básicos (que numa abordagem axiomática identificam axiomas), desse julgamento probabilístico, emergem, assim, daquilo que o investigador pensa ser lógico, racional e inteligente. A construção destes sistemas axiomáticos rege-se, igualmente, pela procura de condições favoráveis à sua mensuração.

Para além do fazer emergir modelos de comportamento ideal, dentro de uma perspectiva normativa, também se desenvolvem variações sobre o tema com base em exercícios intelectuais do tipo : o que aconteceria se se abandonasse este axioma? A recompensa deste tipo de exercício reside no encontrar implicações matemáticas mais profundas, mais estéticas ou mesmo no encontrar uma maior concordância entre o sistema matemático abstrato e alguns aspectos do comportamento que se pensa caracterizarem o funcionamento do ser humano (Bell, Raiffa e Tversky 1988). Existe, assim, no emergir de modelos de probabilidade subjectiva, uma preocupação com a interacção entre o mundo real (percepcionado), o mundo imaginado (representado mentalmente) e o sistema matemático abstracto (representação matemática).

O sistema abstracto que pretende descrever ou prever o comportamento será, então, descritivo e aquele que pretende definir o ser racional será normativo. Os estudos desenvolvidos em ambas as abordagens salientam disparidades entre o que o sujeito *faz* e o que *deve fazer*. Se, atendendo ao modo como o sujeito realmente se comporta, se pretende descrever um conjunto de rotinas de processamento de informação, que aproxime esse comportamento do comportamento racional, realiza-se uma análise **prescritiva**.

Os modelos descritivos são avaliados pela sua validade empírica. Os normativos pela sua adequação teórica. Os modelos prescritivos são avaliados pelo seu valor pragmático. Pelo que, nem faz sentido criticar os modelos normativos por referência a características do comportamento do sujeito; nem faz sentido presumir os postulados teóricos de existência de um sistema de credibilidade coerente como implícitos nesse comportamento.

Embora possa ter havido alguma confusão relativamente ao desenvolvimento do conceito de probabilidade subjectiva como integrado numa teoria descritiva ou normativa, para a maioria dos autores era clara a segunda posição[13] :

> (...) probability theory is not an attempt to describe actual behavior; its subject is coherent behavior, and the fact that people are only more or less coherent is inessential [p.111, De Finetti 1937].

> (...) it may be object that (...) one and the same individual could assent to it and at other times and in different mood reject it.(...) it may be object that the probability of a proposition *a* depends on a body of knowledge going far beyond the fact that *h* is true: (...) even matters of subconscious moods, associations, artistic taste, and like.
>
> We believe that these objections are answered at one stroke by adhering to the following convention, or rather, clarification of the use and laws of ordering propositions. A given individual at a given moment may be regard as assenting to a certain set of propositions; ignoring what he may hold at any other moment or what others may believe (...) [p. 163, Koopman,1940.]

> Probability is not, however, merely psychological, and the subjectivistic theory of probability is not a empirical psychological theory os degrees os belief.(...) What has been tested (in psychological experiments) is not the theory but the people: the object is not to find out if the theory accurately describes the behavior of people, but to find out whether people are rational according to the prescriptions of the theory. (...) There remains the question of the way in which the normative theory (subjective) is to be performe. [p.6-7 Kyburg & Smokler, 1964].

> The preference theory could be studied as an axiom system without interpretation; but to mathematicians it is of only modest interest. It can be interpret as a theory about how people, corporations, or other organisms, actually behave; but as psychology, it has very limit validity and use. The interpretation for which it was developed is normative one by which a person can police his own potential decisions for incoherency. [p.307, Savage (1967)].

> (...) these criteria do not purport to describe actual behavioral attitudes so much as they characterize the partial beliefs of a rational, idealized individual. [p. 335, Fishburn,1986].

---

[13] Tal posição não passa, no entanto, sem crítica: *In what sense is this theory normative? (...) I think there are only descriptive models of reasonable behaviour. If any were normative,I do not see how they could be approximately valid. But I believe there are not any. There are models of reasonable behaviour, and all models only approximate the truth. For all its defects, personalism is a good proxy.* [p.324, Hacking,1967]

Numa análise que se pretende normativa e não meramente descritiva (...) [p.18, Faria, 1991]

O facto de se procurar encontrar uma maior concordância entre o sistema matemático abstracto e alguns aspectos do comportamento humano não converte o o modelo normativo em modelo descritivo. Procura-se estudar até que ponto é possível estabelecer um sistema coerente e racional com a violação de alguma característica considerada até então como fundamental, e cujo valor empírico foi de alguma forma posto em causa. Ora, valorizar um modelo por um príncipio empírico não significa ser empírico o critério de validade do modelo. O modelo continua a ser avaliado essencialmente pela sua adequação teórica. Pelo que uma abordagem matemática/normativa, complexificada por procurar uma aproximação com a realidade vivida, é passível de estar " a anos de luz" das rotinas de comportamento do dia a dia, (a não ser que este comportamento seja o comportamento de um sujeito puramente racional - mas aqui lembramos os estudos, do campo da psicologia, que invalidam a universalidade desta hipótese).

2) A PERSPECTIVA NORMATIVA: O CONCEITO DE PROBABILIDADE SUBJECTIVA

A leitura subjectivista da probabilidade, não é, ela própria, homogénea relativamente ao modo como interpreta o conceito de probabilidade. Savage (1972) distingue uma visão necessária e uma visão personalista e Barnett (1982) designa-as de interpretação **lógica** e de interpretação **personalista**.

A interpretação **lógica**, desenvolvida pelos trabalhos de Keynes (1921) e Jeffreys (1939) e inspirando Koopman (1940), define probabilidade como um tipo especial de relação: uma relação lógica entre um conjunto de proposições (que traduzem o conhecimento do sujeito) e uma proposição do qual se desconhece a veracidade ou falsidade (uma hipótese). Pelo que, probabilidade mede o grau de implicação ou corroboração (lógica-racional) da hipótese pela evidência. Dado um conjunto de conhecimentos (informação que representa a evidência), só existe um grau de probabilidade que representa a afirmação. Uma afirmação probabilística é verdadeira ou falsa condicionalmente ao conhecimento sob o qual foi formulada, independentemente do sujeito (impessoal).

A interpretação **personalista** é a posição subjectivista por excelência. Reporta probabilidade ao grau de credibilidade (intensidade de convicção) que o sujeito, na posse de evidência atribui a uma dada afirmação, não fazendo referência às regras que subjazem à sua génese [14] (i.e., ao

[14] Our point of view remains in all cases the same: to show that there are rather profound psychological reasons which make the exact or approximate agreement that is observed between the opinions of different individuals very natural, but there are no reasons, rational, positive, or metapysical, that can give this fact any meaning beyond that of simple agreement of subjective opinions [p.152, De Finetti, 1937].

modo como o sujeito tem acesso ao que é para si mais ou menos credível). Não estipulando, nem exigindo uma relação racional (lógica) entre conhecimento e credibilidade (que não deve ser confundido com uma relação lógica entre os diferentes graus de credibilidade), temos que a génese do juízo probabilístico pode ter outras regras que não as da lógica formal. Não existindo uniformidade de processos para exprimir um juízo probabilístico também não existe uniformidade dos seus outputs[15].

Pode-se considerar de certo modo extremista esta definição da posição personalista, nomeadamente no que diz respeito ao facto dos seus defensores não exigirem que a génese do juízo de credibilidade seja governada por regras pré-definidas, racionais. Tenha-se em consideração o contexto dos jogos, por exemplo, o do lançamento de um dado. O facto de não se considerar admissível outro juízo que não o que assente sobre a distribuição uniforme, pode ser visto como o exigir de uma lógica subjacente à sua génese. No entanto, relativamente ao mesmo contexto De Finetti (1937) afirma: *The cases of games of chance leads only to the observation of how the character of symmetry presented by the various "possible cases" can force us to judge them equally possible, but not to impose such evaluation of probability logically* [p.152].

O conceito de probabilidade subjectiva, e a teoria que o incorpora, encontra as suas raízes nos trabalhos de Frank Ramsey publicados em 1926 e 1931 e nos trabalhos de 1931 e 1937 de Bruno de Finetti (Kyburg & Smokler 1964). Neles são

---

[15] Sobre um certo ponto de vista *personalistic views lie not between, but beside, necessary and objectivistic views; for both necessary an objectivistic views may, in contrast to personalistic views, be called objective in that they do not concern individual judgements* [p.60, Savage, 1972].

apresentadas formalizações da noção da natureza de um estado de incerteza como um estado subjectivo, que se relaciona directamente com os pensamentos, opiniões, julgamentos e experiências do indivíduo. Tal visão apenas começa a ganhar popularidade com os trabalhos desenvolvidos por Savage (1954), atingindo a maioridade com a publicação da Teoria da Probabilidade (1975) de De Finetti.

Uma teoria (normativa) de probabilidade subjectiva investiga as regras sob as quais o total de credibilidade associado a uma proposição, afirmação ou acontecimento, varia consoante o total de credibilidade atribuido a uma outra proposição, afirmação ou acontecimento com que está associada. Pelo que uma teoria de probabilidade subjectiva estabelece quais as combinações de graus de credibilidade, em proposições ou acontecimentos inter-relacionados, que são admissíveis. A exigência de uma lógica subjacente à atribuição de graus de credibilidade, é formalizada por propriedades que definem um *Princípio de Coerência* (introduzido por Ramsey, 1926[16]): um sujeito deve ser coerente no sentido em que não deve ter um sistema de graus de credibilidade susceptíveis de apresentar qualquer contradição. Assim o sistema de credibilidade do sujeito deve incorporar certas propriedades, pré-definidas como condições de coerência. Um modelo axiomático que formalize estas propriedades ou condições, define o próprio conceito ou modelo normativo de probabilidade subjectivista.

Espera-se, igualmente, do sujeito um comportamento tal que, se este tem razões para concluir a proposição A então,

---

[16] Ramsey (1926) introduz a noção de consistência para definir a exigencia de não contradição entre graus de credibilidade : (...)the laws of probability are laws of consistency (...) they merely distinguish those set of beliefs which obey them as consistent ones.[p.81, Ramsey 1926]. No entanto visto que ao termo "consistência" se associa um significado matemático preciso, De Finetti (1937) sugere a utilização do termo "coerência".

deve atribuir-lhe maior credibilidade. Se as razões sugerem a concretização de $\tilde{A}$ então, a A deve ser atribuída uma menor credibilidade. Tal, em última instância, traduz uma aproximação à interpretação lógica de probabilidade: a procura de conformidade entre o sistema de credibilidade comunicado (a estrutura relacional empírica a que o subjectivismo reporta a noção de probabilidade) e a realidade vivenciada pelo sujeito (o estado de conhecimento do sujeito).

A Natureza Condicional do Conceito de Probabilidade

Atentamente analisados os modelos de probabilidade subjectiva (sob uma interpretação lógica ou não) deixam transparecer a natureza condicional atribuída a este conceito. O grau de credibilidade que o sujeito associa a um acontecimento (A) é condicional ao seu estado de informação (B_t) no momento **t**. Desta forma $P(A)$ tem implícito $P(A|B_t)$. Se o estado de informação do sujeito sofre alguma alteração $P(A)$ passa a representar $P(A|B_{t+1})$ em vez de $P(A|B_t)$. A consideração de **t** como discreto advém do facto de ser imperceptível para o sujeito mudanças infímas do seu estado de incerteza. A informação é irrelevante[17] caso $P(A|B_{t+1})=P(A|B_t)$. Os pressupostos de coerência, regra geral, definem-se relativamente a um estado de informação. Um sistema de credibilidades de um sujeito é coerente relativamente a um dado tempo(t), o que define um dado estado

---

[17] *De Finetti (1937) chama atenção para o carácter subjectivo associado a esta "irrelevância":*
There is a particular case, that of independence, for which the influence of past observations is rigorously zero.(...) The subjective evaluation plays an essential role: the condition of exchangeability itself has, from the begining, only a subjective value. [p.153]

informacional (i.e, t+1 define uma mudança - que pode ser nula- em termos de estado de incerteza do sujeito). A análise de coerência é como que, uma análise fotográfica se opõe ao processo dinâmico sobre o qual as credibilidades que um sujeito sujeito associa a um dado acontecimento se actualizam, se ajustam ao seu estado de informação.

A necessidade de formalizar a condicionalidade da noção de probabilidade, embora não exclusiva, é manifesta nos promotores da interpretação lógica de probabilidade. Keynes (1921) desenvolve a primeira formalização da noção de probabilidade condicional e Koopman (1940 a e b) deixando bem claro que esta relação não é necessáriamente completa, define as condições em que a relação qualitativa da forma $A|B \geq C|D$ pode ser representada por uma medida de probabilidade condicional.

Na II Parte deste trabalho serão examinadas as regras que regem a construção de modelos axiomáticos e seguidamente, o processo de construção axiomático de diferentes modelos de probabilidade subjectiva não condicional, com vista a se proceder a um estudo comparativo. Este estudo tem por base uma interpretação personalista de probabilidade (subjectiva).

A finalizar a I Parte deste trabalho atender-se-à, uma vez mais, ao aspecto descritivo, i.e., analisar-se-à não o conceito de probabilidade subjectiva mas sim o conceito subjectivo de probabilidade.

3) A PERSPECTIVA DESCRITIVA: O CONCEITO SUBJECTIVO DE PROBABILIDADE

No campo psicológico define-se probabilidade subjectiva como uma estimativa da probabilidade associada a um acontecimento, realizada por um individuo isolado, pelo que se trata de uma concretização do conceito subjectivo de probabilidade. Regra geral trata-se de um estimação numérica relativa ao intervalo [0,1]. Na procura de definição de um modelo descritivo do comportamento do individuo, pretende-se descriminar as propriedades destas estimativas, isto é, descrever as regras subjacentes ao processo de estimação.

Não cabe no âmbito deste trabalho a apresentação de teorias psicológicas que procuram justificar e explicar o comportamento de estimação de probabilidade do sujeito. Interessa, neste contexto específico, examinar os pontos em que as estimativas realizadas livremente pelo sujeito, em certas circunstâncias, não respeitam as regras de coerência, as propriedades definidas como básicas (pelas abordagens normativas) ao conceito de probabilidade. Isto não só por serem pontos onde a procura de "racionalidade" (no sentido de coerência) terá de ser conscientemente procurada e cuidadosamente vigiada (regendo a construção de modelos prescritivos), como se trata de pontos que definem axiomas a serem redefinidos experimentalmente em abordagens normativas [18] de forma a permitir uma maior concordância entre as teorias

---

[18] Nas páginas 339 e 340 de Fishburn (1986) podem-se ler referências às primeiras tentativas neste sentido. Nelas se destacam os trabalhos de Luce (1956) relativamente a estruturas que definem semi-ordens, e de Fishburn (1970, 1985) em estruturas que definem ordens intervalares. Designaremos este tipo de abordagem de abordagens não-standard.

matemáticas e o comportamento humano (se possível[19]).

O trabalho de identificação de violações dos *cânones* de coerência teve origem nos trabalhos de Ellsberg em 1961 e 1964 (Fishburn, 1986, Bell et al, 1991) e foi replicado e explicitado em diferentes investigações. Destas destacamos os trabalhos realizados por Amos Tversky (ex: Tversky & Kahneman 1981; Kahneman & Tversky 1973, 1979).

Visto a apresentação das propriedades intrínsicas às estimativas realizadas pelos sujeitos ir ser feita vazia de conteúdo teórico, elas serão contextualizadas relativamente a alguns settings experimentais. Assim vejamos alguns exemplos clássicos:

Linda tem 31 anos, é solteira,reservada e inteligente. Ela é formada em filosofia. Enquanto estudante preocupava-se com questões de justiça social e descriminação e participou em manisfestações anti-nucleares. Ordene os seguintes acontecimentos em termos da sua credibilidade:(a) Linda é caixa de um banco; (b) Linda é caixa de um banco e uma feminista activa.

Violando o principio de **monotocidade e aditividade** (ver Tabela I) os sujeitos ordenam, com maior frequência, **(b)** como superior a **(a)**. Diferentes replicações destes resultados foram efectuadas relativamente a uma grande diversidade de conteúdos. Na sua globalidade elas sugerem a existência de uma constante sobre-credibilidade associada a acontecimentos conjuntivos e uma sub-credibilidade associada à disjunção de

---

[19] Because framing effects and the associated failure of invariance (ver texto para definição destes efeitos) are ubiquous, no adequate descriptive theory can ignore this phenomena. On the other hand, because invariance is normatively indispensable, no adequate prescriptive theory should permit its violation. Consequently, the dream of constructing a theory that is acceptable both descriptively and normatively appears unrealizable [p.172 Tversky & Kahneman, 1991)

acontecimentos (ver por exemplo Bar-Hillel, 1973; Tversky and Kahneman, 1974, 1979). A natureza do conteúdo dos problemas é igualmente responsável por uma proporção significativa da variabilidade encontrada.

Os trabalhos de Ellesberg (1961; ver Fishburn, 1986) fornecem-nos diversificados exemplos de claras violações do princípio de **complementaridade**, onde o grau de credibilidade associada a $(A \cup \tilde{A})$ não atinge a certeza, representada pela unidade.

Um grande número de investigações (ex: Edwards, 1968; Peterson & Beach, 1967; Slovic & Lichtenstein, 1971) visou estudar a forma como o sujeito intuitivamente revê as suas crenças comparativamente ao modelo normativo que visa a recorrência à **"Regra de Bayes"**. As conclusões apontam uma atitude conservadora dos sujeitos, i.e, as suas crenças sofrem uma alteração bem menor do que aquela que resultaria do uso da regra de Bayes. As implicações deste tipo de estudo relativamente à noção de probabilidade advém da "falta de lógica" que define a relação entre uma proposição e o conjunto de proposições que define o nosso estado de conhecimento (Keynes, 1921; Koopman, 1940). A utilização intuitiva da regra de Bayes não é pressuposto de coerência para uma visão personalista de probabilidade, no entanto está implícito que se o sujeito adquire informação relevante deve rever o seu sistema de credibilidades (note-se que a informação quando avaliada pelos sujeitos experimentais era considerada relevante, apenas acontecia não ser utilizada no processo de actualização das suas crenças). O sistema de credibilidade de um sujeito é acentuadamente sensível a diversas características da informação (ver Bell et al, 1991) que recebe:

- *independência* (sujeitos dão maior peso a informação consistente, correlacionada, do que a fontes independentes de informação);
- *acessibilidade na memória* (certa informação tem maior probabilidade de ser recuperada da memória do que outra, pelo que, tem maior probabilidade de servir de base ao juízo probabilístico do sujeito. A ordem com que essa informação é extraída também afecta o juízo probabilístico realizado);
- *relevância* (verifica-se uma tendência para informação, pré-definida pelos sujeitos como irrelevante, afectar o seu julgamento);
- *outras*: capacidade imagética do acontecimento, concordância com expectativas, formulação da proposição ou forma de apresentação do acontecimento (violando um **princípio de invariância)** etc, afectam os juízos probabilísticos.

Tversky (1969) com base nos trabalhos de May, 1954, verifica **intransitividade** no juízo de preferências que a maioria de sujeito experimentais associam a acontecimentos multi-dimensionais não estruturados por propriedades normativas. Um exemplo, reduzido á situação bi-dimensional, consiste na definição de uma situação onde três indivíduos concorrem a um mesmo emprego. A informação sob a qual podemos fundamentar a escolha de um candidato, é o seu QI (coeficiente de inteligência) e sua experiência passada (número de anos de experiência). Imaginemos que atribuimos maior credibilidade à contratação do sujeito mais inteligente. No entanto, se os sujeitos não diferirem grandemente em inteligência, atenderemos ao seus anos de experiência para estabelecer a probabilidade de contratação. Tomemos a diferença negligenciada como a de 10 valores de QI. Tendo:

A:	QI= 100	Exp = 3
B:	QI= 110	Exp = 2
C:	QI= 120	Exp = 1

definiriamos a relação de preferência associada á contratação dos candidatos por: A > B, B > C, e C > A, o que sem dúvida alguma viola o pressuposto de transitividade. Este tipo de violação do princípio da transitividade é patente em muitos juízos envolvam acontecimentos não uni-dimensionais, no entanto, nunca foi directamente associada ao juízo de credibilidade ou juízo probabilístico.

Como o demonstra os resultados até agora apresentados, é grande a discrepância entre os modelos descritivos e os normativos. Tal suscita, por vezes, críticas relativas ao conteúdo empírico dos modelos normativos. No entanto, é forte o impacto de argumentos como, por exemplo, os apresentados por Smith:

> It is rather like arguing against the continued use of logica or arithmetic on the grounds that individuals can be shown to perform badly at deduction or long division in suitable experiments [Smith, 1984 In Berger, 1986 ,p.351].

II PARTE

A ABORDAGEM AXIOMÁTICA À RELAÇÃO DE PROBABILIDADE QUALITATIVA/COMPARATIVA

I) FUNDAMENTOS DE UM MODELO AXIOMÁTICO DE PROBABILIDADE

A) Definição de "estruturas de probabilidade" e de "medida de probabilidade"

Falar numa **teoria de medida de probabilidade**[20] é reportar-nos directamente a uma aplicação da perspectiva ou abordagem da teoria de medida ao campo das probabilidades. Pelo que se trata, de uma teoria de probabilidade que emerge:

a) da definição da **estrutura relacional "empírica"** (uma estrutura que formaliza a característica essencial do conceito de probabilidade que é a de ser um conceito relacional), caracterizada pela relação binária do tipo "é *mais provável do que*" ($\succ$) ou "é *pelo menos tão provável como*" ($\succeq$), entre elementos de um conjunto de proposições ou acontecimentos, finito ou infinito;

b) da definição do **método empírico**[21] preconizado para definir essa relação binária (crenças do sujeito, frequências etc..);

---

[20] A utilização de um enquadramento pela teoria de medida nem sempre é bem aceite, veja-se por exemplo a posição de De Finetti (1975).

[21] Tal como vimos no primeiro capítulo: "o debate do significado do conceito de probabilidade encontra-se no método empirico aceitável para determinar a relação $\succeq$. [Krantz et al. (1971)]

c) da construção de um **sistema formal numérico** passível de representar o sistema relacional empírico (qualitativo/ comparativo [22]), i.e., do enunciar e demonstrar um teorema de representação que defenda a existência de uma estrutura relacional numérica homomórfica[23] à estrutura qualitativa; e

d) da definição do grau de liberdade associado a a essa representação, i.e., do enunciar um teorema de unicidade que estabeleça a distintividade dessa estrutura numérica (escala).

Não foi, no entanto, esta a abordagem que governou o emergir de uma teoria de probabilidade subjectiva com base em modelos estruturais axiomaticamente construídos. O sistema formal numérico que delimita a noção de probabilidade, não foi construído de forma a representar o sistema relacional empírico qualitativo, comparativo, sendo o seu estatuto de conceito derivado, associado a uma abordagem frequencista (Maistrov, 1974).

O desenvolvimento de um modelo estrutural numérico de probabilidade "consensualmente" aceite, levou a que a abordagem tenha vindo a divergir diametralmente da integrada por um modelo da teoria de medida. Procuram-se sistemas

---

[22] Embora na literatura do campo das probabilidades se oponham os autores que recorrem a uma ou à outra designação da estrutura de relacional empírica, neste trabalho utilizá-las-emos como sinónimos.

[23] Krantz et al, 1971 , em nota da página 8 referem preferir falar de homomorfismo em vez de isomorfismo, "f is not one to one; in general f(a) = f(b) does not mean that the rods **a** and **b** are identical, but merely of equal length."

relacionais empíricos passíveis de serem representados pela estrutura relacional numérica que define uma medida de probabilidade. Trata-se da construção de um teorema de representação ao contrário, i.e., um teorema de representação mais sensível à construção de uma relação qualitativa a partir da quantitativa do que vice-versa (Bolker, 1967). No desenvolvimento de um modelo de probabilidade qualitativa/comparativa é, de algum modo, tida em conta (mais ou menos explicitamente) a estrutura de probabilidade quantitativa.

Embora não isento de crítica (ver por exemplo Fine, 1973 e Faria, 1991) o sistema axiomático proposto por Kolgomorov é na generalidade aceite como "personificando" o próprio conceito de probabilidade, pelo que define o que, neste trabalho, será designado de "Medida de Probabilidade".

DEF: MEDIDA DE PROBABILIDADE (ADITIVA) - Estrutura de Probabilidade Quantitativa:

Sendo:

$U > \emptyset$ (conjunto não vazio)
£ é uma álgebra de U
$\mathbb{P}$: £ $\rightarrow \mathbb{R}$

< U, £, $\mathbb{P}$, $\geq$> é uma estrutura relacional numérica com características de espaço de probabilidade sse:

K1): $\mathbb{P}(A) \geq 0$
K2): $\mathbb{P}(U) = 1$
K3): $\mathbb{P}(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Assim, a estrutura de PROBABILIDADE QUANTITATIVA ADITIVA[24] pode ser encarada como uma representação no domínio [0,1] (K1 e K2) finitamente aditiva (K3), que preserva a ordem pré-definida qualitativamente (se se postular compatibilidade).

Dentro deste quadro de acontecimentos verificamos que os desenvolvimentos relativos à noção de uma medida de probabilidade emergem :

(1) Dos estudos das condições (axiomas), sob as quais se pode falar na existência de uma medida de probabilidade;
(2) Dos estudos das condições sob as quais se pode conceber uma medida de probabilidade.

No primeiro caso (1) o objectivo é o de definir o conjunto de axiomas, que:

- garantam a representação numérica da estrutura de probabilidade qualitativa: a sua **compatibilidade**[25] com a estrutura de probabilidade quantitativa.

---

[24] Não será tido em conta o "espaço de probabilidade com aditividade numerável" (countably additive probability space), onde à axiomática de Kolmogorov se associa a proposição:

$$\text{Se } A_i \in \pounds \quad \text{e} \quad (A_i \cap A_j) = \emptyset \; : \; (i \neq j), \; [i,j=1,2,3,\ldots]$$

$$\text{então: } \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

As condições de compatibilidade que apresentadas serão apenas estabelecidas relativamente ao espaço de probabilidade onde se assume a mera aditividade, no entanto, como Faria (1991) refere " *as condições de compatibilidade que iremos descrever (...) assumindo apenas a aditividade da medida, podem facilmente ser generalizadas para o caso da aditividade numerável*", caso se utilizem os resultados de Villegas, 1964 (ver axioma de Continuidade Monótona).

[25] O conceito de compatibilidade confunde-se com o de homomorfismo: Dada uma estrutura empirica $<\pounds, \succsim>$ e uma estrutura numérica $< \mathbf{R}_+, \geq >$, a atribuição numérica $\mathbf{P}$ é um homomorfismo no sentido em que transforma $\pounds$ em $\mathbf{R}_+$ e $\succsim$ em $\geq$, de tal modo que $\geq$ mantém as propriedades de $\succsim$.

DEF: Uma medida P em £ diz-se **compatível** com $\succsim$ se (Fishburn, 1986):

$$A \succsim B \iff P(A) \geq P(B)$$

- e, permitam estabelecer a **unicidade** dessa representação (no sentido de que as únicas outras funções que servem de medida de probabilidade são resultado de transformações admissíveis).

DEF: Uma transformação diz-se **admissível** se o sistema numérico obtido por se substituir P pelos valores transformados, representarem do mesmo modo o sistema **<U,£,$\succsim$>** [26].

DEF: O conjunto de transformações admissíveis determina o grau de unicidade da medida

---

No segundo caso definem-se: **a)** teorias de probabilidade construídas sob teoremas de representação incompletos, i.e., teoremas que não pressupõem um homomorfismo ou compatibilidade total mas sim uma **quasi-compatibilidade**[27],

---

DEF: Uma medida P em £ diz-se **quasi-compatível** com $\succsim$ se (Fishburn, 1986):

$$A \succsim B \Rightarrow P(A) \geq P(B)$$

---

[26] As transformações admissíveis numa medida de probabilidade são limitadas ao conjunto de transformações lineares positivas do tipo: $g[P(A)] = xP(A) + y$, i.e., os seus valores, com excepção da origem e unidade de medida não são arbrtrários.

[27] Quasi-probabilidade é a tradução feita por Faria (1991) à designação "almost compatible" de Fishburn 1986. Não se deve confundir com a forma incoerente com que este autor define o mesmo termo em 1970.

e, **b)** teorias que estabelecem medidas de probabilidade limitadas a sub-estruturas do sistema relacional , i.e., cujo teorema de representação é definido em relação a uma parte do todo definido pelo sistema relacional (ver no próximo subcapítulo o noção de compatibilidade criss-cross).

Em qualquer dos casos **a)** ou **b)**, verificam-se problemas com a construção de um teorema de unicidade associado às representações alcançadas.

B) O sistema axiomático: axiomas necessários e/ou suficientes

A formalização da estrutura relacional binária do tipo "*é mais provável do que*" ou "*é pelo menos tão provável como*", é feita via a construção de uma axiomática que se define por afirmações:

a) relativas à existência de um universo de elementos que servem de base e dão conteúdo à estrutura relacional (o seu significado - ver noção de acontecimento na I Parte - sendo exterior ao sistema axiomático relaciona-se directamente com o significado do próprio sistema);

b) relativas às relações entre esses elementos, às propriedades dessas relações, às operações sobre os elementos e às propriedades dessas operações.

A criação de um sistema ou modelo axiomático pode ter duas finalidades: a de dar corpo a uma entidade única, primitiva, ou a de representar uma realidade previamente definida (surgindo o corpo axiomático como uma noção derivada).

Quando o objectivo é o da representação, o conjunto de axiomas/ proposições procura ser uma representação abstracta do sistema ou objecto real. Esta abstracção é necessária à compreensão e ao desenvolvimento do problema (derivação das suas consequências pelo uso da argumentação lógica) que após concluído pode ser novamente interpretado em termos das consequências para o objecto real. Pelo que, a axiomatização juntamente com os resultados obtidos serve de estímulo ao desenvolvimento de uma teoria, e diferentes axiomatizações descrevem diferentes redes hipotético dedutivas (i.e., modelos teóricos), sobre a realidade em estudo.

Existem, assim, três pontos fulcrais da abordagem axiomática (ver por exemplo Grize, 1967; Krantz et al., 1971 e Blanché,1978):

1) o da criação do modelo - estabelecimento de um certo número de propriedades/axiomas;

2) o da argumentação lógica - a dedução de todas as verdades da teoria (teoremas), e

3) o da interpretação ou aplicação do modelo.

Enquanto o segundo ponto se rege pelas regras específicas da lógica os restantes regem-se pelo simples bom senso (muitas vezes calibrado pelo sucesso da aplicação do modelo: verificação dos teoremas de representação e unicidade).

Na realidade, se a escolha dos axiomas é, em certos aspectos, arbritrária, nem por isso é feita ao acaso: "é *regulada por diversas exigências internas mais ou menos imperiosas*" [pag.56, Blanché, 1978]. Assim, como "regras de bom-senso" temos que o sistema composto pelo conjunto de axiomas deve ser coerente (não deve ser auto-contraditório) e de passível refutação (ser categórico ou pelo menos decidível). A independência e a economia são igualmente duas "regras de bom-senso": devemos procurar tornar o número de axiomas tão pequeno quanto possível e procurar que eles sejam independentes uns dos outros. O considerar estes princípios como simples regras de bom-senso advém do facto de se tratarem de preocupações secundárias, visto o que realmente importa é que, "*por um lado, os símbolos utilizados tenham uma significação bem determinada, e por outro, que a dedução dos teoremas se faça segundo uma lógica intuitiva*"[pag. 143, Grize, 1967].

Uma teoria completamente formalizada estabelece todas as propriedades e características do sistema em afirmações simples ou axiomas. Se a teoria é uma teoria de medida, cabe-lhe igualmente garantir a demonstração de um teorema de representação e definir os axiomas que garantem as condições necessárias a essa demonstração .

DEF: Entenda-se por **axiomas necessários à representação**, os que definem as condições fundamentais à construção de um teorema de representação (i.e. são uma consequência lógica do homomorfismo que se pretende estabelecer entre realidade empírica e representação matemática).

Os restantes axiomas não-necessários, designam-se de ***estruturais*** (Krantz et al., 1971) por limitarem o conjunto de estruturas empíricas que satisfazem o sistema de axiomas a um subconjunto do conjunto que satisfaz os axiomas necessários. O critério mínimo de definição de axiomas não-necessários no sistema axiomático é o destes não terem conteúdo empírico. Mas apesar de, tomados isoladamente os axiomas não-necessários, não terem conteúdo empírico associado, visto serem logicamente consistentes com qualquer realidade, eles podem contribuir directamente para o conteúdo empírico do contexto global de axiomas onde estão inseridos, i.e., podem contribuir para o conteúdo empírico associado ao sistema de axiomas.

O dilema associado à axiomatização, é o de que o sistema de axiomas necessários, regra geral, não é suficiente à demonstração de um teorema de representação. Com vista a construção do teorema de representação e unicidade, acaba-se por incluír no sistema axiomas não-necessários - que caracterizam o corpo axiomático como definindo as condições suficientes à representação.

DEF: Entenda-se por **axiomas suficientes à representação,** o conjunto de axiomas que não sendo fundamental à construção de um teorema de representação (esta pode verificar-se mesmo sem a presença de algumas das suas propriedades: as estruturais), tornam a sua demonstração possível.

A selecção e justificação do conjunto de axiomas estruturais, a incorporar no modelo em estudo, é um ponto problemático no desenvolvimento de uma teoria matemática (diferentes modelos matemáticos para uma determinada realidade diferem na selecção e justificação desta axiomática adicional). A preocupação, como vimos, é a de se recorrer a condições menos limitativas (mais fracas) da realidade representada, i.e, condições estruturais que adicionem pouco (visto que na realidade acabam sempre por adicionar algum) conteúdo empírico ao sistema axiomático necessário.

Uma teoria axiomática pode e deve ser avaliada pelo número e qualidade de axiomas estruturais a que "tem" de recorrer. Duas teorias com igual número de axiomas estruturais são comparadas por um critério de "fraqueza" desses axiomas: os axiomas estruturais são tanto mais fortes quanto maior o número de dados empíricos inconsistentes com esses axiomas, forem consistentes com as propriedades necessárias (ver exemplos nos modelos apresentados adiante).

Torna-se, assim, desejável encontrar uma axiomática necessária e suficiente à demonstração dos teoremas. Tal, no que diz respeito à formalização de um modelo de probabilidade subjectiva tem sido uma meta difícil de alcançar, pois existe sempre necessidade de incorporação de axiomas estruturais, por uma de três razões (Krantz et al, 1971):
(1) pela necessidade de estabelecer um conjunto não vazio com características específicas, sobre o qual se estabelece os postulados necessários;

(2) por atribuir propriedades finitas, de aditividade numerável, a esse mesmo conjunto;

(3) para permitir alcançar soluções para certa classe de equações ou desigualdades (axiomas "salvadores").

II) MODELOS DE PROBABILIDADE: UMA ANÁLISE COMPARATIVA

Neste capítulo procuraremos definir axiomáticamente a estrutura de probabilidade qualitativa/comparativa pela comparação de alguns dos modelos oferecidos na literatura.

O conjunto global das condições que definem qualquer dos sistemas axiomáticos analisados, difere em cinco pontos:

(1) na capacidade de servir de suporte à construção de um teorema de representação (tipo de compatibilidade);
(2) na capacidade de servir de suporte à construção de um teorema de unicidade;
(3) no definir condições apenas suficientes ou necessárias e suficientes a essas construções;
(4) na qualidade dos axiomas estruturais que adicionam ao modelo e por conseguinte oferecerem modelos mais fracos ou mais fortes;
(5) na demonstração dos teoremas assentar sob uma estrutura de uma álgebra ou de uma álgebra-σ.
(6) na restrição do espaço sob o qual se define a estrutura de probabilidade qualitativa a domínios finitos e/ou infinitos.

Assim, na segunda parte deste capítulo procuraremos analisar os diferentes modelos no que diz respeito a estes pontos, apresentando novos resultados.

Dois modelos não-standard, que exemplificam este tipo de abordagem, serão apresentados detalhadamente na última parte deste capítulo.

1) A DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE QUALITATIVA/COMPARATIVA

A definição da estrutura de probabilidade qualitativa, subjacente a diferentes modelos, passa pela definição de uma relação binária numa álgebra booleana de um espaço de acontecimentos finito ou infinito.

Assim, tem-se:

U = um conjunto qualquer que se designa de Universo;

£ = familia de subconjuntos de **U** com propriedades de uma álgebra ou álgebra-σ (ver apêndice);

A, B, C... como acontecimentos

Ã como complementar de A

$\emptyset$ é conjunto vazio.

Pelo que **£** refere quer uma álgebra ou corpo Booleano, onde se define uma relação binária $\succsim$, quer uma álgebra-σ onde se define a mesma relação. Os elementos de **£** sendo acontecimentos são elementos probabilísticos, i.e., entidades às quais se atribuí uma dada probabilidade, se associa uma dada credibilidade.

Referindo-nos a modelos axiomáticos, estabeleceremos por via axiomática as propriedades da **relação** $\succsim$, definida em $<U, £, \succsim>$. A recorrência à relação $\succsim$ ("pelo menos tão provável como") como básica em vez de à relação $\succ$, tem a vantagem em permitir identificar A e B como elementos não comparáveis (Keynes, 1921; Fishburn,1986) quando se estabelece que nem ($A \succsim B$) nem ($B \succsim A$). Com a relação estrita definida como básica a não-comparabilidade fica confundida com equiprobabilidade por ser incorporada em ~ (Fishburn, 1986).

A selecção dos axiomas a incorporar na definição <U, £, ≿> obedece a dois critérios: o critério empírico (ou racional, no sentido de Suppes, 1974) e o critério formal (estrutural). Os axiomas procuram representar uma realidade empírica prédefinida (critério empírico) mas necessitam igualmente, como vimos, de definir as condições suficientes ao estabelecimento da representação numérica homólogada. Assim, temos que:

> "(...) o percurso da criação de uma probabilidade quantitativa compatível com uma determinada estrutura inicial de probabilidade comparativa, pode não originar resultados satisfatórios por duas ordens de razões: o estabelecimento de axiomas que contrariem a atitude do individuo face ao desconhecido (não obedecer ao critério empírico) e a criação de axiomas cuja verificabilidade se torna na prática impossível de controlar." [p.40 ; Faria, 1991].

O conjunto de propriedades atribuídas a ≿ definem-na, usualmente, como um tipo específico de **relação de ordem** em £. Desta forma entendamos a linguagem definicional utilizada e os teoremas que a acompanham (tendo por base Faria, 1991):

DEF: RELAÇÃO BINÁRIA DE ORDEM: O qualitativo de uma relação de ordem é definido pelo composto entre alguns do seguinte conjunto de propriedades:

01) **Dicotómica:** $(A \neq B) \Rightarrow (A\ \rho\ B) \vee (B\ \rho\ A), \forall A,B \in £$;

02) **Transitiva:** $(A\ \rho\ B) \wedge ((B\ \rho\ C) \Rightarrow (A\ \rho\ C), \forall A,B,C \in £$

03) **Assimetria:** $(A\ \rho\ B) \wedge (B\ \rho\ A) \Rightarrow (A = B), \forall A,B \in £$

04) **Reflexiva:** $(A\ \rho\ A) \quad \forall A \in £$

05) **Anti-Reflexiva:** $(\tilde{A}\ \rho\ A) \quad \forall A \in £$

DEF: Uma relação Dicotómica e Reflexiva diz-se **Completa**

DEF: Propriedades alternativas à existência de uma relação completa são:

06) **Anti-isolamento de conjuntos:**

$(A \rho B) \wedge (C \rho D) \Rightarrow (A \rho D) \vee (B \rho C)$, $\forall A,B,C,D \in £$

Dois pares relacionados obrigam a uma relação entre eles

07) **Anti-isolamento de elementos:**

$(A \rho B) \wedge (B \rho C) \Rightarrow (A \rho D) \vee (D \rho C)$, $\forall A,B,C,D \in £$

A relação entre três elementos obriga ao estabelecimento de uma relação com um 4ª elemento.

A combinação destas propriedades define um tipo de ordenação específico em **£**, pelo que[28]:

DEF: **Ordem Total:** 01-03
DEF: **Ordem Parcial:** 02-04
DEF: **Quasi-ordem:** 02 e 04
DEF: **Ordem-Fraca:** 01 e 02 logo 04
DEF: **Semi-ordem:** 05-07 logo 03
DEF: **Ordem Intervalar:** 03 e 06

---

[28] Em Faria (1991) podemos ler que, uma relação de ordem total é definida pela transitividade, assimetria e dicotomia da relação. Como o autor afirma em Nota da página 24: *uma relação de ordem total não é necessáriamente reflexiva; pode ainda ser ou não anti-reflexiva.*
Mas, por exemplo, em Krantz et al (1971) podemos vê-la definida como necessáriamente reflexiva. Na realidade como afirma Grize: *A terminologia das relações de ordem parece ainda bastante variável-sobretudo de uma lingua para outra. Cumpre, portanto, estar seguro de, em cada caso, considerar a relação com as propriedades que lhe são atribuídas pelo autor respectivo* [pag. 90, Grize, 1969].

A **Tabela I** apresenta um conjunto de propriedades de $\succeq$ axiomatizadas ou implícitas na maioria das teorias de probabilidade subjectiva. Tratando-se de propriedades seleccionadas por um critério empírico verificamos uma quasi-universalidade da sua utilização quer como axiomas quer como resultados (ver adiante).

TABELA I : Propriedades axiomatizadas em Modelos de Probabilidade Subjectiva

---

N1) Completude (Comparabilidade)**:** $(A \succeq B)$ ou $(B \succeq A)$, $\forall A \in £$

N2) Reflexividade: $(A \succeq A)$, $\forall A \in £$

N3) Transitividade: $(A \succeq B) \wedge (B \succeq C) \Rightarrow (A \succeq C)$, $\forall A,B,C \in £$

N4) Aditividade: Se $[(A \cap C = \emptyset) \wedge (B \cap C = \emptyset)]$, então
$(A \succeq B) \Leftrightarrow [(A \cup C) \succeq (B \cup C)]$, $\forall A,B,C \in £$

N5) Não trivialidade: $(U \succ \emptyset)$

N6) Não-negatividade: $(A \succeq \emptyset)$, $\forall A \in £$

N7) Monotocidade: Se $\supset$ então $\succeq$

N8) Relação entre complementares: $(A \succeq \bar{A})$ ou $(\bar{A} \succeq A)$ $\forall A \in £$

N9) Cancelação: Para todo o subconjunto $A_o \ldots A_n$, $B_o \ldots B_n$ de U,
se $A_i > B_i$: $0 \leq i < n$ então
se $\sum_i \mathbf{I} A_i(x) = \sum_i \mathbf{I}\, B_i(x)$:. $B_n \geq A_n$

Regra geral, os diferentes modelos axiomáticos definem a relação $\succeq$ em $\langle U,\pounds,\succeq\rangle$. No entanto, como veremos adiante (ver subcapítulo 3), tanto U como $\pounds$ podem diferir em algumas características. Tanto as propriedades como os seus domínios de aplicabilidade são bastante variados, por variados serem os sistemas axiomáticos estabelecidos para definir a noção de probabilidade qualitativa. No entanto a variabilidade percebida é bem maior do que a real, como veremos adiante[29].

Procederei seguidamente à comparação de modelos axiomáticos (*standards*) desenvolvidos pelos seguintes autores: de Finetti (1937); Savage (1954); Luce (1967); Fine (1971); Scott (1964); Suppes e Zanotti (1976).

Como exemplos de abordagens *não-standards* farei referência os trabalhos de Suppes (1974) e Faria (1991).

Esta distinção entre modelos standards e não standards tem por base o facto destes últimos originarem medidas não exactas ou incompletas de probabilidade.

A selecção destes modelos teve por base os seguintes critérios:

(a) ser uma abordagem axiomática da noção de probabilidade subjectiva/personalista;
(b) ter relevo na literatura do campo;
(c) reportar-se a uma medida de **probabilidade aditiva;**
(d) fornecer na globalidade uma panorâmica

[29] As propriedades básicas dos diferentes modelos axiomáticos, regra geral, não se encontram definidas ao mesmo nível de abstração. Tal leva a que um sistema axiomático aparentemente mais parcimonioso, por recorrer a um número menor de propriedades, possa na realidade o não ser.

representativa desse campo [30] .

Relativamente a estes critérios podem-se considerar como lacunas significativas os trabalhos de Fishburn (1969; 1975 entre outros) e principalmente o de Kraft, Pratt e Seidenberg (1959). Acontece porém que:

- Fishburn difere dos autores em estudo, pelo facto de não identificar um modelo de probabilidade subjectiva própriamente dito. A sua perspectiva visa, o "enfraquecimento" dos sistemas axiomáticos de forma a estabelecer as condições mínimas a um teorema de representação, com base na quasi-compatibilidade.

- Os trabalhos de Kraft et al. (1959) enquadram-se totalmente nos perspectivados para esta análise. Como Fishburn refere (1969, p.2118): *Kraft, Pratt and Seidenberg (1959) were the first to present necessary and suficient conditions for strict agreement when the set S os states is finite. Scott (1964) rephrases these conditions* , (ver também, Niiniluoto, 1972). Assim sendo, os trabalhos de Kraft et al., não se encontram omitidos na análise comparativa mas sim, representados pelos trabalhos de Scott (1964).

---

[30] Assim, não serão incorporados nesta análise comparativa trabalhos:
- que apesar de teorizarem probabilidade subjectiva têm dela uma visão lógica (ex: Keneys, 1921, Koopman, 1949 a e b);
- que definam a algebra £ exclusivamente integrada numa estrutura de decisão (ex: Ascombe e Auman, 1963; Fishburn, 1967; Myerson, 1979; Pratt et al. 1964).
- que se reportem a uma medida não aditiva ou de aditividade numerável (ex: Fine, 1973 ; Villegas, 1964).

A análise comparativa dos modelos teóricos seleccionados extender-se-à ao longo deste capítulo, sendo os princípais resultados sintetizados no seu final. O primeiro ponto desta análise centrar-se-à no modo como a definição de cada modelo deixa transparecer uma estrutura básica em torno da qual se destacam algumas idiossincrasias.

TABELA II: Comparação dos modelo axiomáticos ao nível dos axiomas necessários.

	FINETTI	SAVAGE	LUCE	FINE	SCOTT	SUP-ZANOTTI	SUPPES	FARIA.
AXIOMAS NECESSARIOS--------								
N1) Completude	A	A	A	A	A	A	A	@
N2) Reflexiva	T1	T1	T1	T1	T1	T1	T1	A
N3) Transitividade	A	A	A	A	T2	A	A	A
N4) Aditividade	A	A	A	A	T3	A	A	A
N5) Não-trivialidade	A	A	A	A	A	A	A	A
N6) Não-negatividade	T4	A	A	A	A	A	A	T4
N7) Monotocidade	A	T5	T5	T5	T5	T5	T5	A
N8) Rel.complementares	T6	T6	T6	T6	T6	T6	T6	A
N9) Cancelação					A			
AXIOMAS ESTRUTURAIS-----------								
E1)∀ n. Partiç. Unif.	A							
E2)∀ n. Part.Quasi-Unif.				A				
E3) Partiç.Savage		A						
E4) Part. de Luce			A					
*E5) Est. Arquimediana			A			A	A	
*E6) Top. c/ base numerável				A				
*E7) Continuidade							A	

Axiomas E1 - E7 encontram-se definidos e comparados adiante (subcapítulo 3).
*- Numa perspectiva da teoria da medida este axioma é definido como necessário
A- Propriedade axiomatizada no modelo
@- Propriedade não contemplada quer como axioma quer como resultado
T- Propriedade derivado do sistema de axiomas, pelo que resultado
T_i- ver demonstração i

Resultados e Demonstrações

Teorema 1: Uma relação completa é reflexiva

Dem: Se $A \succeq B$ $\forall A,B \in £$, então $A \succeq A$, $\forall A \in £$

Teorema 2: A propriedade de cancelação garante a transividade da relação $\succeq$ (Suppes,1974)

Dem:

$I_A + I_B + I_C = I_B + I_C + I_A$ significa que

$\forall x \in U : I_{A(X)} + I_{B(X)} + I_{C(X)} = I_{B(X)} + I_{C(X)} + I_{A(X)}$

Se por hipótese $(A \succeq B)$ e $(B \succeq C)$ então por este axioma temos que $(A \succeq C)$

Teorema 3: A propriedade de completude e de cancelação garante a propriedade aditividade da relação (pp. 247, Scott, 1964).

Dem: Scott (1964) demonstra ser o axioma de Cancelação condição necessária e suficiente à compatibilidade, pelo que $A \succeq B$ sse $P(A) \geq P(B)$.
Assim, com Se $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, se $(A \succeq B)$ vem que $P(A) \geq P(B)$,
$P(A \cup C) = P(A) + P(C)$, $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$ e $P(A \cup C) \geq P(B \cup C)$.
Reciprocamente de $P(A \cup C) \geq P(B \cup C)$ podemos tirar $P(A) \geq P(B)$.

Teorema 4: A não negatividade $[A \succeq \emptyset]$ é uma consequência directa da monotocidade $[\supset \Rightarrow \succeq]$

Dem: Tendo que $\supset \Rightarrow \succeq$, e visto que $A \supset \emptyset$ (qualquer conjunto tem o vazio), $\forall A \in £$ temos que $A \succeq \emptyset$

Teorema 5: A aditividade $[(A \cup B) \cap C = \emptyset] \Rightarrow (A \succeq B) \Leftrightarrow [(A \cup C) \succeq (B \cup C)]$ e a não-negatividade $(A \succeq \emptyset)$ garantem a monotocidade $[A \supset B \Rightarrow A \succeq B]$.

Dem: Suponha-se $A \supset B$.
A não-negatividade garante-nos que $[A-B \succeq \emptyset]$
Pelas leis da intercepção temos que $[(A-B) \cap B = \emptyset]$
Assim:

$$[(A-B) \succeq \emptyset] \Leftrightarrow [(A-B) \cup B] \succeq (\emptyset \cup B) \Leftrightarrow (A \succeq B).$$

Teorema 6: Uma relação completa pressupõe a relação entre complementares

Dem: Se $A \succeq B$ ou $B \succeq A$, $\forall A,B \in \mathcal{L}$, então $A \succeq \tilde{A}$ ou $\tilde{A} \succeq A$

Analisando o quadro apresentado ressaltam algumas questões:

Em primeiro lugar o facto da escolha de uma propriedade como axioma ou como resultado (N**i** com **i**$\geq$2 [31]) parecer traduzir, em grande parte, uma opção de ordem estética.

Em segundo lugar, a unanimidade posta na escolha de N5 como axioma, de forma a garantir a existência de um contexto onde faça sentido o sujeito expressar a sua atitude e crença.

E por último a existência de uma quasi-unanimidade, quer como axioma quer como resultado, no que diz respeito às propriedades definidas pelos axiomas N1-N7.

Tal como Fine (1973) refere, elas contituem " *the basic axioms of comparative probability*" [p.221]. Savage incorpora-os no seu sistema axiomático com base nos trabalhos de De Finetti e designa a estrutura definida por esses axiomas de **Probabilidade Qualitativa** (p.33, 1954). Assim, e tendo em vista a facilidade de exposição, passarei a referir a estrutura definida pelo conjunto de propriedades N1-N7 de estrutura de Probabilidade Qualitativa - **PQ**.

Ao definir Probabilidade Qualitativa axiomáticamente, afirmamos que, na medida em que se encontrem satisfeitas as condições axiomatizadas, a expressão da credibilidade associada a um universo de acontecimentos é **coerente.** E o sistema definido por esses graus de credibilidade refere uma

[31] Como veremos adiante, ao tomar $\succeq$ como básica a reflexidade impõe-se como necessária à representação, pelo que um modelo que não pressuponha a completude da relação tem necessáriamente que integrar a propriedade reflexiva como axioma.

distribuição de probabilidade subjectiva. Na realidade, as propriedades da estrutura PQ definem as **condições de coerência** a que se deve submeter a opinião de um sujeito confrontado com uma situação de incerteza. A opinião subjectiva tem a propriedade (Axioma N1,N2) de ser extensiva[32] a todo o acontecimento/ proposição. Por sua vez a transitividade (Axioma N3) da relação de credibilidade é uma exigência básica de não contradição. O Axioma N5, dá sentido a expressão da atitude do sujeito visto que diferencia do vazio o universo de acontecimentos. E como não existe nada que reflicta, como que, uma crença negativa, temos o Axioma N6, que esclarece que qualquer crença associada a um acontecimento tem expressão superior ou igual ao acontecimento nulo. Por último, à função de credibilidade é atribuida a propriedade aditiva (Axioma N4), no sentido de, se dois acontecimentos forem dijuntos de um terceiro com o qual estabelecem, cada um, uma união é condição de coerência que, esta união mantenha a relação de credibilidade que os acontecimentos isolados tinham antes.

Sem alguma preocupação de definição ou explicação dos axiomas estruturais, visto a eles se dedicar o próximo subcapítulo, passemos a uma breve apresentação dos trabalhos de cada autor:

Tendo **Savage** [33] definido os seus sistemas axiomáticos coerentemente com as condições satisfeitas pelos axiomas de

---

[32] "To any event in which we have an interest, we are, accostumated to attributing, perhaps vaguely and unconsciously a probability: if we are sufficiently interested we may try to evaluated it with more care" [ponto 1.7 de De Finetti, 1937].

[33] Note-se que Savage designa de "ordem-simples", uma relação que definimos préviamente como de ordem-fraca: a relação é completa e transitiva.

De Finetti não estranhamos, a quasi-identificação da abordagem dos dois autores: apenas diferem no tipo e condições de partição postulada para a estrutura subjacente. Assim enquanto De Finetti (1937) axiomatiza uma propriedade relacionada com a partição uniforme, Savage define, na estrutura subjacente, uma partição que designaremos de Partição de Savage (ver subcapítulo 3).

De certa forma a estrutura definida por Savage é aquela que reune à sua volta, tanto o maior número de adeptos como o maior número de críticos. Mesmo desenvolvida sob uma abordagem da teoria de decisão, e por tal associada ao conceito de utilidade, raro é o trabalho ou artigo que aborda o conceito de probabilidade sem lhe fazer referência.

Os trabalhos de **Luce** (1967) desenvolveram-se dentro da perspectiva da teoria de medida pelo que não é de estranhar a imposição de uma propriedades arquimediana (ver sub-capítulo 3) à estrutura qualitativa de probabilidade. Trata-se de um modo, habitual no campo da teoria de medida, de garantir que as representações numéricas fiquem desprovidas de valores infinitesimais ou infinitamente grande. Pelo que, se adivinha uma preocupação de mensuração superior à que existiria se seu objectivo dêsse primazia à representação da noção de probabilidade. Esta e uma outra propriedades apresentada e discutida adiante (sub-capítulo 3) são adicionadas à estrutura PQ e definem o que Luce designou de "*Regular System of Qualitative Probability*".

Fine (1971) na definição do seu modelo parte directamente da estrutura PQ - a qual referencia a Savage. A sua preocupação primeira não parece centrar-se no dar corpo à entidade relacional que é o sistema de crenças do sujeito, i.e., à representação axiomática dessa estrutura empírica. Tal como Luce (1967), Fine (1971, 1973) constrói o seu modelo visando fazer face a um problema de mensuração, pelo que lhe atribui uma propriedade arquimediana, que é definida em termos de propriedades de uma topologia de ordem (ver sub-capítulo 3).

Tanto **Scott** (1964) como **Suppes e Zanotti** (1976) criam um espaço de definição de relação "*é pelo menos tão provável como*" diferente do simples espaço de acontecimentos, mas enquanto o primeiro o faz como uma estratégia que facilita a demonstração de resultados, os segundos defendem ser o novo espaço, o contexto mais adequado ao estabelecimento de relações qualitativas.
Esta estratégia, de extender $\succsim$ a uma colecção de objectos que já não são acontecimentos, permite (como no caso de Scott) evitar alguns problemas de mensuração e de inconsistências no sistema de credibilidade do sujeito, mas não deixa de suscitar críticas. Como exemplo temos a questão levantada por Fine (1973):

> "Why should we be concerned about objects that have no reasonable interpretation in terms of random phenomena ? Inconsistencies that arise outside the domain of events, as modeled by sets of indicator functions, do not reflect adversely on the adequacy of the theory when restricted, as it would be to the domain of events." [p.24].

Estas duas abordagens ao definirem-se sobre realidades que não acontecimentos dificultam qualquer comparação com as abordagens referidos anteriormente, pelo que a sua omissão neste trabalho.

Os dois restantes modelos, o de **Suppes** (1974) e o de **Faria** (1991), destacam-se nesta leitura comparativa por definirem estruturas de probabilidade às quais, como veremos, não se associa directamente uma medida de probabilidade com estrutura Kolmogoroviana. Daí o facto de as designarmos de **abordagens não-standards.** O modelo proposto por Suppes é um exemplo feliz das abordagens que introduzem a noção de probabilidade superior e inferior. E a abordagem de Faria é a única aqui apresentada, que estabelece à priori a possibilidade da estrutura relacional não ser completa[34], pelo que admite a representação de uma realidade empírica onde existe incerteza/indecisão associada ao julgamento comparativo.

Se a principal preocupação destes modelos é a de captar o construto de probabilidade todos visam o homorfismo com uma estrutura de probabilidade quantitativa. Deste modo após definirmos o que se entende por medida de probabilidade referiremos as condições em que cada modelo permite essa representação númerica (sub-capítulo 3). Os axiomas estruturais serão então submetidos a uma análise comparativa minunciosa.

---

[34] Já Keneys (1921) e Koopman (1940), defendiam a necessidade de se considerar a relação de credibilidade como não completa. Mas a tentativa de aproximação do modelo probabilístico ao real por esta via, devido às dificuldades meteodológica que gere, não chamou a si muitos adeptos.

There is some temptation to explore the possibilities of analysing preference among acts as a partial ordering, that is in effect to replace S2 by the very weak proposition $A \geq A$*, admiting that some pairs of acts are incomparable. This would seem to give expression to introspective sensations of indecision or vacilation, which we may be reluctant to identify with indifference. My own conjecture is that it would prove a blind alley losing much in power and advancing little, if at all, in realism; but only an enthusiastic exploration could shed real light on the question.* (Savage, 1954)

2) A CONSTRUÇÃO DOS TEOREMAS DE REPRESENTAÇÃO E UNICIDADE

A) Axiomas Necessários:

Tomemos o conjunto de axiomas que definem a estrutura de probabilidade qualitativa **PQ:**

A1) Completude (Comparabilidade): $(A \succeq B)$ ou $(B \succeq A)$, $\forall A,B,C \in £$

A2) Transitividade: $(A \succeq B) \wedge (B \succeq C) \Rightarrow (A \succeq C)$, $\forall A,B,C \in £$

A3) Não trivialidade: $(U \succ \emptyset)$

A4) Aditividade: Se $[\ (A \cap C = \emptyset) \wedge (B \cap C = \emptyset)\ ]$
então $(A \succeq B) \Leftrightarrow [(A \cup C) \succeq (B \cup C)]$, $\forall A,B,C \in £$

A5) Não-negatividade: $(A \succeq \emptyset)$, $\forall A,B,C \in £$

A concordância na axiomatização destas propriedades, ou na construção de uma axiomática que as englobe, advém do facto delas definirem, como veremos, condições necessárias à representação probabilística da estrutura, isto é, condições necessárias à compatibilidade com uma medida de probabilidade aditiva.

Analizemos cuidadosamente cada uma destas propriedades isoladamente, supondo à partida a existência do homologado homomorfismo (com bae em Krantz et al, 1971). Cada propriedade que se revelar uma restrição à arbitrariedade de $\succeq$ imposta pelas características da função P, é um axioma necessário.

A1 e A2)- Sendo P uma função que preserva a ordem, e a estrutura $<$ **U**, **£**, $\wp$, $\geq$ $>$ uma estrutura ordenada, temos que a

A1 e A2)- Sendo P uma função que preserva a ordem, e a estrutura $< \mathbf{U}, \mathbf{£}, \mathcal{P}, \geq >$ uma estrutura ordenada, temos que a estrutura qualitativa define necessariamente (pelo menos) uma relação de ordem fraca (Completa e transitiva).

A3)- Visto que $P(U)=1$ e $P(\emptyset)=0$, temos que o acontecimento certo U é mais provavel que o acontecimento impossível, o que é garantido por se postular $(U \succ \emptyset)$.

A4) - A relação de ordem e a operação de união relacionam-se na estrutura quantitativa, por se considerar que, sendo A e B dijuntos de C, e sendo $A > B$ então

$$P(A \cup C) = P(A)+P(C) > P(B)+P(C) = P(B \cup C).$$

Pelo que, na estrutura qualitativa, se os conjuntos A e B forem dijuntos de C, impomos como propriedade necessária a $\succeq$:

$$(A \succeq B) <=> [(A \cup C) \succeq (B \cup C)].$$

A5)- O domínio de representação numérica é não negativo [0,1]. Ao assumir que $P(\emptyset)=0$, definimos necessáriamente que: $\forall A \in \mathbf{£}: A \succeq \emptyset$

Assim, temos que as condições definidas por uma estrutura de probabilidade qualitativa apresentam-se como *condição necessária* à definição de uma medida de probabilidade aditiva. A questão reside, agora, na sua suficiência:

Dada uma estrutura PQ é sempre possível construir uma medida P compatível com a estrutura definida pela axiomática de Kolmogorov?

Kraft, Pratt e Seidenberg (1959) demonstram-nos a falsidade deste pressuposto (num dado espaço e relativamente a um dado cardinal). Os autores respondem negativamente à questão colocada, argumentando do seguinte modo:

Tenha-se X = {a,b,c,d,e} (n=5) .
Defina-se £ como uma álgebra de U.
Considere-se a ordem para a qual se verifica:

$$\{a,c\} < \{d\}$$
$$\{a,d\} < \{b,c\}$$
$$\{c,d\} < \{a,e\}$$

Tomemos P(a) = A, P(b)= B... P(e) =E , se existir uma medida de probabilidade associada a esta ordem, temos que:

$$\begin{aligned} A + C &< D \\ A + D &< B + C \\ C + D &< A + E \end{aligned} \qquad (1)$$

Adicionando as três desigualdades obtemos:

$$2A + 2C + 2D < A + B + C + D + E$$

$$\Rightarrow \quad A + C + D < B + E$$

Pelo que, é de se esperar, se existir compatibilidade de estruturas, que a estrutura PQ que satisfaça a condição em (1) postule que: {b,e} > {a,b,c}.

Kraft, Pratt e Seidenberg (1959) no desenvolvimento do seu argumento demonstram que se pode construir uma estrutura PQ que integre coerentemente a relação inversa, isto é , que integre {b,e} < {a,b,c}.

Por comodidade cada subconjunto de U é representado por uma sequência formada por um ou mais elementos de U, ab= {ab}.

$$\emptyset<a<b<c<ab<ac<d<ad<bc<e<abc<bd<cd<ae<abd<be<$$ [35]
$$acd<ce<bcd<abe<ace<de<abcd<ade<bce<abce<bde<cde<$$
$$abde<acde<bcde<abcde=U$$

Desta forma, Kraft et al. (1959) demonstram (no domínio finito) a necessidade de se postularem condições mais fortes e mais limitativas da estrutura, do que as necessárias à existência de representação/compatibilidade.

B) Sistemas Axiomáticos Necessários e Suficientes

No decorrer da demonstração de que uma estrutura PQ não define as condições suficiente à representação numérica, Kraft et al. (1959) constroem um modelo de probabilidade qualitativa que reune um conjunto de axiomas necessários e suficientes ao estabelecimento dessa medida de probabilidade. Este sistema axiomático é limitado pela circunscrição a uma realidade finita e por não permitir a demonstração de um teorema de unicidade.

Os trabalhos de Dana Scott (1964) reformulam as

---

[35] Pode-se ler por exemplo em Faria (p.55; 1991) o Lema: "Num espaço $U=\{x_1,...,x_n\}$ onde se define uma estrutura PQ com $\mathcal{E}=2^U$, os 2^{n-1} últimos subconjuntos são o complemento dos primeiros 2^{n-1} subconjuntos tomados na ordem inversa", pelo que temos que a ordenação fica completa a partir daqui.

condições destes autores em termos de " *De Finetti framework of qualitative subjective probability*" (Suppes, 1976), pelo que mais apropriado ao enquadramento seguido neste trabalho (como já foi referido no início deste capítulo).

A estrutura < **U**, **£**, $\succeq$> é definida por Scott (1964) pelas propriedades necessárias de completude, não-trivialidade e não-negatividade. A elas se associa uma quarta propriedade (cancelação) que garante as restantes duas condições necessárias: aditividade e transitividade (ver demonstrações no sub-capítulo 1). No entanto, o estabelecimento de suficiência passa por esta propriedade não se definir directamente sob os acontecimentos mas sim sob representantes numéricos desses acontecimentos. A propriedade de cancelação é definida por recorrência ao espaço das funções indicatrizes (ou funções características). Desta forma, o autor identifica **£** (uma àlgebra booleana finita) com o conjunto das funções características de subconjuntos de **U**, sendo **U** um conjunto finito definido pelos àtomos de **£**. Assim podemos referir que é a propriedade de cancelação, em tudo o que ela pressupõe, o que garante que não se possa, no exemplo de Kraft et al. construir uma estrutura que integre a relação inversa , i.e, {b,e} < {a,b,c}. Não só a medida de probabilidade definida não é única como a demonstração do teorema de representação é restrita ao caso finito [ver pp.247, Scott, 1964].[36]

---

[36] Tal como Fine (1973) refere, Scott (1964) defende a possibilidade de extender o teorema de representação a álgebras infinitas. No final do seu artigo de 1964 afirma:
"*if the result proves to be of interest, it will be published in a future paper*". Até hoje...

Para além do modelo ficar restrito ao domínio finito, a propriedade de cancelação parece acarrectar outros aspectos desagradáveis. Tal como o autor refere:

> the unpleasant feature of 4B [no texto a propriedade de cancelação] is that it is not a strictly Boolean condition (...) it means the algebraic sum of characteristic functions and does not stand for the union of de elements [pp.246, Scott, 1964].

Suppes e Zanotti (1976) oferecem-nos avanços significativos no que diz respeito à possibilidade de criação de um sistema axiomático simultaneamente necessário e suficiente, com a possibilidade de mensuração única, em domínios finitos e infinitos. Para tal optam por não trabalhar directamente com os acontecimentos definidos em £ Segundo os autores, os "acontecimentos" não são os objectos adequados ao estabelecimento de uma análise probabilística, referindo mesmo não haver nenhum interesse concreto em se analisar os acontecimentos específicos (elementos da classe que designámos de acontecimento) em todos os pormenores ou em todas as características de que se revestem. Vêm toda a vantagem na estratégia de se abstrair os aspectos estranhos à definição da categoria **"Acontecimento"** (que designamos meramente de acontecimento), de quando dessa mesma definição. A informação relevante será apenas aquela que está contida em $A^* = \sum A_i$, tendo que todo o A^* pertence a £* (uma álgebra de *extended functions*).

DEF: (Suppes e Zanotti, 1976)

Uma álgebra £* de "*extended indicator functions*" resulta da intersecção de todos os subconjuntos que tenham a propriedade:

se $A \in £$ então

$$I_A(i) \in £^* \quad \text{tal que} \quad I_A(i) = \begin{cases} 1 \text{ se } i \in A \\ 0 \text{ se } i \in \bar{A} \end{cases}$$

tendo-se que : $A^* = \sum A_i$

e se $(A^* \in £^*)$ e $(B^* \in £^*)$ então

$$(A^* + B^*) \in £^*$$

O termo *extended* advém do facto de qualquer função indicatriz de £ se extender para funções de valores inteiros definidos em **U**, que integram £*.

No entanto, a comparação qualitativa realizando-se sobre os elementos de £*, deixa de reflectir a probabilidade de ocorrência de um acontecimento A , para referir o *valor esperado* das variáveis aleatórias que definem os acontecimentos A* (Suppes e Zanotti, 1976). Conceptualmente, Suppes e Zanotti (1976) consideram ser a comparação destes valores esperados idêntica à comparação de acontecimentos com determinada probabilidade de ocorrência[37]. Nas próprias palavras dos autores, a sequência natural de desenvolvimento

[37] Esta noção de probabilidade como idêntica á de valor esperado, traduz o que De Finetti (1937) designou ser um problema de previsão. Muito haveria a dizer sobre este assunto, mas seríamos conduzidos a um outro enquadramento dos fundamentos da noção de probabilidade subjectiva, diferente do aqui utilizado.

dos conhecimentos é:

> (i) Axiomatize qualitatively the expectation of extended indicator functions;
>
> (ii) Use this expectation to determine the **unique** probability measure;
>
> (iii) Use the probability measure to determine the expectation of all random variables defined in the space.
> [p.437, Suppes e Zanotti, 1976].

Assim temos que:

O sistema axiomático proposto por Suppes e Zanotti (1976) é definido sob uma álgebra £* de *extended indicator functions*. A estrutura $\langle U, £^*, \succsim \rangle$ é caracterizada por propriedades isomorfas ás necessárias ao estabelecimento de uma medida de probabilidade (SZ1-SZ5), sendo a relação aditiva da união de conjuntos substituida pela adição funcional. Esta substituição (alcançada por se trabalhar sob £*) permite descondicionar a hipótese de aditividade à condição de dijunção. A este conjunto de axiomas é adicionada uma condição arquimediana (SZ6) [38] .

SZ6: Se $A^* > B^*$ então para todo o C^* e D^* em £*, existe um inteiro n tal que

$$nA^* + C^* \geq nB^* + D^*.$$

Definindo desta forma uma estrutura **Qualitatively Satisfactory**, criam as condições de aplicação directa de

---

[38] Um pouco mais adiante se exporá o que se entende por propriedades arquimedianas. SZ6 define a estrutura como *arquimediana em diferenças standard* (Luce & Narens, 1992). Entenda-se que Suppes e Zanotti (1976) dentro de uma perpectiva da teoria de medida defendem ser esta uma condição necessária (ver discussão em nota um pouco mais adiante).

resultados de *Teoria de medida extensiva* (ver capítulo 3 de Krantz et.al, 1971), pelo que, condições de demonstração dos teoremas de representação e unicidade. A compatibilidade deste estrutura com uma estrutura de probabilidade numérica verifica-se quer no campo **finito** quer no campo **infinito** (p.434) (ver demonstração em Suppes e Zanotti, 1976).

Tal como seria de esperar as críticas a este trabalho centram-se na passagem de £ para uma £*, e nomeadamente no modo como a propriedade aditiva é encarada.

C) Sistemas Axiomáticos Suficientes:

A estrutura axiomática meramente suficiente, para a definição de uma medida de probabilidade, passa pela adição de axiomas não-necessários (estruturais) à estrutura PQ. Diferentes propostas neste sentido têm definido condições diversificadas de restrição da estrutura PQ. Todas elas passam pela definição de um modo de partição[39] do universo U, directo ou implícito em pressupostos Arquimedianos (Fishburn, 1986). Pelo que passamos a definir alguns conceitos básicos à sua compreensão.

Relativamente aos tipos de partição considerados nos modelos em estudo temos:

DEF: PARTIÇÃO UNIFORME DE DIMENSÃO **n.**
$U\wp n = \{Ei\}$, $i= 1,\dots,n$ é uma partição de **U** formada por n ($n\geq 2$) acontecimentos equiprováveis ($E1 \sim E2 \sim E3\dots\sim En$).

DEF: PARTIÇÃO QUASI-UNIFORME DE DIMENSÃO **n.**
$Q\text{-}U\wp n = \{Ei\}$, $i= 1,\dots,n$ é uma partição de **U** onde nenhuma união com K acontecimentos arbritrários E_i, é mais provável que outra qualquer união formada por K+1 acontecimentos da mesma partição.

Assim, A e B dizem-se **quasi-equiprováveis** ($A \sim^* B$), se para todo o C,D tal que $C>\emptyset$, $D>\emptyset$ e $(A\cap C)=(B\cap D)=\emptyset$, então $(A \cup C) \succsim B$ e $(B \cup D) \succsim A$.

---

[39] Devido á possibilidade de existência de átomos nenhuma das condições de partição é necessária á representação. Na realidade alguns dos modelos que discutiremos definirão modos de partição que restringem as condições de representação a estruturas não atómicas.

DEF: PARTIÇÃO (DE SAVAGE) DE DIMENSÃO **n**.

$\wp n = \{E_i\}$, i= 1,...,n é uma partição de **U** onde qualquer elementos A,B da álgebra associada a **U**, se A>B então **U** pode ser particionado num finito número de acontecimentos $\{C_1,...C_n\}$ tal que $A > B \cup C_i$.

Directamente associado com a possibilidade de se definir uma partição de dimensão arbritrária do espaço **U** (por a limitar), está o conceito de **átomo**.

DEF: ÁTOMO (Villegas; 1964)

A é um átomo se **A** > ∅ e **A** > B > ∅ apenas quando B não está contido em **A** (Fishburn, 1986), ou dizendo de outro modo, para $B \subseteq A$ tem-se que : $B \sim \emptyset$ ou $B \sim A$.

Lemma: (2. de Niiniluoto, 1972)

Uma relação é **desprovida de átomos em U** sse todo o acontecimento $A \geq \emptyset$ em £ puder ser particionado em B e C tal que $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, $B > \emptyset$ $C > \emptyset$

Teorema: (ver demonstração do Lemma4. de Niiniluoto, 1972)

Uma **estrutura com um átomo** admite uma partição finita de **U** formada por um número fixo (*m*) (e não um número arbritrário como no caso de partição uniforme) de átomos equiprováveis; **U** é equivalente à união desses àtomos.

Pressupostos arquimedianos[40] são pressupostos que referem a propriedade arquimediana dos números reais, pelo que garantem que as representações são desprovidas de valores numéricos infinitésimais ou infinitamente grandes.

Um dos principais usos de axiomas arquimedianos é o de estabelecer numa estrutura qualitativa as condições homomorficas daquelas que se baseiam num contínuum (Luce & Narens, 1992).

Ao apresentar o modelo de Suppes e Zanotti, referimo-nos ao axioma SZ6 como um pressuposto arquimediano, que tem por base a noção de diferença standard : *archimedean in standard diferences*, (o que o distingue de outro tipo de pressuposto arquimediano - Luce & Narens, 1992).

O pressuposto arquimediano "para qualquer número positivo x, não importa quão pequeno, existe sempre um n inteiro tal que $xn \geq y$, seja qual for a grandeza de y " (Krantz,et al, 1971), é definido relativamente à noção de sucessão standard (pelo que designado de *archimedean in standard sequences*)(Luce e Narens, 1992).

---

40 Uma propriedade arquimediana é, numa perspectiva da teoria da medida) considerada condição necessária a um teorema de representação (Krantz et al. 1971). Como referimos esta consideração está pressuposta nos trabalhos já apresentados de Suppes e Zanotti, (1976).
"*It is evident that since the Archimedean property is true of the real numbers, it must also be true within the empirical relational system: it is a necessary axiom*"[p.25, Krantz et al. 1971]
" *The objection to it as a necessary axiom is that either it is trivially true in a finite structure or it is unclear what constitutes empirical evidence against it since it may not be possible to exhibit an infinite standard sequence.*" [p.26, Krantz et al. 1971].

DEF: SUCESSÃO STANDARD em A - Defina-se $\mathcal{E}$ uma álgebra de acontecimentos e $\sim$ uma relação de equivalência. Uma sucessão de acontecimentos A_1, A_2, ..., A_i, diz-se standard relativamente a A sse para qualquer valor de i existem B_i e C_i obedecendo a:

(i) $(A_1 = B_1)$ e $(B_1 \sim A)$;
(ii) $(B_i \cap C_i) = \emptyset$;
(iii) $(B_i \sim A_i)$;
(iv) $(C_i \sim A)$;
(v) $A_{i+1} = (B_i \cup C_i)$.

Intuitivamente uma sucessão standard em A é definida pela sequência, A_1 ; A_2 ;...; A_i , em que A_i corresponde, como que, a i cópias dijuntas de A, seguido por A_{i+1} que corresponde, como que, a i+1 cópias de A (Krantz,et al, 1971).

O acontecimento A é um acontecimento Standard.

Em termos de credibilidade ou probabilidade, temos que o acontecimento B é equiprovável a A e, o acontecimento adicionado a B para definir a sucessão, é também equiprovável a A.

A probabilidade associada a A, define como que uma *unidade de medida*, pelo que a sucessão tem tantos degraus quanto menor a probabilidade associada a este acontecimento standard.

Em estruturas positivas (como é o caso relativo às probabilidades) a propriedade arquimediana em sucessões standards evita representações infinitamente grandes (Luce e Narens, 1992). Note-se que ao definir em $\mathcal{E}$ uma medida de probabilidade, pela aditividade da estrutura quantitativa que esta define, temos que $P(A_i) = i\ P(A)$ (com $i=1,\ldots,n$). Se $P(A)>0$, i.e., se $A>\emptyset$, então, visto que $P(A)\leq 1$, temos que n não pode exceder $1/P(A)$. Desta forma para todo o $A>\emptyset$ parece surgir a necessidade de impôr um limite a sucessões standards de acontecimentos probabilisticos.

Prosseguindo no nosso estudo comparativo:

Analisemos primeiramente a forma como De Finetti (1937) define a axiomática necessária ao estabelecimento de um teorema de representação e os trabalhos desenvolvidos por Savage (1954) com o mesmo objectivo. Seguidamente faremos uma análise da proposta de Luce (1968) (correspondente à de Krantz et al. 1971) com o fim de a contrastar com a proposta de Savage. A proposta de Fine (1971) é igualmente comparada com estes dois autores.

Os trabalhos de Suppes (1974) e Faria (1991), integrados nesta análise como dois exemplos de modelos não-standards serão referidos detalhadamente no próximo sub-capítulo.

De Finetti (1937) estabelece as "condições de compatibilidade"[41] através de um axioma que tem por base a

---

[41] Wakker (1981) argumenta que de Finetti ao postular a partição uniforme, apenas estabelece condições de quasi-compatibilidade, pondo em causa as demonstrações de um teorema de representação. Como base de argumentação utiliza um contra-exemplo, que põe igualmente em causa os resultados aqui apresentados relativamente a: Fine e seu teorema de representação, Luce e demonstração de que toda a estrutura PCS é uma estrutura PQL. O contra-exemplo pondo em causa tantos resultados conhecidos e replicados de formas diferentes pede uma análise detalhada e cuidada, que não cabe no âmbito deste trabalho.

possibilidade de definição de uma partição uniforme:

D6: Qualquer que seja n, existe uma partição uniforme de dimensão- $U\mathcal{P}n$

A uma estrutura PQ onde se verifique o axioma D6 designaremos de estrutura PQF.

> "It can be shown that when we have events for which we know a subdivision into possible cases that we judge to de equally probable, the comparation between their probabilities can be reduced to the purely arithmétic comparation of the ratio between the number of favorable cases and the number of possible cases (not because the judgement has an objective value, but because everything substancial and thus subjective is already included in the judgement that the cases constituing the division are equally probable). This ratio can be chosen as the appropriate index to measure a probability and applied in general, even in cases other than those in which one can effectively employ tha criterion that governs us there. In these other cases we can evaluate this index by comparation (...) Thus, while starting out from a purely qualitative system of axioms, one arrives at a quantitative measure of probability." [de Finetti, 1937, p.101]

O tipo afirmação contida no axioma D6, apenas tem sentido relativamente a um espaço de resultados **U** infinito. Deste modo a estrutura PQF não contempla a possibilidade de existência de átomos ou outro tipo de estruturação finita do universo (Fishburn, 1986).

Savage na sua primeira proposta, enfraquece [42] a condição imposta à uniformidade da partição postulando-a

[42] Como se pode ler no capítulo I desta segunda parte, um pressuposto é tanto mais forte quanto mais retringir o universo de estruturas PQ que o englobam, pelo que passíveis de mensuração por uma medida de probabilidade aditiva. Desta forma se Modelo 1 => Modelo 2, o Modelo 1 é mais fraco que o Modelo2.

relativamente a uma partição quasi-uniforme. A justificação do autor para este acto está no ganho relativo a conteúdo empírico que lhe está associado. Ao assumir-se para qualquer *n*, uma partição uniforme pressupõe-se a possibilidade de se estabelecer a equiprobabilidade subjectiva de dois acontecimentos. Intuitivamente Savage pressupõe que tal ultrapassa a capacidade humana. O memso pressuposto sobre uma partição quasi-uniforme estabelece condições mais "verosímeis"[43].

Tal como a condição de partição uniforme para qualquer *n*, a partição quasi-uniforme apenas parece ter sentido em espaços infinitos, mas diferentemente da primeira apenas estabelece condições de quasi-compatibilidade com uma medida de probabilidade.

TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO (**Quasi-Compatibilidade**):
(ver demonstração em Savage-1954, p.34-35)

Numa estrutura PQ onde, para qualquer que seja o *n*, existe uma partição quasi-uniforme de dimensão *n*, existe uma medida de probabilidade P quasi-compatível com a relação qualitativa.

---

[43] Uma forte preocupação com o conteúdo empírico, é uma constante de Savage quando empreende a construção de modelos puramente normativos.

TEOREMA DE UNICIDADE: (**Quasi-Compatibilidade**)

(ver demonstração em Savage-1954)

A medida de probabilidade P quasi-compatível com a relação qualitativa é única e,

se $P(A)>0$ e $(0\leq\beta\leq1)$ então $P(B)=\beta P(A)$ para algum B incluído em A.

A demonstração, que Savage apresenta, dos teoremas de representação e unicidade tem por base a classe de todos os subconjuntos do espaço **U**, 2^U. A validade destes resultados não se extende a uma álgebra de Boole, visto mesmo para certos resultados de carácter finito, ter sido necessária a utilização de operações de carácter infinito (Fishburn, 1986; Faria, 1991) [44].

Para alcançar a compatibilidade Savage (1954) pressupõe um outro tipo de condições de partição, que definem o que designámos de Partição de Savage (condições bem mais fortes que as subjacentes a uma partição quasi-uniforme, como demonstraremos adiante), e define:

S6: Verificam-se as condições de Partição de Savage de dimensão n - $\mathcal{P}n$

As condições de Partição de Savage ficam garantidas pela relação definida na estrutura PQ, ser **fina** e **coesa**.

---

[44] *"Related results for almost agreament have been obtained by others when is merely assumed to be an algebra"* [p. 342, Fishuburn, 1986]

TEOREMA: (Teorema 4 de Savage, 1954).

Dada uma estrutura PQ a relação $\succeq$ é **fina** e **coesa** sse as condições de Partição (de Savage) de dimensão **n** forem garantidas.

DEF: FINA - (Savage, 1954) -
Uma relação $\succeq$ diz-se **fina** sse para todo o $A > \varnothing$ existir uma partição $\{C_i, \ldots, C_n\}$ de **U** tal que $A \succeq C_i$ $(i=1,\ldots,n)$

DEF: COESA - (Savage, 1954) -
A relação $\succeq$ diz-se **coesa** se sempre que
$A \sim^{*} B$ então $A \sim B$ [45].

A uma estrutura PQ que se adiciona o axioma de Partição de Savage em substituição do de uma Partição Quasi-Uniforme de dimensão n, para qualquer n, designamos de estrutura PQS.

TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO e UNICIDADE (Compatibilidade):

(ver demonstração em Savage - 1954)

Numa estrutura PQ, $\langle U, \pounds, \succeq \rangle$, onde $\pounds = 2^U$ e a relação $\succeq$ é fina e coesa existe uma medida de probabilidade única compatível com ela.

---

[45] Sempre que A estabelece uma relação de quasi-equiprobabilidade com B, estes dois acontecimentos são equiprováveis (ver apêndice).

A análise dos resultados de Savage, a sua generalização a outros domínios e o desenvolvimento de outros resultados associados às estruturas por ele propostas, tem sido levada a cabo por diferentes autores .

Embora seja o próprio Savage a estabelecer que as condições de quasi-compatibilidade (existência para qualquer n, de uma partição quasi-uniforme de dimensão n) coincidem com o facto da relação ser fina, **Niiniluoto (1972)** aponta algumas incorrecções na demonstração dessa implicação. Assim tanto este autor (teorema 4, p.1588) como **Wakker (1981,** Teorema 2. p.659) demonstram que *apenas uma relação fina que não contenha átomos* [46] *é que é quasi-uniforme*, no entanto provam (Lema 3. de Wakker, 1981 e teorema 4.de Niiniluoto, 1972) que o mero facto da *relação ser fina garante as condições de quasi-compatibilidade.*

Niiniluoto (1972) e Wakker (1981), não só validam resultados obtidos por Savage, como os alargam chegando a verificar *compatibilidade em estruturas não coesas mas que tenham apenas um àtomo* (onde **U** é equivalente á união de **n** átomos equivalentes) (Lema 5 de Niiniluoto, 1972 e teorema 3 de Wakker, 1981)[47].

[46] Lembramos aqui o Lema 4. de Niiniluoto (1972)
Seja $(U, \pounds, \geq)$ uma estrutura PQ fina. Então as seguintes condições são equivalentes:
(i) A estrutura não contêm átomos em U,
(ii) $\forall$ $B > \emptyset$ e $C > \emptyset$ em $\pounds$, existe $D \subseteq C$ tal que $\emptyset < D < B$
(iii) U não é equivalente úniã de *n* átomos equiprováveis

[47] Não seria injusto se se considerasse os trabalhos destes autores resultando numa porposta de um modelo de probabilidade qualitativa alternativo a Savage e aos outros autores, pelo que passível de ser analisado no quadro comparativo aqui proposto. A referência a estes resultados como meras qualificações e clarificações dos resultados de Savage é no entanto patente na literatura (Wakker, 1981; Fishburn, 1986; Faria, 1991), para tal não estão desprovidos de culpas os próprios autores que deixam implicita a sugestão de tal qualificação dos seus trabalhos.

Resultados idênticos foram obtidos por Faria (1991) por vias diferentes.

Assim temos:

TEOREMA: (Teorema 4.4.5 de Faria- 1991).

i) Para toda a estrutura PQ onde $\succeq$ é fina existe uma medida de probabilidade **quasi-compatível** com $\succeq$.

(ii) Sendo $\succeq$ fina, exite uma medida de probabilidade $\mathbf{P}$ **compatível** com $\succeq$ sse $\succeq$ for coesa ou se contiver um átomo.

TEOREMA: (Teo.2 de Niiniluoto,1981)
Uma partição coesa não admite átomos.

Os resultados de Niiniluoto (1972), Wakker (1981) e Faria (1991) demonstram serem as condição de Partição de Savage demasiado restritivas, podendo-se e devendo-se enfraquecer o sistema axiomático.

Outro problema que envolve os resultados de Savage è a sua falta de maliabilidade relativamente ao domínio finito. Os resultados de Niiniluoto (1972) e de Wakker (1981) ao estender as condições de compatibilidade a estruturas cuja relação é fina e contém um átomo são válidos relativamente a uma álgebra e abrem espaço ao domínio finito que se defina pela existência de um átomo.

Os trabalhos de Luce (1967), caracterizam-se pelas condições impostas pelo autor serem "*fulfilled in many infinite structures and in some finite ones, although not in most*" [p.207, Krants et al, 1971].

Relativamente à estrutura PQ, Luce (1967) propõe a adição de outros dois axiomas:

L6: A estrutura é arquimediana[48] no sentido em que: para $\forall A \in \pounds$ em que $A > \emptyset$ qualquer *sucessão standard* relativamente a A é finita.

L7: Se $(A \cap B) = \emptyset$, $A > C$ e $B \succeq D$, então existe um C', D' e $E \in \pounds$ tal que:

(i) $E \sim (A \cup B)$;

(ii) $(C' \cap D') = \emptyset$

(iii) $E \supset (C' \cup D')$

(iv) $(C' \sim C)$ e $(D' \sim D)$

A estrutura resultante, PQL, o autor designa de **"Regular System of Qualitativa Probability"** (Luce,1967).

---

[48] Este axioma é apresentado pelo autor como *necessário* à representação numérica probabilística (ver base de argumentação no ínicio deste subcapítulo).

Trata-se de uma condição pouco restritiva, fraca. Na realidade, quando todos os acontecimentos podem em si ser vistos como acontecimentos standards, parece que a condição arquimediana não adiciona nenhum conteúdo empirico (Adams, 1992).

TEOREMA: (Teorema 1 em Luce, 1967, ver demonstração no mesmo artigo).

Sendo $<U, £, \succeq>$ um **"Regular System of Qualitativa Probability** (PQL), exite uma única medida de probabilidade finitamente aditiva $\mathcal{P}$ sobre £ que preserva a ordem de $\succeq$, i.e., para todo o A,B $\in$ £:

(i) $(A \succeq B)$ sse $\mathcal{P}(A) \geq \mathcal{P}(B)$

(ii) $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$

(iii) $\mathcal{P}(\emptyset)=0$ e $\mathcal{P}(U)=1$

(iv) $(A \cap B)= \emptyset$ então $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$

A demonstração deste teorema de representação (com base na teoria de *extensive measurement*) é válida tanto para álgebras como para álgebras-σ (Fishburn, 1986). Conjuntamente com esta demosntração, Luce demonstra serem as suas condições mais fracas (menos restritivas) que as de Savage. Isto é, Luce demonstra (1967) que numa estrutura de Savage $<U, 2^U, \succeq>$, fina e coesa se verificam os seus axiomas, não sendo o contrário verdadeiro.

No entanto, em 1991, Faria[49] procura uma ligação entre estes dois trabalhos enunciando e demonstrando o seguinte teorema:

49 Faria é estimulado para a demonstração deste teorema pelo facto de tanto Luce (1967), como em replicação Fine (1971), apresentarem incongruências nas suas demonstrações. As incongruências situam-se em afirmações relativas à álgebra subjacente à demonstração: o autor " assume para o espaço de acontecimentos uma estrutura de álgebra e utiliza na demonstração as propriedades de uma algebra-σ" [p.61; Faria 1991].

TEOREMA: (4.4.9 de Faria, 1991)

Se <U,£,≽> é uma estrutura PQ que não admite átomos e onde são válidos L6 e L7, então ≽ é fina e coesa.

A demonstração deste teorema é o estabelecimento de (nas palavras do próprio autor) *"uma ligação importante entre as caracteristicas: PQ, L6,L7 e PQ com ≽ fina e coesa"*[p.63].

Tal resultado não pretende demonstrar a equivalência dos dois sistemas axiomáticos.

Luce aponta que: uma [**PCS => PQL**] não sendo o contrário verdadeiro.

Faria demonstra que uma [**PQL + Sem átomos**] => **PCS**.

Fine (1971), parte de uma condição estrutural mais fraca que a de Luce: a existência de uma partição $\{E_i\}$ quasi-uniforme para i= 1,...,n, em conjunção com a condição [50] de que a topologia de ordem associada a ≿ tem uma base numerável.

DEF: TOPOLOGIA DE ORDEM (em Fine, 1971 e Faria, 1991)

Seja U um conjunto totalmente ordenado pela relação > (anti-reflexiva). A **topologia de ordem** associada a >, tem uma sub-base constituída por todos os conjuntos da forma:

{x: (x>*a*) } ou {x: (*a*>x) } para um *a* qualquer de **U**.

[50] Fine (1971, 1973) define esta característica como condição *necessária* à existência de uma medida quantitativa de probabilidade não necessáriamente aditiva.

DEF: BASE DE TOPOLOGIA DE ORDEM

a) A **base** de uma topologia de ordem é definida por todas as intersecções entre elementos da sub-base.

b) Uma **base numerável** é uma base que seja definida por um número de elementos numerável.

TEOREMA: (corolário do teor.2 de Fine 1971, 5 de 1973)[51]

Para toda a estrutura PQ onde:

F6) (£,T) é uma topologia de ordem com base numerável e;

F7) Existe uma **partição quasi-uniforme** de U para qualquer *n*,

existe uma medida única de probabilidade aditiva compatível.

Designaremos por PQC a estrutura definida por Fine, isto é a estrutura que emerge da associação de F6 e F7 à estrutura PQ. F6 é um pressuposto arquimediano (ver p. 20 de Fine, 1973) com funções semelhantes ao pressuposto de Luce. A demonstração do teorema de representação de Fine contrariamente ao de Luce, tem lugar apenas num espaço não finito. Assim podemos ler em Fine:

> While C4, C5 [neste texto F6, F7], are implied by Savage's hypothesis that ≥ be fine and tight, and therefore, are at least as general, they in turn imply sufficient conditions for existence of additive, quantitative probability proposed by Luce. Futhermore, since Luce axioms hold in certain instances where £/~ is finite, the converse implication does not hold. [p.1185, Fine ,1971a].

[51] Fishburn (1986) cita os trabalhos de Roberts de 1973, que obtem resultado semelhante a Fine com base nas mesmas condições.

Sistematizando os resultados obtidos por cada autor relativamente à existência de uma medida compatível com os seus modelos temos que:

TABELA III: Espaços de acontecimentos e álgebras associadas à demonstração dos resultados.

	FINETTI	SAVAGE	LUCE	FINE	SCOTT	SUP-ZANOTTI
Espaço	Infinito	Infinito	Infinito Finito	Infinito	Finito	Infinito Finito
Algebra (dem. e extenção)	Algebra*	2^{U} Algebra-σ	Algebra Algebra-σ	Algebra-σ Algebra	Algebra	Alg.Ext.Func.

* Não explicitado claramente pelo autor (ver I Parte, Capítulo II).

Podemos agora completar a Tabela (II) comparativa dos diferentes modelos, extendendo a comparação aos axiomas estruturais apenas relativamente aos modelos anteriormente classicados como comparáveis.

TABELA IV: Comparação dos modelo axiomáticos ao nível dos axiomas necessários e estruturais.

	FINETTI (A)	SAVAGE (B)	LUCE (C)	FINE (D)
AXIOMAS NECESSARIOS--------				
N1) Completude	A	A	A	A
N2) Reflexiva	T1	T1	T1	T1
N3) Transitividade	A	A	A	A
N4) Aditividade	A	A	A	A
N5) Não-trivialidade	A	A	A	A
N6) Não-negatividade	T4	A	A	A
N7) Monotocidade	A	T5	T5	T5
AXIOMAS ESTRUTURAIS-----------				
E1) ∀ n. Partiç. Uniforme	A	$T_{(E1,B)}$	-	$T_{\cancel{(E1,D)}}$
E2) ∀ n. Partiç.Quasi-Unif.	$T_{(E2,A)}$	$T_{(E2,B)}$	-	A
E3) Partiç.Savage	-	A	$T_{(E3,C-)}$	-
E4) Part. de Luce	$T_{(E4,A)}$	$T_{(E4,B)}$	A	$T_{(E4,D)}$
*E5) Est. Arquimediana	$T_{(E5,A)}$	$T_{(E5,B)}$	A	$T_{(E5,D)}$
*E6) Top. c/ base numerável	$T_{(E6,A)}$	$T_{(E6,B)}$	-	A

Axiomas N1 - N7 encontram-se definidos e comparados anteriormente.
*- Numa perspectiva da teoria da medida este axioma é definido como necessário
A- Propriedade axiomatizada no modelo
T- Propriedade derivado do sistema de axiomas, pelo que resultado
T(i,j) - Teorema apresentado no contexto da axiomática j.
(-) - i não se verifica sob as condições do modelo j.
(C-) - Resultado sob o modelo C com a restrição deste não conter átomos.

Os resultados abaixo apresentados e demonstrados, relativos às propriedades estruturais incorporadas no modelo, são intrínsecos não só a cada modelo mas ao contexto onde este se define. Daí a notação T(i,j) onde **i** refere o axioma e **j** a axiomática no contexto da qual o teorema está a ser apresentado.

$T_{(E2,A)}$: Em toda a estrutura PQ onde se define uma partição Uniforme define-se uma partição Quasi-uniforme, não sendo a recíproca verdadeira.

Dem: Imediata por definição.

$T_{(E1,B)}$: Se relação definida em PQ é fina e coesa esta permite que para qualquer **n** se defina uma partição Quasi-Uniforme de dimensão n, não sendo a implicação recíproca verdadeira.

Dem: Pelo teorema2 de Niiniluoto (p.1585, 1972) temos que se a relação é coesa ela não contém àtomos.

Sendo fina e não contendo àtomos, pelo teorema 4.4.4 de Faria (p.53, 1991) e teorema2 de Wakker (p.659, 1981) temos que para qualquer n inteiro positivo existe uma partição Quasi-Uniforme de **U**.

O contrário não é verdadeiro, visto que nem toda a partição quasi-uniforme é fina.

$T_{(E2,B)}$: Se relação definida em PQ é fina e coesa esta permite que se defina para qualquer **n** uma partição Uniforme, não sendo a implicação recíproca verdadeira.

Dem: Coincide com a demonstração do Corolário 4.4.5.1. da página 53 de Faria (1991).

A recíproca não é verdadeira, visto que nem toda a partição uniforme é fina.

$T_{(E4\text{-}E5,B)}$: Se a relação definida numa estrutura PQ é fina e coesa então verificam-se igualmente as condições de Luce (L6 e L7), não sendo a recíproca verdadeira.

Dem: Coincide com a demonstração do teorema3 de Luce (p.785-786, 1967)[52].

$T_{(E3,C-)}$: Se $<U, \mathcal{E}, \succeq>$ é uma estrutura PQ que não admite átomos[53] e onde são válidos L6 e L7, então a relação $\succeq$ é fina e coesa.

Dem: Coincide com a demonstração do teorema4.4.9 de Faria (p.61-63, 1991)[54].

$T_{(E5,B)}$: Se a relação definida numa estrutura PQ é fina e coesa então verificam-se igualmente as condições de Fine (F6 e F7), não sendo a recíproca verdadeira.

Dem: Ver Fine (1971).

---

52 Faria (p.61, 1991) levanta alguns obstáculos a esta demonstração por utilizar passagens que recorrem a operações de caracter infinito.

53 Tal como já foi apontado na Tabela IV (ao referenciar C-) este teorema tem por contexto a axiomática de Luce restrita ás relações que não admitem átomos.

54 Faria (p.61, 1991) como referirmos anteriormente levanta alguns obstáculos a esta demonstração por utilizar passagens que recorrem a operações de caracter infinito.

$T_{(E4\text{-}E5,A)}$: Numa estrutura PQ onde se define para qualquer **n**, uma partição uniforme verificam-se as condições de Luce (L6 e L7), não sendo a recíproca verdadeira.

Dem: Pelos trabalhos de De Finetti (1931) temos que existe uma medida de probabilidade aditiva compatível com a relação definida pela estrutura PQ + Partição Uniforme.

Assim temos que: Se $U > A > \emptyset$ então $\infty > P(A) > 0$ e $A > \emptyset \Rightarrow \bar{A} < U$ e $P(\bar{A}) < \infty$, então $P(U) = P(A) + P(\bar{A}) < \infty$, pelo que a propriedade arquimediana é imediata (ver p. 50 de Fine, 1973).

Temos igualmente que se $A \sim B \Rightarrow P(A) = P(B)$ e que para qualquer $A \in U$ e qualquer número $\beta \in [0,1]$, existe um $B \subseteq A$ tal que $P(B) = \beta\, P(A)$. Suponha-se β e β' tais que $\beta P(A) = P(C)$ e $\beta' P(B) = P(D)$, então então existe um $C' \subseteq A$ e um $D' \subseteq B$ tais que $P(C') = \beta P(A) = P(C)$ e $P(D') = \beta' P(B) = P(D)$. Por tal temos que $C' \sim C$ e $D' \sim D$, pelo que se verifica a partição de Luce (ver p.786 de Luce, 1967).

A falsidade da relação inversa é demonstrada por se tomar como contra-exemplo qualquer espaço de U com 2 pontos.

$T_{(E6,A)}$: Numa estrutura PQ onde para qualquer **n** é válida a existência de uma partição Uniforme verificam-se as condições propostas por Fine (PQ + $\forall$n.Part. Quasi-Uniforme + Top. Ordem associada a £ tem uma base numerável), não sendo a recíproca verdadeira.

Dem: Pela prova do teorema1 de Fine (1971), verificamos que a existência de uma medida de probabilidade (não necessáriamente aditiva) compatível com $\succeq$ quando se pressupõe que (£, T) tem uma base numerável.

$T_{(E4\text{-}E5,D)}$: Numa estrutura PQ onde se verifiquem as condições de Fine, verificam-se igualmente as condições de Luce, não sendo o contrário verdadeiro.

Dem: Coincide com a demonstração do teorema6 de Fine (p. 26-27 e p. 50, Fine 1973).

3) MODELOS INCOMPLETOS E MEDIDAS INEXACTAS

A dificuldade de enunciação de um teorema de representação acentua-se quando se pretende uma maior aproximação da estrutura qualitativa de probabilidade com a realidade que se pretende representar. Daí muitos modelos neglegênciarem tal aproximação, dando primazia à passagem suave ao domínio quantitativo. Ora, a procura de uma passagem suave do qualitativo para o quantitativo é uma das principais fonte de erro, pois atribui ou extrai à realidade propriedades, criando um fosso entre essa realidade e o conceito que dela fizemos. Mesmo os modelos desenvolvidos numa perspectiva normativa, não podem deixar de se preocupar com as características do sistema empírico que pretendem representar. Tem, assim, de haver uma preocupação (maior ou menor) com o grau de consonância com a realidade empírica, experienciada pelo sujeito e que de alguma forma dá corpo à crença representada numa estrutura numérica. Nas palavras de De Finetti:

> "To me mathematics is an instrument which should conform itself strictly to the exigencies of the field in which it is to be applied" [p.2 de Finetti, 1937].

Daí, a preocupação de algumas abordagens normativas (não-*standards*) em procurar uma maior aproximação à natureza empírica do conceito de probabilidade: uma maior aproximação à realidade vivenciada pelo sujeito. O *preço a pagar* está no tipo de compatibilidade alcançado ou tipo de medida com a qual se estabelece a compatibilidade. Conforme a situação referir-nos-emos aos trabalhos desenvolvidos como de **modelos incompletos** ou como de **medida inexactas**.

A) A abordagem de Suppes - Probabilidade Superior e Probabilidade Inferior

Modelos de probabilidade superior e inferior[55] têm a sua origem nos trabalhos de Koopman (1940a) e segundo Fishburn (1986) (ver igualmente Supper, 1974 e Dempster, 1967) foram sucessivamente propostos por Smith em 1961, Good em 1962, Dempster em 1967 e em 1968, Suppes em 1974, Williams em 1976, Fine em 1979, Kumar em 1982, entre outros. A abordagem de Suppes para além de ter a vantagem, de fazer uso de uma axiomática idêntica à dos modelos aqui apresentados, é um protótipo deste tipo de abordagem.

A motivação básica subjacente à construção deste modelo, por parte de Suppes (1974), reside no considerar a *abordagem normativa standard* afastada dos *canons* de uma verdadeira abordagem normativa:

> My first major claim is that some of Savage's [56] axioms do not in an direct sense represent axioms of rationality that should be satisfied by any ideally rational person but rather, they represent structural assumptions about the environment that may ou may satisfied in given applications [p. 162, Suppes, 1974].

---

[55] Estes modelos são, segundo Fishburn (1986) comparáveis aos modelos que postulam $<\pounds,\geq>$ como uma semi-ordem ou ordem intervalar. $P^*(A) \geq P_*(A)$ temos que $\sigma(A) = P^*(A)-P_*(A)$, pelo que $(A>B) \Leftrightarrow P^*(A)>P_*(A)$ se traduz por: $(A>B) \Leftrightarrow P^*(A)>P^*(A)+\sigma(B)$,

$\sigma\geq 0$. Se σ for constante integra as semi-ordens caso contrário integra as ordens intervalares.

[56] O facto da crítica incidir directamente sobre Savage não faz justiça a este autor que, como vimos, manifesta acentuada preocupação em que os seus axiomas estruturais sejam reflexo da realidade vivenciada pelo sujeito.

Para Suppes (1974) não cabe no âmbito de uma abordagem normativa o adicionar de condições ou propriedades com o mero objectivo de alcançar um resultado que garanta a construção de um teorema de representação e de unicidade (isto é põe em causa o processo de estabelecimento das condições suficientes á representação numérica, por via de axiomas estruturais que não reflictam a realidade vivênciada pelo sujeito).

A sua proposta alternativa é a de, em vez de recorrer a uma sistema numérico que forçe uma definição numérica do sistema de credibilidade do sujeito em algo impreciso, alcançar uma representação numérica que seja ela própria imprecisa-inexacta. O modelo que desenvolve dentro desta perspectiva, tem por base uma estrutura definida por $<U, £, \$, *\succeq>$, onde £ é uma álgebra geral e **\$** uma sub-álgebra finita, cujos elementos são designados de **acontecimentos standards**. Os elementos de £ que não pertencem a **\$** são designados de **acontecimentos arbritrários**. As propriedades que definem esta *Finite Approximate Measurement Structure for Belief* (PQA- Probabilidade Qualitativa Aproximada) são:

S1: $*\succeq$ é uma relação de ordem fraca em £

S2: Aditividade: $(A \cup B) \cap C = \emptyset$, então $(A *\succeq B)$ sse $(A \cup C *\succeq B \cup C)$: $A, B, C \in$ £

S3: Não-negatividade: $A *\succeq \emptyset$

S4: Não-trivialidade: $U *> \emptyset$

S5: \$ é um suconjunto finito de £

S6: Se $S \neq \emptyset$ então $S > \emptyset$: $S \in$ \$

S7: Continuidade: Se $S *\succeq T$, $\exists' V \in$ \$: $S \sim (T \cup V)$: $S, T, V... \in$ \$

Em \$ são definidos **acontecimentos minimais:** acontecimentos cuja intersecção é vazia e cuja união de todos estes elementos resulta num subconjunto de **U** que serve de base à subálgebra **\$.** S é um acontecimento minimal se $A \neq \emptyset$ "*and it is not the case that there is a non-empty B en such that B is a proper subset of S.*"[p.168, Suppes, 1974]

(S,S') é considerado um **intervalo aberto minimal** de **\$** se S>S' e S'-S fôr equivalente a um elemento minimal de **\$.**

O espaço **U** não é necessáriamente finito, sendo **£** uma álgebra ou uma álgebra-σ. No entanto a sub-álgebra **\$** <u>é necessáriamente finita</u>.

A Compatibilidade no contexto de uma Medida de Probabilidade Superior e Probabilidade Inferior

---

DEF: MEDIDA DE PROBABILIDADE (ADITIVA) SUPERIOR E INFERIOR:
Uma Medida Inexacta de Probabilidade

Tendo:

U > $\emptyset$ (conjunto não vazio de acontecimentos)

£ é uma álgebra de **U**

P_* e P^* : **£** $\rightarrow$ $\mathbb{R}$

< U,£, P_* e P^*, ≥> é uma estrutura de probabilidade superior e inferior sse:

I. $P_*(A) \geq 0$

II. $P_*(U) = P^*(U) = 1$

III. Se $(A \cap B) = \emptyset$ então
$P_*(A) + P_*(B) \leq P_*(A \cup B) \leq P_*(A) + P^*(B) \leq$
$\leq P^*(A \cup B) \leq P^*(A) + P^*(B)$

Suppes procurou definir duas realidades distintas associadas à álgebra **£**: a realidade definida por **$** e a realidade definida pelo seu complementar.

Relativamente à sub-álgebra **$** estipulou uma estrutura **PQ** enriquecida de um axioma estrutural (axioma de Continuidade) que define <U,$,*≽> como uma estrutura arquimediana. Este axioma cria as condições favoráveis à construção de um teorema de representação por uma estrutura de probabilidade quantitativa aditiva, sob a advertência de que: *a subálgebra é isomorfica de uma álgebra finita, com os acontecimentos minimais definindo conjuntos singulares*[57] (Suppes, 1974).

A relação entre os acontecimentos não integrados na sub-álgebra é definida, apenas, por uma estrutura **PQ**. Pelo que as suas propriedades não são suficientes ao estabelecimento de uma representação numérica probabilística. Mas o suporte dado pela sub-estrutura **$**, permite associar-lhes uma medida inexacta de probabilidade, i.e., estabelecer os seus limites superior e inferior. Como Faria (1991) refere:

> os acontecimentos transitam entre uma zona iluminada onde se chamam acontecimentos standard e têm o direito a uma medida de probabilidade e uma zona cinzenta onde a sua credibilidade apenas fica descrita por probabilidades superior e inferior [p.44].

Assim, temos que Suppes,1974, estabelece:

---

[57] A consideração de acontecimentos minimais como atómicos deve-se a Suppes (1974). Faria (1991) em nota de pag.50 chama atenção para o facto de que embora acontecimentos atómicos(tal como definimos previamente) sejam minimais estas duas noções não coincidem.

TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO E UNICIDADE:
(Teorema 2, p.169 Suppes, 1974)

Defina-se em $<U,£,\$,{}^{*}\succeq>$ uma *estrutura finita de medida de credibilidade aproximada*. Então:

(i) Existe uma medida de probabilidade P em \$ para todo o acontecimento S e T,

$S \geq T$ sse $P(S) \geq P(T)$,

(ii) A medida P é única e atribui a mesma probabilidade positiva a cada acontecimento mínimo de \$,

(iii) Defina-se P^* e P_* do seguinte modo:

(a) $\forall$ A ϵ £ equivalente a um acontecimento standard S,

$P_*(A) = P^*(A) = P(S)$

(b) $\forall$ A ϵ £ não-equivalente a um aco>ntecimento standard S, mas que reside no intervalo mínimo (S,S′) de acontecimentos standards S e S′

$P_*(A) = P(S)$ e $P^*(A) = P(S')$

então P_* e P^* satisfaz as condições (I)-(III) de probabilidade superior e inferior em £, e

(c) se n é o numero de elementos mínimos em \$, então para $\forall$ A ϵ £

$P^*(A) - P_*(A) \leq 1/n$

(vi) Se definirmos para A e B ϵ £ que A *> B sse existir pelo menos um S ϵ **\$** tal que A > S > B, **então** *> é uma semi-ordem em £,

se A *> B **então** $P_*(A) \geq P^*(B)$, e

se $P_*(A) \geq P^*(B)$ **então** $A \geq B$

A demosntração deste teorema não é integralmente apresentada por Suppes (1974). Os pontos (i) e (ii) do seu teorema são reportados a uma publicação de 1969[58]. Podemos ler em Faria (1991) a partição do espaço **U** em acontecimentos minimais, pela demonstração de:

TEOREMA: (4.3.2 da pagina 43 de Faria 1991)

Numa estrutura finita de medida aproximada a classe de acontecimentos minimais constitui uma partição finita do espaço **U**.

Corolário: Cada acontecimento de **$** admite uma representação única em termos de uniões de elementos minimais distintos.

Assim, se existem n acontecimentos minimais então, temos que as probabilidades associadas aos 2^n acontecimentos são exactamente conhecidas, pois fornecidas por: m/n com $0 \leq m \leq n$. Pelo que, a função P(.) associada a **$** fica totalmente identificada.

As probabilidades inferior e superior dos restantes acontecimentos da álgebra **£**, são definidas em termos desses mesmos números.

As propriedades (I-III) pré-definidas como de probabilidade inferior e superior são verificadas de forma a se demosntrar (iii). Sendo $P_*(A)$ definida por P(S) e tendo que $P(S) \geq 0$ (I) é imediato. O mesmo acontece com (II). Relativamente a (III), caso A e/ou B seja equivalente a um acontecimento standard temos que a propriedade aditiva associada aos elementos de **$** torna esta propriedade imediata. Pelo que Suppes apenas nos oferece demonstração para o caso em que A e B são acontecimentos arbritrários.

[58] Curiosamente, no artigo de 1974, Suppes embora cite este seu trabalho não o apresenta nas referências bibliográficas. Encontra-se a sua referência em Suppes & Zanotti (1976):
Suppes, P. (1969) *Studies in the Methodology and Foundations of Science*, Reidel, Dordrecht.

Como Faria (1991) refere, as condições que visam o estabelecimento de compatibilidade, relativamente a **$** (a estrutura finita), impõe uma grande restrição à realidade passível de ser por ela representada (nomeadamente o facto de **$** ser uma estrutura de acontecimentos dijuntos equiprováveis).

A vantagem deste tipo de abordagem está, não só no considerar o conhecimento do sujeito passível de imperfeição, como também no fornecer a possibilidade da medida associada a esse conhecimento ser ela própria imperfeita/inexacta. Tal consideração não é, no entanto, levada até às suas últimas consequências, de forma a se postular, por exemplo, a não completude da relação de credibilidade.

Instituto Superior de Psicologia Aplicada
BIBLIOTECA

B) A abordagem de Faria - Por uma relação não completa

> "Acredito, e mais uma vez o digo, que a axiomática de uma estrutura de probabilidade comparativa (ou qualitativa, como se preferir chamar-lhe) qualquer que ela seja, deve seguir tão perto quanto possível os mecanismos da atitude do individuo face ao desconhecido, sem outras preocupações que não sejam a coerência, a consistência, e sendo possível, evitando um formalismo demasiado hermético que a afaste definitivamente das aplicações ligadas a disciplinas de utilização." (p.66, Faria , 1991).

É assim que, Faria (1990) procura tornar distintas a situação definida pela propriedade de **assimetria** (O3) e a situação em que a *"ausência de conhecimento"* nos leva a não relacionar dois acontecimentos, definidos previamente como constituintes da álgebra. Deste modo, como vimos, rejeita a propriedade de **dicotomia** (O1), que impõe que a relação seja completa, no sentido de todos os elementos se relacionarem entre si.

DEF: Uma **Estrutura de Probabilidade Comparativa de Faria** (que designaremos de PC(F)) é, axiomáticamente, definida pelas seguintes propriedades:

P1: $\succeq$ é uma relação de quasi-ordem (reflexiva e transitiva)

P2: $\supset \Rightarrow \succeq$

P3: $(A \cup B) \cap C = \emptyset \Rightarrow [(A \succeq B) = (A \cup C \succeq B \cup C)]$, $\forall A,B,C \in \mathcal{E}$

P4: Dado A e $\bar{A} \in \mathcal{E}$: $(A \succeq \bar{A}) \vee (\bar{A} \succeq A)$.

Uma estrutura PC(B) é uma estrutura PC(F) que não contempla o axioma (P4). O autor designa-a por **Estrutura de Probabilidade Básica.**

A Compatibilidade CrissCross: O caso incompleto

A estrutura de probabilidade comparativa de Faria [**PC(F)**] não incorporando em si os axiomas necessários ao estabelecimento de compatibilidade com uma medida de probabilidade aditiva, não permite que *com facilidade*, se construa o homologado teorema de representação. O mesmo acontece relativamente à procura de quasi-compatibilidade. A tentativa de estabelecer a (quasi)compatibilidade de $\succeq$ com uma medida de probabilidade aditiva, implicaria uma mudança não desejável na estrutura PC(F) (Faria, 1991): a que lhe retira a sua característica específica de não postular o axioma de completude.

---*

LEMA: (5.2.1.,p.67 de Faria,1991)

Dada uma estrutura PC(F), a existência de uma medida de probabilidade (quasi)compatível com $\succeq$, transforma a estrutura PC(F) numa estrutura PQ (que o autor designa de PCS, isto é, de Savage).

---*

Em causa estão as condições necessárias à (quasi) compatibilidade apontadas anteriormente; mais especificamente a afirmação de completude[59].

Faria (1991) não procura construir o sistema formal numérico passível de representar o sistema definido pela estrutura PC(F), visto não ter por objectivo a criação de uma "nova medida de probabilidade" (como o faz Suppes, 1974 ou, por exemplo Cox, 1955). O seu objectivo é sim, o de estudar uma forma de mensuração de PC(F) que não lhe adicione novas propriedades. A possibilidade de definição de subestruturas completas integradas na estrura PC(F) sugere a Faria, o estudo das condições de compatibilidade a esse nível, i.e., sugere-lhe a hipótese de mensuração de subestruturas. A identificação dessas subestruturas, e das consequências desta segmentação da representação numérica, para a estrutura global são o ponto fundamental do seu trabalho. A este tipo de compatibilidade o autor designou por **compatibilidade criss-cross**.

Faria demonstra que a **compatibilidade criss-cross** é um caso particular de quasi-compatibilidade, e identifica-a como o elo mais fraco da cadeia de processos quantitativos associados a uma estrutura PC(F).

---

[59] A conclusão de Faria é a de que é "*...perfeitamente plaúsivel o mecanismo de conhecimento, que consiste em completar a (incompleta) ordenação inicial do espaço de acontecimentos, com o recurso a um processo quantitativo, de onde o complementar da ordem inicial pode surgir, por vezes com recurso a intricados calculos numéricos, cujo resultado vem a esclarecer a lacuna* $A \ngeq B$ *ou* $B \ngeq A$"(p.68, Faria, 1991), e acrescenta: " *julgo mesmo que é assim que as coisas funcionam em grande numero de situaçöes.*" Não percebo, no entanto, como se pode admitir que o representante condicione a realidade representada, sem que se assuma, à priori, total compatibilidade entre as duas estruturas.

O processo de construção deste tipo de compatibilidade passa pela compreensão de que em toda a estrutura PC(F) pode-se construir pelo menos uma subestrutura PQ. Faria demonstra-o da seguinte forma:

Considere-se a estrutura PC(F) <U,£,≿>, e defina-se em £ a relação de equivalência ~ por:

$$A \sim B \iff (A \succsim B) \wedge (B \succsim A)$$

Pelo que cada classe de equivalência C_A (elementos do conjunto quociente resultante) é formada por acontecimentos equiprováveis.

Neste conjunto quociente £/~, fica definida uma relação de ordem parcial (ver teorema de Schroeder[60])

A este sistema emergente, o sistema <£/~, ≥> , Faria designa por **espectro** de uma estrutura PC(B) <U,£,≿>. A ordenação parcial que a caracteriza pressupõe a existência de um supremo e um infímo para qualquer elemento (classe de equivalência) desta estrutura.

TEOREMA: (2.2.5, pag.26 de Faria,1991)

Um conjunto parcialmente ordenado onde cada par de elementos admite um infímo e um supremo, é um reticulado distribuitivo no qual as operações $\wedge$ e $\vee$ são definidas respectivamente por $a \wedge b = \inf(a,b)$; $a \vee b = \sup(a,b)$.

[60] **Teorema de Schroeder:** Uma relação de quasiordem þ define uma relação de equivalência þo sse (A þ B) e (B þ A). Tomando as classes de equivalência C_A e C_B define-se no conjunto quociente, uma relação de ordem parcial: $(C_A \geq C_B)$ sse (A þ B).

DEF: Um **réticulado distribuitivo** é um sistema algébrico R(£, $\wedge$, $\vee$) onde as operações binárias $\wedge$, $\vee$ obedecem às propriedades:

$(a \wedge b) = (b \wedge a)$, $(a \vee b) = (b \vee a)$ (comutativa)
$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (associativa),
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$,
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (distributiva),
$(a \wedge b) \vee a = a$, $(a \vee b) \wedge a = a$.

Assim, no réticulado <£/~, ≥ > define-se a relação:
$(C_A \cap C_B)=$ min. $\{C_A, C_B\}$, pelo que se $C_A \geq C_B$ temos que é igual a C_B
e
$(C_A \cup C_B)=$ max. $\{C_A, C_B\}$ pelo que se $C_A \geq C_B$ temos que é igual a C_A

No caso de $C_A \geq C_B$ ou $C_B \geq C_A$ (as classes de equivalência não estarem relacionadas) Faria (1991) propõe:

$$(C_A \cap C_B)= \inf\ (C_A \text{ e } C_B), \text{ e}$$
$$(C_A \cup C_B)= \sup\ (C_A \text{ e } C_B)$$

Infímo e supremos têm aqui o significado inerente à ordenação induzida no conjunto quociente, pelo que se inscrevem nas cadeias maximais que os incorporam.

DEF: Um conjunto parcialmente ordenado que satisfaça a propriedade de "dicotomia" pelo que de "completude" designa-se por **cadeia.**

TEOREMA: Numa estrutura parcialmente ordenada é possível definirem-se subconjuntos de ordem completa, pelo que cadeias.

DEF: Por **cadeia maximal num conjunto parcialmente ordenado**, entende-se uma cadeia que não se pode prolongar (por inclusão) relativamente à ordenação definida nesse conjunto.

LEMA (de Kuratowsky): "Toda a cadeia num conjunto parcialmente ordenado está contida numa cadeia maximal".

Pelo que, o conjunto de supremos e infímos de uma classe de equivalência se inscrevem nas cadeias maximais que a englobam.

Assim, se:

a) Infímo $\{C_A , C_B\}) = \emptyset$, podemos dizer que no espaço inicial não existem acontecimentos "situados entre" $\emptyset$ e A, B, i.e., não existe nenhum acontecimento $C : A \succeq C, \quad B \succeq C, C \neq \emptyset$ e, se

b) Supremo $\{C_A , C_B\}) = U$, podemos dizer que no espaço inicial não existe acontecimentos "situados entre" U e A, B, i.e., não existe acontecimento $C : A \succeq C, \quad B \succeq C, C \neq U$.

Assim, para Faria (1991), uma cadeia maximal traduz, relativamente a qualquer acontecimento, que não $\emptyset$ e U, nela contida, a quantidade máxima de "informação comparativa" de que o indivíduo dispõe, quando o contexto é definido por essa mesma cadeia maximal.

O enriquecimento da relação de probabilidade comparativa/qualitativa (saber que $C_A \succeq C_B$) aumenta ou o número de cadeias maximais ou a extensão de uma ou mais cadeias préviamente existentes.

Faria (1991), tendo em consideração um isomorfismo entre o comportamento de uma sub-álgebra e uma álgebra, demonstra-nos igualmente que:

TEOREMA: (5.3.3., pag.76, de Faria, 1991)

Numa estrutura PC(F) existe pelo menos uma subálgebra de $\mathcal{E}$ contida numa cadeia maximal definida no espectro de $<U,\mathcal{E},\succeq>$.

Corolário: (5.3.3.1., pag.76, de Faria, 1991)

Seja <U,£,≿> uma estrutura PC(B) toda a estrutura <U,L,≿>, sendo **L** uma subálgebra de £, contida numa cadeia maximal, construída no espectro de <U,£,≿>, é uma estrutura PQ (PCS para o autor).

Pelo que ,

TEOREMA: (5.3.5., Pag.78, de Faria, 1991)

Uma estrutura PC é na realidade uma estrutura PQ sse existe uma e uma só cadeia maximal, associada ao respectivo espectro.

Em cada cadeia maximal definida em <£/~, ≥>, podemos identificar uma subálgebra **L** de £, que dão origem a uma estrutura PQ. Nas estruturas PQ estão definidas, como vimos anteriormente, as condições necessárias ao estabelecimento de uma medida de probabilidade aditiva. Consequentemente, as condições de compatibilidade criss-cross admitem que distintas medidas de ρ fiquem associadas a um mesmo espaço inicial.

Uitlizando as próprias palavras de Faria:

> "Dada uma estrutura PCF, <U,£,≿>, uma substrutura <U,L,≿>, associada a uma cadeia maximal definida em <£/~,≥> e uma medida de probabilidade 𝒫, definida em L, digo que existe compatibilidade crisscross entre <U,£,≿> e 𝒫, sempre que 𝒫 seja (quasi)compatível com ≿, no espaço <U,L,≿>" [p.81, 1991].

Desta forma Faria abre a possibilidade de tratamento quantitativo de uma estrutura incompleta, i.e., possibilita a quantificação a subálgebras de £ contidas em cadeias maximais, que se definem como "estruturas de probabilidade comparativa" (PQ). O avançar com um tipo de partição ou outras condições que sejam **suficientes** para a construção efectiva de um teorema de representação é um trabalho deixado em aberto pelo autor. Este apenas se limita a afirmar : "*as condições de (quasi)compatibilidade estabelecidas no capítulo 4* (aqui as do capítulo precedente a este), *terão neste contexto uma cabal aplicabilidade*" [p.81, 1991].

Resumindo :

Suppes (1974) e Faria (1991) desenvolvem o que designamos de **modelos não-standards** de probabilidade subjectiva.

O primeiro estabelece as condições **suficientes** à existência de uma **medida única inexacta** de probabilidade (pelo menos para parte dessa estrutura), para o caso **finito** e para o caso **infinito** (neste caso com a restrição imposta sobre o domínio de uma subestrutura que tem de ser finita).

Assim a "inovação" encontra-se na <u>definição de um diferente tipo de medida aditiva</u> que não se limita a fazer vénia à estrutura Kolmogoroviana.

O segundo, o modelo de Faria, admite a possibilidade de relação com a estrutura de probabilidade quantitativa pré-definida, mas é "inovador" na caracterização desse tipo de relação. Faria (1991) cria a possibilidade de se estabelecer um novo tipo de compatibilidade definida relativamente a subálgebras finitas da estrutura PCF, que resulta numa medida de probabilidade não necessariamente única. As condições suficientes à compatibilidade criss-cross são reportadas às estabelecidas por qualquer dos outros modelos.

Modelos não-standards são um tipo de abordagem normativa que procura uma visão mais real de um problema probabilístico, pelo que nos oferece o meio mais produtivo a uma abordagem prescritiva. Em vez de se "prescrever" o mascarar a instabilidade do nosso sistema de credibilidade, por recurso a princípios semelhantes ao Princípio da Razão Insuficiente, oferecem-nos um modelo que reflectindo essa mesma instabilidade nos permite avançar para o campo numérico.

Cabe aqui a abordagem prescritiva constructivista de Glenn Shafer (1991):

> "Do real people, when they have not deliberately constructed probabilities and utilities for a given problem, always have preferences that are sufficiently definite and detailed (...)?
> (...) If people do not have such preferences, then it is hard to see why constructing them (de acordo com os postulados de Savage) would necessarily be the best way for them to spend their time."
> (...) "Probabilities should be construted by examine evidence, not by examine one's attitude towards bets."

CONCLUSÃO

A análise comparativa de alguns dos modelos axiomáticos de probabilidade qualitativa levada acabo neste trabalho, centrou-se: no estudo da capacidade dos modelos servirem de suporte à construção de teoremas de representação e unicidade; na definição de condições como suficientes e/ou necessárias e suficientes a essas construções e; neste último caso, no estudo da qualidade dos axiomas estruturais dos diferentes modelos. Para tal, destacaram-se os domínios de aplicabilidade de cada modelo (finito/infinito) e distinguiram-se as estruturas algébricas que lhes serviram de suporte.

Os principais resultados deste estudo podem ser resumidos do seguinte modo:

- De Finetti (1937) e Savage (1954) apresentam, condições **suficientes** para a existência (**compatibilidade**) de uma medida de probabilidade aditiva **única** quando a álgebra de acontecimentos é **infinita.** Embora Savage tenha definido as condições de compatibilidade relativamente a 2^U, utilizando operações de carácter infinito, Wakker (1981) e Niiniluoto (1972), demonstram a possibilidade de generalização dos resultados de Savage a álgebras (não necessáriamente σ).

- Luce (1967) apresenta um sistema axiomático que é condição **suficiente** para a existência (**compatibilidade**) de uma medida **única** de probabilidade aditiva em espaços de acontecimentos tanto **finitos** como **infinitos.**

- Fine (1971, 1973) define condições **suficientes** para a existência de uma medida **única** de probabilidade aditiva, quando o espaço de acontecimentos é **infinito.**

- Kraft et al. (1959) e Scott (1964) apresentam, condições **necessárias e suficientes** para a existência (**compatibilidade**) de uma medida não necessariamente única quando a álgebra de acontecimentos é **finita.**

- Suppes e Zanotti (1976) apresentam, condições **necessárias e suficientes** para a existência (**compatibilidade**) de uma medida **única** quando o espaço de acontecimentos é **finito ou infinito**, via a extensão da relação $\succeq$ a uma álgebra de funções de £ (a uma *extended functions álgebra*) designada de £*.

- Suppes (1974) e Faria (1991) desenvolvem o que designámos de **modelos não-standards** de probabilidade subjectiva. O primeiro estabelece as condições **suficientes** à existência de uma **medida única inexacta** de probabilidade (pelo menos para parte dessa estrutura). O segundo, o modelo de Faria, é construído com base na negação da completude como axioma necessário, e procura o "caminho" que visa a sua representação numérica (via uma estrutura da probabilidade quantitativa aditiva pré-estabelecida). Deste modo define um novo tipo de compatibilidade, a criss-cross. Identificando uma estrutura PQ em subàlgebras de £, que se inscrevem em cadeias maximais, possibilita a mensuração por recurso a axiomas estruturais mais ou menos restritivos.

De todos os sistemas axiomáticos suficientes o de **Luce** parece ser o **mais fraco** (Krantz et al. 1971). Como Fine (1973) refere o sistema axiomático de Luce "*seems to be the best published characterization of the subset of CP* [no texto PQ] *relations compatible with finite additivity*".

Instituto Superior de Psicologia Aplicada
BIBLIOTECA

APÊNDICE

Símbolos, notações e definições mais utilizadas, com significado específico:

$\sim$ Símbolo de negação da proposição a que se associa.

U Universo onde estão contidos os acontecimentos.

£ Espaço de acontecimentos com a estrutura de uma álgebra de Boole de subconjuntos de **U** ou uma álgebra-σ.

$\succeq$ Relação binária "*pelo menos tão provável/credível como*", definida num espaço de acontecimentos.

$\sim$ Relação de equiprobabilidade

$\sim^*$ Relação de quasi-equiprobabilidade definida por: $(A \sim^* B)$ se para todo o C,D tal que $C \succ \emptyset$, $D \succ \emptyset$ $(A \cap C) = (B \cap D) = \emptyset$, então $(A \cup C) \succeq B$ e $(B \cup D) \succeq A$.

$\langle U, £, \succeq \rangle$ Estrutura de probabilidade comparativa/qualitativa .

$\langle U, £, \mathcal{P}, \geq \rangle$ é uma estrutura relacional numérica com características de espaço de probabilidade ,i.e, onde se verificam: K1): $P(A) \geq 0$
K2): $P(U) = 1$
K3): $P(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Modelo de Scott - Estrutura de probabilidade que obedece aos seguintes axiomas:

Completude: $(A \succeq B)$ ou $(B \succeq A)$

Não-negatividade: $(A \succeq \emptyset)$, $\forall A \in \pounds$

Não trivialidade: $(U \succ \emptyset)$

Cancelação: Para todo o subconjunto $A_o \ldots A_n$, $B_o \ldots B_n$ de **U**,

se $A_i > B_i \;\; : \; 0 \leq i < n$ então

se $\sum I_{A_i}(x) = \sum I_{B_i}(x) \;\; :. \;\; B_n \geq A_n$

Modelo de Suppes e Zanotti - Estrutura de probabilidade que obedece aos seguintes axiomas:

Completude: $(A \succeq B)$ ou $(B \succeq A)$

Transitividade: $(A \succeq B) \wedge (B \succeq C) \Rightarrow (A \succeq C)$

Aditividade: Se $[(A \cap C = \emptyset) \wedge (B \cap C = \emptyset)]$

então $(A \succeq B) \Leftrightarrow [(A \cup C) \succeq (B \cup C)]$

Não-negatividade: $(A \succeq \emptyset)$, $\forall A \in \pounds$

Não trivialidade: $(U \succ \emptyset)$

Continuidade: Se $A^* > B^*$ então para todo o C^* e D^* em $\pounds^*$, existe um inteiro n tal que $nA^* + C^* \geq nB^* + D^*$.

PQ - Estrutura de probabilidade que obedece aos seguintes axiomas:

Completude: $(A \succeq B)$ ou $(B \succeq A)$, $\forall A,B \in \pounds$

Transitividade: $(A \succeq B) \wedge (B \succeq C) \Rightarrow (A \succeq C)$, $\forall A,B,C \in \pounds$

Aditividade: Se $[(A \cap C = \emptyset) \wedge (B \cap C = \emptyset)]$

então $(A \succeq B) \Leftrightarrow [(A \cup C) \succeq (B \cup C)]$, $\forall A,B,C \in \pounds$

Não-negatividade: $(A \succeq \emptyset)$, $\forall A \in \pounds$

Não trivialidade: $(U \succ \emptyset)$

PQF - (De Finetti) Estrutura de probabilidade PQ que obedece ao seguinte axioma:

D6: Qualquer que seja n, existe uma partição uniforme de dimensão- $U\wp n$

PQS - (Savage) Estrutura de probabilidade PQ que obedece ao seguinte axioma:

S6: Qualquer que seja n, existe uma Partição Savage de dimensão- $\wp n$

PQL - (Luce) Estrutura de probabilidade PQ que obedece aos seguintes axiomas:

L6: A estrutura é arquimediana: para ∀A ∈ £ em que A>∅ qualquer ***sucessão standard*** relativamente a A é finita.

L7: Se (A∩B)= ∅, A>C e B≽D, então existe um C′, D′ e E ∈ £,tal que: (i) E ~ (A∪B); (ii) (C′∩ D′)= ∅; (iii) E ⊒ (C′∪ D′); (iv) (C′~ C) e (D′~ D)

PQC - (Fine) Estrutura de probabilidade PQ que obedece aos seguintes axiomas:

F6) **(£,T)** é uma **topologia** de ordem **com base numerável e;**

F7) Existe uma **partição quasi-uniforme** de U para qualquer *n*

PQA - (Suppes) Estrutura de probabilidade PQ que obedece aos seguintes axiomas:

S1: *≽ é uma relação de ordem fraca em £

S2: Aditividade: (A ∪ B) ∩ C = ∅, então (A *≽ B) sse (A ∪ C *≽ B ∪ C): A,B,C ∈ £

S3: Não-negatividade: A *≽ ∅

S4: Não-trivialidade: U *> ∅

S5: $ é um suconjunto finito de £

S6: Se S ≁ ∅ então S > ∅ : S ∈ $

S7: Continuidade: Se S *≽ T , ∃′ V ∈ $: S ~ (T ∪ V):S,T,V... ∈ $

PC(F): (Faria) Estrutura de probabilidade Comparativa que obedece aos seguintes axiomas:

P1: ≽ é uma relação de quasi-ordem

P2: ⊒ => ≽

P3: (A ∪ B)∩C=∅ => [(A ≽ B)= (A ∪ C ≽ B ∪ C)], ∀ A,B,C ∈ £

P4: (A ∧ Ã) ∈ £: (A ≽ Ã) ∨ (Ã ≽ A).

ÁLGEBRA: Uma classe de conjuntos é uma álgebra sse for fechado simultaneamente com respeito à complementação e com respeito à união binária

Pelo que, £ é uma álgebra em **U** sse para todo o A, B,C pertencente a £:

- Ã ∈ £ (fechado em relação ao complementar)
- (A ∪ B) ∈ £ (fechado em relação à união binária),

Sendo uma álgebra, £ também é fechado com respeito à diferença e á interseção binária, e (∅ ∧ **U**) ∈ £

ÁLGEBRA-σ: Uma álgebra fechada relativamente único numerável é uma álgebra--σ. Isto é uma álgebra que se define pela propriedade:

$$\forall A_i \in \pounds \quad , \; i=1,2,\ldots \quad \cup A_i \in \pounds$$

Uma álgebra-σ tal como uma álgebra finita, é fechada com respeito à diferença e à interseção numerável.

PARTIÇÃO UNIFORME DE DIMENSÃO **n** - $U\wp n = \{Ei\}$, i= 1,...,n é uma partição de **U** formada por n ($n \geq 2$) acontecimentos equiprováveis ($E1 \sim E2 \sim E3 \ldots \sim En$).

PARTIÇÃO QUASI-UNIFORME DE DIMENSÃO **n** - $Q\text{-}U\wp n = \{Ei\}$, i= 1,...,n é uma partição de U onde nenhuma união com K acontecimentos arbritrários E_i é mais provável que outra qualquer união formada por K+1 acontecimentos da mesma partição. Assim, A e B dizem-se quasi-equiprováveis ($A \sim^* B$), se para todo o C,D tal que $C>\emptyset$, $D>\emptyset$ $(A\cap C) = (B\cap D) = \emptyset$, então $(A\cup C) \succeq B$ e $(B\cup D) \succeq A$.

PARTIÇÃO (DE SAVAGE) DE DIMENSÃO **n** - $\wp n = \{E_i\}$, i= 1,...,n é uma partição de U onde qualquer elementos A, B da álgebra associada a U, se A>B então U pode ser particionado num finito número de acontecimentos $\{C_1,\ldots C_n\}$ tal que $A > B\cup C_i$.

COMPATIBILIDADE: Uma medida P em £ diz-se **compatível** com $\succeq$ se (Fishburn, 1986): $A \succeq B \iff P(A) \geq P(B)$

QUASI-COMPATIBILIDADE: Uma medida P em £ diz-se **quasi-compatível** com $\succeq$ se (Fishburn, 1986): $A \succeq B \Rightarrow P(A) \geq P(B)$

ÁTOMO (Villegas; 1964): **A** é um átomo se **A**>$\varnothing$ e **A**>B>$\varnothing$ apenas quando B não está contido em **A** ou dizendo de outro modo, para B $\subseteq$ **A** tem-se que : B $\sim$ $\varnothing$ ou B $\sim$ **A**.

UMA ESTRUTURA COM UM ÁTOMO (Ver demonstração de Lemma 4. de Niiniluoto, 1972) admite uma partição finita de U formada por um número fixo (*m*) (e não um número arbritrário como no caso de partição uniforme) de átomos equiprováveis; U é equivalente à união desses àtomos.

UMA ESTRUTURA É DESPROVIDA DE ÁTOMOS (Lemma 2. de Niiniluoto, 1972) em **U** sse para todo o A $\geq \varnothing$ em £ puder ser particionada em B e C tal que A = B $\cup$ C, B $\cap$ C = $\varnothing$, B > $\varnothing$ e C > $\varnothing$.

SUCESSÃO STANDARD EM A - Defina-se £ uma álgebra de acontecimentos e ~ uma relação de equivalência. Uma sucessão de acontecimentos A_1, A_2, ..., A_i, diz-se standard relativamente a A sse para qualquer valor de i existem B_i e C_i obedecendo a: (i) (A_1 = B_1) e (B_1 ~ A); (ii) ($B_i \cap C_i$)=$\varnothing$; (iii) (B_i ~ A_i); (iv) (B_i ~ A); (v) A_{i+1} = ($B_i \cup C_i$). Pelo que A_i corresponde a i cópias dijuntas de A.

RELAÇÃO FINA: (Savage, 1954) Uma relação $\succeq$ diz-se **fina** sse para todo o A > $\varnothing$, existir uma partição {C_i,...,C_n} de **U** tal que A $\succeq$ C_i : (i=1,...,n)

RELAÇÃO COESA: (Savage, 1954) Uma relação $\succeq$ diz-se **coesa** se sempre que A $\sim^*$ B então A $\sim$ B.

REFERÊNCIAS

Adams, E. W. (1992) On the Empirical Status of Measurement Axioms: The case of subjective Probability. In C. Wade Savage and Philip Ehrlich (Eds.) *Philosofical and Foundational issues in Measurement Theory* (pp.53-74). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bar-Hillel, M. (1973) On the subjective probability of compound events. *Organizational Behavior and Human Performance*, **9**, 396-406.

Barnett, V. (1982) *Comparative Statistical Inference* (Second Edition). Chichester: John Wiley & Sons.

Bell, D. E., Raiffa, H., & Tversky, A. (1991) Descriptive, normative and prescriptive interactions in Decision Making. In David E.Bell, Howard Raiffa and Amos Tversky (Eds), *Decision Making: Descriptive, normative and prescriptive interactions* (3ª Edição) (pp.1- 9). Cambridge: Cambridge University Press.

Berger, J. O. (1986) Comment.*Statistical Science*. **1**, 351-352.

Blanché, R. (1978) *A Axiomática*. Lisboa: Editorial Presença.

Corielli, F. (1990) *On the notion of event in De Finetti's theory of probability*.Studi statistici, **30**. Universita Bocconi, Milano.

De Finetti, B. (1937) Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources. Reproduzido em 1964 em, H.E. Kyburg, Jr. and H.E.Smokler (Ed.) *Studies in Subjective Probability*, New York: Wiley.

De Finetti, B. (1975) *Theory of Probability*. New York: Wiley.

De Finetti, B. (1978) Probability: interpretations (II) *International Encyclopedia of Statistics*, 744-754. New York: Free Press.

DeGroot, M. H. (1986) A conversation with David Blackwell, *Statistical Science*, **1**, nº1, 40-53.

Dempster, A. P. (1967) Upper and Lower Probabilities induced by a multivalued mapping, *Ann. Math. Statist.*, **38**, 325-339

Edwards, W. (1968) Conservation in human information processing. In Benjamin Kleinmutz (Ed.) *Formal representation of human thought*, New York

Faria, J. P. (1991) *Compatibilidade Crisscross em Estruturas de Probabilidade Comparativa* (Dissertação para o grau de Doutor em Ciências). Lisboa: Faculdade de Ciênicas da Universidade de Lisboa.

Faria, J. P. & Garcia-Marques, T. (no prelo), "Modelar" a probabilidade:Uma análise comparativa. *Actas do I Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*.

Fine, T. (1971). A note on the existence of quantitative probability. *Ann. Math. Statist.*, **42**, nº4, 1182-1186.

Fine, T. (1973) *Theories of probability*. London: Academic Press.

Fishburn, P. C. (1969) Weak qualitative probability on finite sets. *Ann. Math. Statist.* **40**,nº6, 2118-2126

Fishburn, P. C. (1975) Weak comparative probability on infinite sets. *Ann.Prob.* **3**, nº 5, 889-893.

Fishburn, P. C. (1986) The axioms of Subjective Porbability. *Statistical Science*, **1**, 335-358.

Grize, J-B. (1967) História. Lógica das classes e das proposições. Lógica dos predicados. Lógicas modais. In Jean Piaget (Ed.), *Lógica e Conhecimento Científico*, 117-245. (Edição portuguesa 1980: Civilização-Editora).

Grize, J-B. (1969) *Lógica Moderna:* 1-3 Fascículos. (Edição portuguesa 1984:Civilização-Editora).

Good, I. J., (1959) Kinds of Probability, *Science*, **129**, nº 3347, 443-447.

Good, I. J.,(1988) The interface between statistics and Philosophy of Science, *Statistical Science*, **3**, nº 4, 386-412.

Jaynes, E. T. (1983) *Papers on Probability Statistics and Statistical Physis*. D. Reidel Publ. Comp.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1973) On the psychology of prediction. *Psychological Review*, **80**, 251-273.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1979) Prospect theory: an analysis of decision under risk. *Econometrica*, **47**, 263-191.

Keynes, J. M. (1921) *A Treatise on Probability*, London: Macmillan.

Koopman, B. O. (1940a) The axioms and algebra of intuitive probability. *Ann. Math.* **41**, nº2, 269-292.

Koopman, B. O. (1940b) The bases of probability. Reproduzido em 1964 em, H.E. Kyburg, Jr. and H.E.Smokler (Ed.) *Studies in Subjective Probability*, New York: Wiley.

Kraft, C. H., Pratt, J. W. & Seidenberg, A. (1959) Intuitive probability on finite sets. *Ann. Math. Statist.*, **30**, 408-419.

Krantz, D. H., Luce, R. D., Suppes, P., & Tversky, A. (1971) *Foundations of Measurement* 1. (Cap. 1 e 5) New York. Academic Press.

Kyburg, H. E. & Smokler, A. W. (1964) Introduction. In H.E. Kyburg Jr.and A.W.Smokler (Eds) *Studies in Subjective Probability*. New York: Wiley.

Luce, R. D. (1956) Semi-orders and a theory of utility discrimination. *Econometrica*, **24**, 178-191.

Luce, R. D. (1967). Sufficient conditions for the existence of a finitely additive probability measure. *Ann. Math. Statist.*, **38**, 780-786.

Luce, R. D. (1968) On the numerical represetation of qualitative conditional probability. *Ann Math. Statist.*, **39**, 481-491.

Luce, R. D. & Narens, L. (1992) Intrinsic Archimedeanness and the Continuum. In C. Wade Savage and Philip Ehrlich (Eds.) *Philosofical and Foundational issues in Measurement Theory* (pp.15- 38). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Maistrov, L. E. (1974), *Probability Theory. A historical sketch*. London: Academic Press

McGuire, W. J. (1983) The yin and yang of progress in social psychology: Seven koas. *Journal of Personality and Social Psychology*, **26**, 446-456.

Murteira B. J. F. (1990) *Probabilidades e Estatistica* (Vol.I) Lisboa: McGraw-Hill.

Niiniluoto, I. (1972) A note on fine and tight qualitative probabilities.*Ann. Math. Statist*, **43**,nº5, 1581-1591.

Peterson, C. R. & Beach, L. R. (1967) Man as an intuitive statistician. *Psychological Bulletin*, **68**(1), 29-56.

Ramsey, P. M. (1926) Truth and probability. Reproduzido em 1964 em, H.E. Kyburg, Jr. and H.E.Smokler (Ed.) *Studies in Subjective Probability*, New York: Wiley.

Savage, L. J. (1954) *The foundations of Statistics*. New York: Wiley.(2ª Edição: 1972 por Dover)

Savage, L. J. (1961) The Foundations of Statistics Reconsidered. Reproduzido em 1964 em, H.E. Kyburg, Jr. and H.E.Smokler (Ed.) *Studies in Subjective Probability*, New York: Wiley.

Savage, L. J. (1967) Difficulties in the theory of Personal probability. In A panel discussion of personal Probability. *Philosophy of Science*, **Dec.**, 305-310

Scott, D. (1964); Measurement structures and linear inequalities. *Journal of Mathematical Psychology*, **1**, 233-247.

Shafer, G. (1991) Savage reviseted. In David E.Bell, Howard Raiffa and Amos Tversky (Eds), *Decision Making: Descriptive, normative and prescriptive interactions* (3ª Edição) (pp.193-236). Cambridge: Cambridge University Press.

Slovic, P. & Lichtenstein, S. (1971) Comparation of baysean and regression approaches to the study of information processing in judgement. *Organ. Behav. Hum. Perform.* **6**, 649-744.

Suppes, P. (1974) The measuremnt of Belief. *Journal of Royal Statistics Society*, Série B, **36**, 160-175.

Suppes, P. & Zanotti, M. (1976) Necessary and Sufficient conditions for existence of a unique measure strictly agreeing with a qualitative probability ordering, *Journal of Philosophical Logic*, **5**, 431-438.

Tversky, A. (1969) Intransitivity of preferences. *Psychological Review.*, **76**, 31-48

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974) Judgement under uncertainty: heuristics and biases. *Science*, **185**, 1124-1131.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1981) The framing of decisions and the psychology of choice. *Science*, **211**, 453-458.

Villegas, C. (1964) On qualitative probability σ-algebras. *Ann. Math. Statist.* **35**, 1787-1796.

Wakker, P. (1981) Agreeing probability measures for comparative structures. *Ann. of Statist.* **9**, nº 3, 658-662.

Instituto Superior de Psicologia Aplicada
BIBLIOTECA