

Instituto Superior de Psicologia Aplicada



INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL: ANÁLISE DE
MANUAIS DO 5º ANO DE ESCOLARIDADE

Sílvia Cristina M. M. L. Lopes

nº 7643

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de

Mestre em Psicologia Aplicada
Especialidade em Psicologia Educacional

2010

Dissertação de Mestrado realizada sob a orientação de Professora Doutora Glória Ramalho, apresentada no Instituto Superior de Psicologia Aplicada para obtenção de grau de Mestre na especialidade de Psicologia Educacional conforme o despacho da DGES, nº 19673/2006 publicado em Diário da Republica 2ª série de 26 de Setembro, 2006.

RESUMO

Este estudo tem por objectivo proceder a uma avaliação da abordagem inicial ao conceito de número racional em três manuais de Matemática do 5º ano. Reconhecemos a importância e complexidade do conceito, e sobretudo, a importância que os manuais têm assumido no processo de ensino-aprendizagem. Num primeiro momento, a análise dos três manuais é feita através da aplicação da Grelha de avaliação utilizada no *Project 2061*, apoiado pela *American Association for the Advancement of Science*. Esta análise assenta na verificação de seis critérios de avaliação: Identificação de um objectivo, Construção de conhecimento a partir das ideias matemáticas dos alunos, Mobilização dos alunos para a Matemática, Desenvolvimento de ideias matemáticas, Promoção do pensamento da Matemática e Avaliação do progresso dos alunos. Num segundo momento, propomo-nos olhar para a forma como os manuais abordam os conceitos de unidade e partição bem como de equivalência e ordenação.

A aplicação da Grelha de Análise permite-nos identificar vários aspectos que deverão ser melhorados nos manuais. A análise da abordagem aos diferentes conceitos de unidade e partição bem como de equivalência e ordenação revela a pouca variedade de experiências significativas que são propostas aos alunos.

Palavra-chave: Número Racional, Manuais, *Project 2061*

ABSTRACT

The aim of this study is to evaluate the initial approach to the concept of rational number in three 5th grade Mathematics manuals. We recognise the importance and complexity of the concept and above all the key role that manuals have acquired in the teaching-learning process. In a first instance, we will analyse the three manuals following the procedures of the Evaluation Grid used in *Project 2061* which is supported by the *American Association for the Advancement of Science*. This analysis lies on confirmation of six evaluation criteria: Identifying a Sense of Purpose, Building on Student Ideas about Mathematics, Engaging Students in Mathematics, Developing Mathematical Ideas, Promoting Student Thinking about Mathematics and Assessing Student Progress in Mathematics. In a second instance, we will look at how the manuals tackle the concepts of unit and partitioning as well as equivalence and ordering.

The implementation of the Evaluation Grid allows us to identify the aspects that need to be improved in the manuals. The analysis of the approach to the different concepts of unit and partitioning as well as equivalence and ordering reveals the small range of significant experiences that are offered to the students.

Keyword: Racional Number, Manuals, *Project 2061*

ÍNDICE

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II – ENQUADRAMENTO TEÓRICO.....	4
2.1. Conceito de fracção	5
2.1.1. O subconstruto parte-todo	6
2.1.2 O subconstruto medida	7
2.1.3 O subconstruto quociente	8
2.1.4. O subconstruto operador	8
2.1.5 O subconstruto razão	8
2.2. Elementos Unificadores	9
2.2.1. O pensamento multiplicativo	10
2.2.2. A noção de quantidade	11
2.2.3. O conceito de unidade	13
2.2.4. Partição	17
2.2.5. O conceito de equivalência e ordem	
▪ <i>O conceito de equivalência</i>	19
▪ <i>O conceito de ordem</i>	22
2.3. Algumas pistas para compreender as dificuldades	24
CAPÍTULO III – MÉTODO.....	27
3.1. Amostra	27
3.2. Instrumentos	28
3.2.1. Grelha de Análise dos Manuais utilizada no <i>Project 2061</i>	28
3.2.1.1. Análise do conteúdo dos manuais	29
3.2.1.2. Critérios de Ensino	31

3.2.2. Análise da abordagem aos conceitos de unidade e partição assim como o conceito de equivalência e ordem	33
3.2.2.1. Unidade e partição	34
3.2.2.1. Equivalência e Ordem	36
CAPÍTULO QUARTO – APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS.....	38
4.1. Grelha de Análise	38
4.1.1. Análise do conteúdo dos manuais	39
4.1.1.1. Análise de conteúdo dos manuais relativo ao conceito	39
4.1.1.2. Análise de conteúdo relativo às competências	43
4.1.2. Critérios de Ensino	43
4.2 - Análise da abordagem aos conceitos	50
4.2.1. Manual nº 1	50
4.2.2. Manual nº 2	55
4.2.3 Manual nº 3	60
CAPÍTULO QUINTO – DISCUSSÃO.....	66
5.1. Principais Conclusões	66
5.2. Limitações e Considerações para Futuras Investigações	75
5.3. Contributos do Estudo e Comentários Finais	76
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	78
ANEXOS	

LISTA DE TABELAS

TABELA 1: Resultados da análise de conteúdo relativos ao conceito de número racional e às competências com número racional nos três manuais.....	39
TABELA 2: Resultados da análise referente aos critérios de ensino nos três manuais.....	44
TABELA 3: Média das pontuações em cada critério	45

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Diferentes métodos pictoriais da representação de fracção usando “regiões”....	16
FIGURA 2: Gráfico com o número de itens e a sua respectiva pontuação obtidos na análise dos manuais	45

LISTA DE ANEXOS

ANEXO A: Critérios de Análise de Manuais – <i>Project 2061</i>	
--	--

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

O conceito de número racional é um conceito amplo, complexo e multifacetado (Behr, Lest, Post e Silver, 1983), constituído por múltiplas (Behr e al., 1983; Ohlsson, 1988) e distintas (Rahim e Kieren, 1988; cit. por Moseley, 2005) perspectivas. O conhecimento sobre fracções não é uma simples extensão do conhecimento sobre os números inteiros (Mamede, Nunes e Bryant, 2005). Os números racionais diferem dos números inteiros por várias razões: a) recorre-se a dois sinais numéricos para representar uma mesma quantidade: é a relação entre os números, e não o seu valor independente, que representa a quantidade; b) relativamente à ordenação, as fracções têm densidade, i.e., as fracções não têm um sucessor único, podendo existir uma infinidade de fracções entre duas fracções; c) enquanto que a unidade é o número natural mais pequeno, não existe um número racional mais pequeno (Stafylidou e Vosniadou, 2004; Nunes e Bryant, 2009). Para Behr, Harel, Post e Lesh (1992), os números racionais são o primeiro conjunto de números experienciados pelas crianças que não são consistente com os princípios de contagem que se aplicam aos números naturais, razão pela qual a noção de fracção é sistematicamente mal representada.

A relevância do estudo dos números racionais é praticamente consensual entre os educadores. Behr et al. (1983) apresentam argumentos de ordem prática, psicológica e matemática para justificar sua manutenção nos currículos a) numa perspectiva relacionada com a estrutura educacional, o trabalho com os números racionais é fundamental uma vez que ocupa uma parte muito importante no currículo de matemática da Educação Básica; b) numa perspectiva prática porque saber lidar com este conceito permite entender, controlar e resolver situações e problemas do mundo real; c) numa perspectiva psicológica, porque providencia um campo conceptual rico no qual os alunos podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual; d) numa perspectiva matemática, porque a compreensão dos números racionais fornece a base sobre a qual serão construídas as operações algébricas elementares.

Constitui, porém, um dos temas de construção mais difícil, com o qual os alunos demonstram dificuldades em compreender e em aprender (Behr, et al., 1983; Streefland, 1991); e que os professores consideram difícil de compreender e ensinar (Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993). Parece consensual que o conceito de número racional está entre as ideias matemáticas mais complexas para as crianças.

Várias investigações sobre a construção da ideia de número racional pelos alunos mostram que os problemas relacionados com o ensino e a aprendizagem dos números racionais são extremamente amplos (Ohlsson, 1988) e persistentes (Bezuk & Cramer, 1989). Se algumas dificuldades na aprendizagem das fracções estão relacionadas com a complexidade do conceito, os métodos de ensino e as situações propostas para trabalhar os conceitos podem contribuir para algumas dificuldades (Stafylidou e Vosniadou, 2004; Nunes e Bryant, 2009; Behr et al., 1983).

Nunes e Bryant (2006) mostram como o significado da fracção difere consoante as situações propostas, salientando que estas afectam a compreensão e as estratégias utilizadas.

A investigação reconhece a importância dos manuais escolares, enquanto uma ferramenta de trabalho insubstituível e uma peça mediadora durante o processo de aprendizagem (Santos, 2001, cit. por Silvestre, 2008), que influencia o que se aprende e como se aprende (Reys, Reys & Chávez, 2004, cit. por Silvestre, 2008).

É importante compreender se há qualidade científica e pedagógica nos manuais escolares que chegam às escolas para selecção e adopção (Correia, 1998, cit. por Silvestre, 2008).

Este estudo surge, por um lado, do reconhecimento da importância do manual escolar na orientação do ensino da matemática e no tipo de experiências que se proporcionam, assim como, do reconhecimento que as experiências propostas para se trabalharem os conceitos afectam a compreensão dos alunos.

Neste estudo, propomo-nos analisar, especificamente, a abordagem inicial ao conceito de fracção nos manuais escolares do 5º ano de escolaridade, (e respectivos cadernos de exercícios). Para tal, recorreremos a Grelha de análise que surgiu de um projecto fundado em 1985, denominado *Project 2061*.

Deste modo, surge o objectivo principal geral desta investigação: saber se *os manuais de Matemática têm em consideração os critérios pela Grelha de Avaliação utilizada no Project 2061, na área relacionada com os números racionais*.

Da aplicação da grelha surgiu outra necessidade: responder a alguns critérios da Grelha implica proceder a uma revisão de literatura que nos permita identificar quais as experiências que deverão ser utilizadas para trabalhar os conceitos. A revisão efectuada revela-nos quais as experiências e quais os conceitos que deverão ser analisados. Neste

sentido, propomo-nos proceder a uma análise da abordagem inicial que é proposta pelos manuais para trabalhar os conceitos de unidade e partição, bem como de equivalência e ordem.

Os objectivos específicos deste trabalho prendem-se com avaliar os três manuais portugueses do 5º ano considerando:

(1) os critérios utilizados na Grelha de Avaliação no *Project 2061: Identificação de um sentido de objectivo, Construção de conhecimento a partir de ideias matemáticas dos alunos, Mobilização dos alunos para a Matemática, Desenvolvimento de ideias matemáticas, Promoção do pensamento sobre a Matemática e Avaliação do progresso dos alunos na Matemática;*

(2) os critérios definidos pela nossa revisão de literatura para trabalhar os conceitos de unidade, partição, equivalência e ordem.

Este trabalho compromete-se a tentar entender de que forma os manuais escolares facilitam ou não o processo de aprendizagem. O trabalho desenvolvido encontra-se organizado em 5 capítulos.

No presente capítulo, Capítulo I, apresentam-se os aspectos que nos permitiram identificar e delimitar o campo de investigação, assim como as questões a que se procura responder e alguns aspectos justificativos da importância desta investigação.

No Capítulo II procedemos a uma revisão de literatura tentando definir as diferentes interpretações no significado da fracção, quais os vários conceitos que são fundamentais para a compreensão do conceito e que actividades se deverão propor para trabalhar os conceitos, e por último, identificar algumas pistas para compreender as dificuldades encontradas na aprendizagem com os números racionais..

No Capítulo III apresentamos, em termos metodológicos, as questões de investigação do estudo, do instrumento utilizado e os critérios de análise.

A análise dos resultados obtidos será apresentada no Capítulo IV.

O Capítulo V será dedicado à discussão dos resultados e às conclusões retiradas face ao tema explorado, às limitações encontradas, e ainda a alguns comentários finais e considerações para futuras investigações.

2.1 Conceito de fracção

A aquisição do conceito de fracção tem vindo a suscitar numerosas investigações que revelam a complexidade desta noção. Vários investigadores têm vindo a propor uma variedade de interpretações para o número racional. Kieren (1980), Behr, Harel, Lesh, Post (1992), e Carpenter, Fennema et Romberg (1993) designaram por “sub-constructos” as várias componentes do conceito de fracção.

Kieren (1980) definiu cinco sub-constructos: parte/todo; razão, quociente, medida, e operador. Behr, Lesh, Post, e Silver (1983) propõem sete interpretações para as fracções: medida fraccionária, razão, taxa, quociente, coordenadas lineares, decimais, e, por último, o subconstructo operador. Nunes (2003) refere-se ao significado parte/todo, medida, quociente, razão e número. Na literatura de expressão francesa, Brousseau (1981) insiste na distinção entre fracção-medida e fracção operador linear na construção de modelos matemáticos enquanto Brissiaud (1998) insiste na distinção entre fraccionamento da unidade e fraccionamento da pluralidade.

Ainda que não exista consenso relativamente à forma de classificar os números racionais é consensual que a fracção não é uma simples construção, sendo caracterizada por um conjunto de sub-construções distintas (Carpenter, Fennema, & Romberg, 1993), podendo-se considerar que as interpretações de fracção enquanto quociente, razão, operador, e uma versão da interpretação parte-todo são conceitos centrais (Ohlsson, 1988).

Desenvolvemos sucintamente as interpretações parte/todo, medida, quociente e operador. Não desenvolvemos a interpretação razão pör não ser introduzida nos manuais de 5º ano. Optou-se por não abordar as fracções decimais por duas ordens se razões: (1) a literatura sugere que o trabalho/compreensão das fracções decimais requererem uma boa conceptualização dos números decimais e uma abordagem metodológica própria (Brissiaud, 1998; Brousseau, 1981); e (2) dada a necessidade, segundo os autores da grelha, de limitar o objecto de aplicação da grelha de análise dos manuais.

2.1.1. O subconstruto parte-todo

Nesta situação, a fracção a/b representa o número de partes a de uma unidade que foi dividida em b partes de tamanho igual (Lamon, 1999). Aplica-se a quantidades contínuas ou a um conjunto de objectos discretos (Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A., 1998). Esta interpretação é a mais comum e a primeira interpretação que os alunos encontram na escola (Clarke, Mitchell & Roche, 2007).

Vários autores (Behr e al., 1983; Lamon, 1999; Mack, 1993; Powell & Hunting, 2003) salientaram a importância desta interpretação. Este subconstruto (e o de partição) é o subconstruto básico para a aprendizagem de outros subconstrutos (Behr e al., 1983); providencia linguagem e simbolismo aos números racionais (Lamon, 1999); é a base para o desenvolvimento de estruturas multiplicativas (Powell & Hunting, 2003); e, geralmente, serve de fundamentos para as estratégias informais usadas pelos alunos para resolver problemas com números racionais (Mack, 1993). Segundo Powell & Hunting (2003), uma compreensão firme deste conceito irá suportar a aprendizagem e construção posterior do conceito de fracção.

Contudo, esta interpretação de fracção não é suficiente para uma construção do sistema dos números racionais (Lamon, 2001). Poderá induzir estratégias de dupla contagem do todo e das partes (Nunes, 2003; Mitchell, 2005; Escolano e Gairin, 2005) o que poderá conduzir à dissociação entre os dois termos da uma fracção mais relacionados a uma dupla cardinalidade do que a uma relação entre números e/ou grandezas. Este obstáculo à aceitação da fracção enquanto um único número - qualificado por “N-distractor” por Streefland (1991) - conduz a defeitos de conceptualização e de tratamento: as fracções são mais uma expressão de grandezas absolutas do que relativas; e aplicam-se às fracções as ideias já adquiridas sobre os números inteiros. Esta interpretação não favorece a compreensão de um novo número (Kieren, 1988); e poderá funcionar como um possível inibidor do desenvolvimento de outras representações de fracções (Kerslake, 1986). Alguns autores afirmam mesmo que esta interpretação da fracção enquanto parte/todo acarreta obstáculos didácticos (Escolano & Gairin, 2005).

2.1.2. Substruto medida

Neste significado a fracção representa “o número atribuído a uma determinada quantidade mensurável” (Sowder et al., 1998, p. 9), o que ocorre quando uma dada unidade de medida não “cabe” em algo que se quer medir um número inteiro de vezes. Assim, o todo deverá ser dividido em partes e a fracção é usada para exprimir quanto desta unidade é considerada.

Para Behr et al. (1983) e Ohlsson (1988), esta interpretação pode ser considerada uma reconceptualização da interpretação parte-todo – pois ambas representam quanto de uma quantidade existe em relação a uma determinada unidade da quantidade.

Para Lamon (1999) esta interpretação difere dos outros construtos na medida em que o número de partes iguais numa unidade pode variar em função do número de vezes em que se partilha a unidade. Estas partições sucessivas permitem “medir” com precisão. Para a autora, a partição joga um papel importante nesta interpretação de fracção. Por outro lado, nestas situações é necessário verificar “*quantas vezes mais ou menos*” de uma quantidade é considerada e, neste sentido, requer um raciocínio multiplicativo, por oposição a um pensamento aditivo que permite resposta a perguntas que incidem sobre “*quantos mais, ou menos*” de uma quantidade: a quantidade multiplicativa descrita é relativa a algo em vez de ser uma quantidade “contada”.

Vários autores salientam a importância de trabalhar esta interpretação de fracção numa fase inicial do estudo do conceito de fracção (Streefland, 1986; Monteiro, Pinto e Figueiredo, 2005; Escolano & Gairin, 2005). Este significado resulta central para dar significado à fracção e para desenvolver uma compreensão dos números racionais (Escolano & Gairin, 2005; Behr & Post, 1988). As tarefas de medida permitem a descoberta de relações e a construção de modelos que vão gradualmente servindo de ponte para a construção de conhecimento matemático mais formal (Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005). São fundamentais para trabalhar o conceito de unidade (Behr et al., 1992; Lamon, 1999; Escolano & Gairin, 2005). E favorecem a compreensão do conceito de densidade da fracção, i.e., o conceito que entre qualquer duas fracções existe uma infinidade de números racionais (Mitchell, 2005).

2.1.3. Subconstruto quociente ou divisão

Nesta interpretação, a fracção a/b representa a operação de divisão (a dividido por b), ou ainda, o resultado desta divisão (Clarke, Mitchell & Roche, 2007). Quando duas quantidades são divididas o resultado é um quociente, o que resulta substancialmente diferente da interpretação parte/todo, na qual o símbolo a/b refere-se à parte fraccionária de uma única quantidade (Behr et al., 1983). Ainda que o resultado seja o mesmo, dividir uma unidade em cinco partes e tomar três resulta bastante diferente de dividir três unidades entre cinco pessoas (Kieren, 1980). Este significado está presente quando objectos precisam ser divididos igualmente num certo número de grupos/pessoas. Streefland (1984), Monteiro, Pinto & Figueiredo (2005), Nunes e Bryant (2009) e Brissiaud (1998) centram o desenvolvimento das sequências de ensino das fracções em redor da interpretação quociente.

2.1.4. O subconstruto operador

O subconstructo de número racional enquanto operador define uma estrutura multiplicativa onde o operador p/q faz duas operações: uma de multiplicação por p e outra de divisão por q . Neste caso, p/q impõe aos números racionais uma interpretação algébrica. Ao operar com um objecto contínuo (por exemplo, comprimento), pensamos em p/q como uma combinação entre “esticar” e “encolher” (por exemplo, aplicar um operador p/q a um comprimento l , este será “esticado” p vezes e “encolhido” q vezes). A interpretação “multiplicação/divisão” será dada a p/q quando opera em um conjunto discreto; o número racional p/q transforma um conjunto com n elementos num conjunto com np elementos que é reduzido a np/q (Behr et al., 1983).

2.1.5. Subconstruto ratio

Muito sucintamente, na interpretação ratio, o símbolo a/b refere-se a uma relação entre quantidades (Behr et al., 1983; Nunes & Bryant, 2009).

È consensual que estas múltiplas (Behr et al. 1983; Kieren, 1980; Ohlsson, 1988) e distintas (Rahim e Kieren, 1988; cit. por Moseley, 2005) perspectivas são necessárias para uma compreensão completa e global dos números racionais que requer, não só,

uma compreensão de cada um destes subconstrutos separados, mas também de como eles se relacionam (Behr et al., 1983; Vergnaud, 1983, cit. por Moseley, 2005). Numerosas investigações indicam que é necessário organizar a sequência de ensino de tal forma que se proporcionem experiências adequadas com a maioria das suas interpretações para permitir uma compreensão ampla e operativa de todas as ideias relacionadas com o conceito de fracção (Behr, et al., 1983;). No entanto, não parece haver consenso no que diz respeito à interpretação que se deverá utilizar para introduzir o conceito. Por outro lado, vários autores defendem que mais importante do que trabalhar os vários subconstrutos é desenvolver um longo trabalho em redor de determinados ideias que são fundamentais para desenvolver uma compreensão do conceito de fracção (Clarke et al., 2007).

2. Elementos unificadores do conceito de fracção

Vários autores têm vindo a defender a existência de alguns “elementos unificadores” ou “*big ideias*” (Clarke et al., 2007) que, de alguma forma, conectam as várias interpretações, em redor de determinados ideias que são fundamentais para desenvolver uma compreensão do conceito de fracção.

Carpenter, Fennema, & Romberg (1993) identificaram três elementos unificadores para as interpretações: a unidade (“Unitizing”); partição (“partitioning”) e a noção de quantidade; aos quais Lamon (1999) acrescenta o pensamento multiplicativo ou relativo. Também Kieren (1988) salientou a importância da ideia de equivalência (para além da partição) como sendo um mecanismo de construção do conceito (ou elemento unificador). Nunes & Bryant (2003) consideram ordem e equivalência dois invariantes centrais para o conceito de fracção. Mack (1995) refere ainda a medida comum para adicionar e subtrair (que não será aqui desenvolvida).

Passamos à discussão de algumas dessas ideias, nomeadamente, pensamento multiplicativo, noção de quantidade, conceito de unidade, conceito de partição e por último, ordem e equivalência.

2.2.1 Pensamento multiplicativo

Segundo Vergnaud (1988) as fracções fazem parte do campo conceptual das estruturas multiplicativas, que consiste “em todas as situações-problema que podem ser analisadas enquanto proporções simples ou múltiplas que comportam uma divisão ou uma multiplicação¹. No campo conceptual das estruturas multiplicativas, Vergnaud (1981, 1988) inclui conceitos como função linear e n-linear, vectores, fracções, ratio, taxa, número racional, multiplicação e divisão. Este campo conceptual distingue-se claramente das estruturas aditivas constituídas por elementos como o conceito de medida, adição, subtracção, transformação no tempo, comparação de relações, etc.

Segundo Lamon (1999) a distinção entre pensamento multiplicativo e o pensamento aditivo passa pela diferenciação entre quantidade absoluta e quantidade relativa². Uma quantidade absoluta é independente e não se encontra relacionada com nenhuma outra quantidade; implica um pensamento aditivo com o qual os alunos já estão familiarizados. No entanto, trabalhar com fracções implica que os alunos compreendam mudanças comparadas com outra quantidade qualquer, o que requer que estes desenvolvam um raciocínio relativo, que lidem com quantidades relativas, o que implica comparação com outra quantidade.

O pensamento multiplicativo é um dos aspectos da ideia - mais ampla - das estruturas multiplicativas. Estas estruturas são cognitivamente complexas pois baseiam-se em relações entre quantidades e não em contagem. Por esta razão, os alunos habituados ao raciocínio aditivo poderão ter dificuldades em mover-se para um raciocínio multiplicativo (Behr & Post, 1992; Lamon, 1999).

Numa tentativa de descrever a complexidade das estruturas multiplicativas, Lamon (1993,) defende que estas requerem uma coordenação conceptual de múltiplas composições de unidades³. Por outro lado, a maioria das estruturas multiplicativas

¹ Vergnaud (1981) distingue duas grandes categorias: o isomorfismo de medidas e o produto de medidas; referindo ainda um terceiro subtipo de estrutura multiplicativa: as Múltiplas proporções e outros produtos.

² Para ilustrar a diferença entre pensamento multiplicativo e aditivo, Lamon (1999) dá o seguinte exemplo: existem 2 caixas de doces. A primeira tem 4 doces e a segunda tem 10. O pensamento aditivo é necessário para responder à questão como “quantos doces estão na primeira caixa?” e “ quantos mais estão na segunda comparado com a primeira?”. Em contraste um pensamento multiplicativo é requerido para se responder a questões como: “ Que parte de uma dúzia representam os doces de cada caixa?” e “O número de doces na segunda caixa é quantas vezes mais do que o número de doces da primeira caixa?”.

³ Por exemplo, encontrar $\frac{3}{4}$ de 16 objectos implica 1) que se considere os 16 objectos enquanto uma unidade; 2) que se faça uma decomposição da unidade (ou seja, que se façam unidades da unidade) de forma a obter 4 unidades; e finalmente 3) que se tome 3 destas 4 unidades; demonstrando assim que a

combinam duas quantidades diferentes para criar uma terceira quantidade diferente⁴ (Lamon, 1999). Para Lamon (1999) o pensamento multiplicativo (ou relativo) está ligado à compreensão de várias ideias importantes relacionadas com fracções, nomeadamente: a) a relação entre o tamanho das partes e o número de partes, (b) a necessidade de comparar fracções com a mesma unidade, (c) o significado de um número fraccionário, (d) a relação entre fracções equivalentes, e (e) a relação entre a representação de fracções equivalentes.

2.2.2. Noção de quantidade

Uma compreensão quantitativa do número racional, i.e., a natureza relativa das fracções, pode ser uma fonte de dificuldade para as crianças. As investigações mostram que muitos erros cometidos podem ser consequência da ausência de compreensão que números racionais e números naturais envolvem ideias diferentes. Por exemplo, um erro comum é pensar que $1/3$ é menor que $1/5$ porque 3 é menor que 5 (Nunes, Bryant, Hurry e Pretzlik, 2006). Os alunos cometem este tipo de erro porque aplicam o conhecimento que têm sobre os números inteiros às fracções (Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Referimos na introdução que os números racionais diferem dos números inteiros por várias razões: a) recorre-se a dois sinais numéricos para representar uma quantidade; b) as fracções têm densidade; c) não existe um número racional mais pequeno (Stafylidou & Vosniadou, 2004; Lamon, 1999; Nunes e Bryant, 2009). Esta distinção permite-nos fazer uso do número racional para representar quantidades que são mais pequenas que a unidade (Nunes & Bryant, 2009).

Uma compreensão quantitativa do número racional implica a compreensão de várias ideias, nomeadamente, requer que os alunos realizem que as fracções podem ser expressas de diferentes maneiras sendo, no entanto, equivalentes por se referirem à mesma quantidade; requer também a compreensão que a mesma fracção pode referir-se a diferentes quantidades, por exemplo, $1/2$ de 8 e $1/2$ de 12 são diferentes (Nunes & Bryant, 2009). Segundo os autores, não é possível os alunos continuarem a progredir em

resolução deste tipo de problemas implica múltiplas composições da unidade (neste caso concreto 3 composições hierárquicas da unidade).

⁴ Por exemplo, 3 pacotes de biscoitos contendo 4 biscoitos cada perfaz 12 biscoitos. Aqui existem três variáveis, ou seja três quantidades, pacotes, biscoitos por pacote e biscoitos.

matemática sem dominar a natureza relativa dos números racionais (Nunes et al, 2006). Os números racionais têm tamanhos absolutos e relativos. Os sujeitos deverão adquirir a capacidade de perceber o tamanho relativo ou quantidade dos números racionais (Lamon, 1993; Post, Behr & Lesh, 1986), i.e., a compreensão de que são comparados tendo em conta a sua relação com o todo, que os define; que os números racionais têm uma magnitude relativa que depende do tamanho do todo (o que nos remete também para a importância do conceito de unidade)⁵. Por outro lado, por exprimirem quantidades, as fracções podem ser comparadas e ordenadas; tarefa essa que é muito diferente e mais complexa do que ordenar números inteiros (Stafylidou e Vosniadou, 2004; Nunes e Bryant, 2009). Para ordenar fracções é necessário compreender a propriedade de densidade dos números racionais. Ao contrário, dos números inteiros, não existe um número único. E ainda, para comparar magnitudes relativas com partes de todos (ou unidades) de tamanho diferente, é imperativo que a comparação de magnitudes absolutas seja feita com respeito a uma unidade comum.

Lidar com estes vários aspectos das fracções requer a compreensão que os números racionais são números, que definem uma quantidade expressa através da relação existente entre numerador e denominador (e não de dois números independentes) que define o significado de fracção. As propriedades das fracções - que podem ser uma fonte de confusão para alguns alunos - exigem uma reorganização radical da estrutura conceptual que permite aos alunos a adopção de um modelo científico da fracção (Stafylidou & Vosniadou, 2004), o que requer mudanças ontológicas (Chi and Slotta, 1994, cit. por Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Percebemos a importância de conceptualizar as fracções enquanto quantidades antes de se introduzir algoritmos (Saenz-Ludlow, 1994; Nunes et al., 2006, 2009) e como as ideias básicas de equivalência e ordenação de magnitudes são fundamentais para uma boa compreensão do que representa a fracção (Nunes & Bryant, 2009).

⁵ Por exemplo, a comparação entre magnitudes relativas pode revelar que $\frac{1}{2}$ de uma tarte pequena é menor que $\frac{1}{3}$ de uma tarte grande. Uma comparação de magnitudes relativas entre partes de um todo com diferentes tamanho implica que seja efectuada uma comparação entre magnitudes absolutas relacionadas com uma unidade comum, ou seja, que a quantidade comparada se baseia num todo de mesmo tamanho.

2.2.3 Conceito de unidade

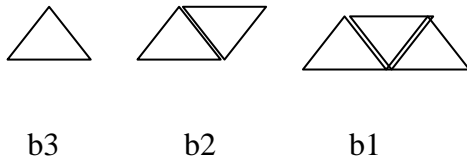
Referimos que para Stafylidou e Vosniadou (2004), a adopção de um modelo científico da fracção exige uma reorganização radical da estrutura conceptual: inicialmente os alunos não compreendem a relação entre numerador e denominador e encaram a fracção enquanto constituída por dois números independentes. Posteriormente, encaram a fracção enquanto parte da unidade mas acreditam que a fracção é sempre menor que a unidade. É necessária uma mudança radical para poderem formar um conceito de fracção enquanto número que pode ser igual, maior ou menor que a unidade, o que ocorre num terceiro momento. As autoras verificaram que os alunos que desenvolveram uma compreensão de fracção enquanto número único compreenderam que “a relação de ordem de uma fracção e a unidade está imediatamente relacionada com a relação de ordem entre numerador e denominador” (p. 513), ou seja, a relação existente entre numerador e denominador está directamente relacionada com a relação que existem entre fracção e a unidade.

Podemos aqui identificar várias ideias: (1) é possível delinear uma progressão no desenvolvimento da compreensão do valor numérico da fracção que está relacionada com a forma como é compreendida a relação existente entre fracção e a unidade; (2) o conceito de unidade é central para uma compreensão da fracção. O tamanho da fracção depende da relação com o todo e do tamanho do todo, que as define; (3) a fracção enquanto número pode ser igual, maior ou menor que a unidade.

Neste sentido, depreende-se a importância (1) de trabalhar o conceito de unidade e (2) da ideia de fracção poder ser igual, menor ou maior que a unidade. Coloca-se a questão de perceber como se pode abordar estes dois conceitos assim como os números mistos. Abordamos estes conceitos em momentos distintos.

Vários autores têm vindo a focar a sua atenção no conceito de unidade. Existe uma extensa literatura sobre a temática. Citaremos apenas algumas contribuições.

Saenz-Ludlow (1995) defende que é necessário primeiro conceptualizar o todo enquanto unidade composta de unidades de tamanho idêntico e o reconhecimento da dependência do todo referente às partes, estabelecendo uma relação *parte-todo* [b1 =3b3].



Em segundo lugar, é necessário conceptualizar a inversão desta relação para gerar uma relação *todo-parte*: conceptualizar a parte como dependente do todo [$b3 = 1/3 b1$]. A inversão da relação *parte-todo* para uma relação *todo-parte* permite configurar uma parte particular, uma quantificação (por natureza fraccionária) com respeito ao todo [$b2 = 2b3 = 2/3 b1$]. Para a autora, “as bases do esquema métrico parte/todo é a multiplicativa recomposição do todo, a dissociação de uma parte do todo enquanto mentalmente se conserva a unidade do todo” (p.114).

No mesmo sentido, para Steffe e Olive (1991), a acção fundamental para o desenvolvimento do significado de número racional é a equidivisão da unidade em partes, a divisão recursiva da parte em subpartes e a reconstrução da unidade. Lidar com números fraccionários implica usar mecanismos para formar unidades compostas de diferentes maneiras e perceber que uma nova unidade não é criada; a unidade prévia é reconfigurada. Esta habilidade é crítica para um pensamento multiplicativo. À semelhança de Lamon (1999), os autores defendem que um conceito flexível do todo, ou unidade, é crítico para trabalhar com fracções e com todas as interpretações de número racional. Ambos sublinham também a importância da capacidade em mover da parte para o todo. A capacidade de operar sobre a parte-todo revela que os alunos já desenvolveram esse conceito que lhes permite determinar ou reconstruir o todo quando são dadas as partes (Steffe e Olive, 1991).

Para Lamon (1999), uma compreensão completa do todo (ou unidade) implica que se perceba que a unidade pode ser composta por um ou mais que um objecto, ou ainda vários objectos embalados que formam uma unidade, o que resulta complexo pois, quando tal unidade é partilhada, surge um novo tipo de número referente à parte fraccionária⁶. Para a autora (2002), resulta fundamental que as crianças aprendam que a

⁶ Por exemplo, quando um pacote de três biscoitos é dividido em três partes iguais, o resultado é um biscoito em cada parte, pelo que um biscoito representa $1/3$ da unidade original. Contudo, as crianças poderão encarar esse mesmo biscoito como um todo. Se a unidade, ou o todo, fosse 2 biscoitos então $1/3$ seria já outra quantidade. Por outro lado, um biscoito pode representar $1/2$ de um pacote de dois biscoitos ou $1/4$ de uma embalagem de 4 biscoitos; pelo que cada fracção pode ser representada por fracções equivalentes, o que significa que existem vários nomes para a mesma quantidade.

unidade é diferente nos diferentes problemas; pelo que deverão sempre identificar a unidade antes de resolver o problema. A autora defende a necessidade das crianças desenvolverem uma abordagem flexível face à capacidade de *unitising* (Lamon, 1999), i.e., que compreendam que existem várias formas de “unitize”⁷. A capacidade de reconceptualizar quantidades de diferentes maneiras acrescenta flexibilidade e utilidade ao conhecimento. Refere que “os estudantes que desenvolveram um sólido processo de raciocínio baseado no “*unitizing*” ultrapassam os estudantes que tiveram muitos anos de ensino de regras no que diz respeito ao conhecimento conceptual como a sua capacidade para operar sobre fracções” (Lamon, 2002, p. 85). Por outro lado, o *unitizing* também enfatiza a ideia da fracção ser um número, que nomeia uma quantidade relativa.

Behr et al. (1992) e Lamon (1999) salientaram a importância do conceito de unidade ser trabalhado através de actividades de medida e partição. Nas tarefas de medida, a fracção representa a quantidade que resulta da construção da unidade de referência⁸, a partir da qual a situação será redefinida em termos dessa unidade (Lamon, 1993; Olive e Steffe, 1980, citados por Wong & Evans, 2008). Assim, uma ideia fundamental no ensino da mensuração é o conceito de unidade à qual se atribui o número 1 (Wilson e Osbourne, 1992, cit. por Mitchell, 2005).

A recta numérica é um modelo matemático usado para exemplificar as fracções enquanto quantidades e a interpretação de medida (Wong & Evans, 2008). Nesta interpretação implicitamente realiza-se a associação de um ponto a uma fracção, levando a pensar a fracção enquanto um número abstracto - e não unicamente associado a uma parte da figura ou a um subconjunto de objectos. Este modelo permite situar as fracções enquanto extensão do conjunto de números naturais (Wong & Evans, 2008).

A recta numérica não deverá, no entanto, ser o único exemplo proposto que se concentra na fracção enquanto unidade de medida pois a ideia de medida também está relacionada com a noção de parte-de-um-todo recorrendo a modelos de “região” em que a unidade de referência pode ser explícita ou implícita (Wong & Evans, 2008).

O autor apresenta uma variação do modelo “região”:

⁷ Exemplificando, podemos considerar várias formas de “unitize” 24 latas de sumo: podem ser agrupadas em 24 latas de sumo individuais, 1 caixa de 24 latas, 2 packs de 12 latas, ou ainda, 4 packs de 6 latas.

⁸⁸ A unidade de referência pode ser um dos Sistemas Internacionais de Unidades ou unidades arbitrárias como barras de chocolate ou pizzas.

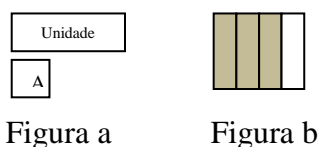


Figura 1- Diferentes métodos pictoriais da representação de fracção usando “regiões”.

Na figura 2a, o todo e as partes são entidades separadas, o todo é implícito; a quantidade fraccionária é construída a partir da relação entre o todo e as partes a serem medidas, não existindo confusão relativamente à unidade de referência (Wong & Evans, 2008). Na figura 2b a parte está embebida no todo e a unidade de referência é implícita.

Amato (2005) salientou a importância de se propor, desde o início, uma variedade de experiências e múltiplas representações para as fracções iguais a uma unidade (n/n), de números mistos assim como números entre 0 e 1 para promover compreensão da fracção enquanto extensão do sistema de número natural.

No que diz respeito à fracção imprópria, algumas investigações (nomeadamente Escolano & Gairin, 2005) têm vindo a apontar a dificuldade das crianças compreenderem as fracções impróprias numa situação parte/todo. Olive e Steffe (2002, cit. por Nunes e Bryant, 2009) sugerem que as dificuldades em compreender a fracção imprópria poderão resultar do uso de situações de partição de uma unidade como base para o conceito de fracção. Stafylidou e Vosniadou (2004) verificaram que os alunos que têm uma compreensão da fracção enquanto parte de um todo acreditam que a fracção representa sempre uma quantidade inferior à unidade. Para as autoras, esta interpretação é reforçada pela forma como as fracções são inicialmente ensinadas. Só quando compreendem a fracção enquanto relação numerador/denominador conseguem compreender a fracção imprópria, i.e., que a fracção é menor do que a unidade quando o numerador é menor que o denominador e que a fracção é maior do que a unidade quando o numerador é maior que o denominador.

Nunes e Bryant (2009), Monteiro, Pinto e Figueiredo (2005) sugerem que poderá ser mais fácil desenvolver uma compreensão da fracção imprópria quando os alunos utilizam esquemas de correspondência entre dois campos de medida (do que quando usam o esquema de partição de um todo único): numa situação em que 3 chocolates são

partilhados entre 2 meninos, os alunos não demonstram dificuldades em perceber que cada uma irá receber um chocolate mais metade.

Para Escolano & Gairin (2005), a compreensão de fracção igual, maior ou menor que a unidade surge mais naturalmente em contexto medida. Estas situações favorecem também a compreensão da fracção ser substancialmente diferente do número natural: as fracções surgem como necessidade para formular a resposta a problemas para os quais os números naturais se mostram insuficientes, i.e., situações em que o resultado de medida não pode ser expresso com um número natural.

Relativamente aos números mistos, Liebeck (1985, cit. por Amato, 2005) sustenta que estes são frequentemente utilizados no quotidiano (como, por exemplo, $1\frac{1}{2}$ metro, $9\frac{1}{2}$ anos; $1\frac{1}{2}$ de litro de leite) e que surgem naturalmente da medição de objectos. As rectas numéricas ajudando a perceber que as fracções são números situados entre dois números inteiros consecutivos. O autor salienta ainda que abordagens tais como “ $1+1/4$ pode ser escrito como $1\frac{1}{4}$ ” e “ $3\frac{1}{2} = 3+1/2 = 6/2 + 1/2 = 7/2$ são demasiado formais para introduzir os números mistos e a fracção imprópria.

Quando se recorre à recta numérica, a notação de números mistos aparece de forma muito mais natural (Dickson, Brown & Gibson, 1984). Aliás, Hannula (2003, cit. por Amato, 2005) verificou que os números mistos são mais fáceis de localizar na recta numerica do que as fracções próprias. A utilização da recta numérica ajuda os alunos a perceber como números inteiros, fracções e decimais estão relacionados e providência uma forma de compreender porquê $5/3$ é o mesmo que $1\frac{2}{3}$ e que $6/3$ é o mesmo que 2; Parece também que facilita a compreensão da noção de densidade dos números racionais (Clarke, Roche & Mitchell, 2008).

2.2.4 Partição

Vários autores têm vindo a demonstrar que partição e partilha são fundamentais para a compreensão de fracção e para a construção do conceito de número racional (Mack, 1991, 1993; Streefland, 1991, 1993; Lamon, 1999; Vergnaud, 1983; Brousseau, Brousseau and Warfield, 2007, cit. por Nunes & Bryant, 2009; Ohlsson, 1988). Ainda que educadores e investigadores discordem em muitos aspectos existem um consenso claro sobre a ideia que os números racionais são números no domínio do quociente, ou seja, números que são definidos pela operação de divisão; pelo que parece razoável

procurar a origem da compreensão dos números racionais na compreensão da divisão (Nunes & Bryant, 2009).

Pothier & Sawada (1990) identificaram cinco tipos de unidades distintos: a) quantidades contínuas tais como 8 pessoas que partilham 1 piza; b) quantidades contínuas com subconjuntos separáveis tais como 4 pessoas a partilhar uma barra de chocolate pré-dividida; c) objectos discretos como, por exemplo, $\frac{2}{3}$ de 12 caricas; d) Conjuntos de objectos discretos com elementos divisíveis como, por exemplo, 3 pessoas que dividem 6 biscoitos; (e) Conjuntos discretos com subconjuntos separáveis, tais como, 5 pessoas que dividem 8 pacotes de pastilhas. Para os autores, estas experiências com partições ajudam os estudantes na construção de um significado para o conceito de fracção e, neste sentido, facilitam a resolução de problemas que envolvem fracções e ajudam na verificação simbólica dos cálculos efectuados com fracções. Os autores acreditam que a utilização de modelos pré-divididos não facilita a representação não simbólica da fracção (pois os alunos não se centram nas propriedades geométricas do todo ou das partes) devendo-se sugerir que a partição seja efectuada pelos próprios alunos.

Segundo Pitkethly e Hunting (1996), os conceitos iniciais sobre fracções parecem desenvolver-se a partir de experiências de partilha (tanto em contextos contínuos como discretos) que conduzam à identificação da unidade e à iteração da unidade.

Outros autores insistem na diferença entre partição da unidade e partição de objectos por várias crianças. Brissiaud (1998) fala de partição da unidade e partição da pluralidade que corresponde ao “mundo das fracções” e ao “mundo da divisão”. Também Nunes e Bryant (2006, 2009) distinguem estas duas situações: em situação de “*measurement*” existe um todo único que é dividido; em situação de divisão existem dois domínios de medida, o numerador indica o número de itens que são partilhados e o denominador refere-se ao número de pessoas. Segundo os autores, é essencial que os alunos sejam ensinados em ambas as situações que permitem desenvolver diferentes esquemas de acção: a situação de divisão apela à utilização da correspondência entre as unidades do numerador e as unidades do denominador (entre bolos e crianças); em situações de “*measurement*” o esquema de acção utilizado pelas crianças é o de partição. Estas situações permitem desenvolver *insights* diferentes sobre as quantidades, nomeadamente, sobre a relação compensatória entre tamanho e número de partes e sobre a relação inversa entre o denominador e o valor da fracção. A maioria dos alunos

não transfere espontaneamente o que aprenderam numa situação ou noutra. Esta questão será desenvolvida quando abordaremos a noção de equivalência e ordenação.

2.2.5 Equivalência e Ordenação

Como referimos anteriormente, as ideias básicas de equivalência e ordenação de fracções são fundamentais para uma boa compreensão do que representa a fracção (Nunes & Bryant, 2009).

Como referem Nunes & Bryant (2009), vários estudos documentam as dificuldades que os alunos demonstram em compreender equivalência e ordem de magnitudes no domínio dos números racionais (Behr, Harel, Post e Lesh, 1992; Behr, Wachsmuth, Post e Lesh, 1984; Hart, Brown, Kerslake, Küchermann e Ruddock, 1985; Kamii e Clark, 1995; Kerslake, 1986).

Uma vez mais, parece que as ideias desenvolvidas para os números inteiros interferem com as ideias desenvolvidas sobre os números racionais⁹. Ora, para efectuar estas “operações” sobre os números racionais, e ao contrário dos números inteiros, não se pode recorrer a estratégias de contagem. Outra fonte de dificuldade na comparação de fracções está então relacionada com o tamanho da unidade original: Enquanto $\frac{1}{2}$ é uma proporção maior do que $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ de 90 euros é uma quantidade absoluta maior do que $\frac{1}{2}$ de 50 euros.

Iremos tratar separadamente os conceitos de equivalência e ordem para tentar salientar os benefícios (para os alunos) de diferentes actividades, que poderão ajudá-los a desenvolver um sentido de fracção, i.e., de quantidade.

- *O conceito de equivalência*

Como referimos anteriormente, a compreensão da equivalência é crucial no domínio das fracções e implica a compreensão de duas ideias: (1) duas quantidades fraccionárias com nomes diferentes podem ser equivalentes; e (2) duas fracções com o mesmo nome podem representar duas quantidades diferentes (Nunes & Bryant, 2009).

Investigações demonstram que a dificuldade com questões de equivalência varia consoante o tipo de tarefa. Kerslake (1986) notou que tarefas que consistem na

⁹ Para todas as crianças os esquemas anteriores desenvolvidos com números inteiros influenciaram a capacidade de raciocinar sobre a relação de ordem das fracções (Post & Cramer, 1987).

apresentação de diagramas com a mesma forma dividida em números diferentes de secções (solicitando aos alunos que constatem a equivalência de duas fracções) resulta relativamente fácil pois é possível recorrer a uma comparação perceptiva. Contudo, se é dado aos alunos um diagrama com seis ou nove divisões e é solicitado que marquem $\frac{2}{3}$ da forma, uma larga proporção não identificam as fracções equivalentes ($\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$). Escolano e Gairin (2005) sugerem que o conceito de equivalência aparece de forma natural desde as primeiras tarefas de medida porque os alunos expressam a medida de uma mesma quantidade com distintas subunidades. Nunes et al. (2006) verificaram que os alunos perceberam melhor a equivalência (e as fracções), e têm melhores desempenhos, em contexto divisão do que em contexto parte/todo. Com efeito, Nunes et al. (2006) verificaram que os alunos da sua amostra (de 9-10 anos) demonstravam dificuldades num contexto parte/todo¹⁰ quando era solicitado que pintassem fracções equivalentes. Quando foram propostas itens para as situações parte/todo mais comparáveis ao formato usado em situações de divisão¹¹, os alunos demonstram já melhor desempenho. Numa das situações apresentadas em contexto quociente¹², praticamente todos os alunos resolveram a tarefa, e isto, mesmo sem terem recebido nenhum ensino sistemático com problemas de divisão (Nunes et al. 2006).

Também Mamede, Nunes & Bryant (2005) verificou que crianças portuguesas de 6 anos (do primeiro ano de escolaridade) que nunca tinham recebido uma instrução formal sobre as fracções demonstraram maiores capacidades em resolver problemas relacionados com equivalência de fracções em contexto quociente¹³ do que em contexto parte/todo¹⁴.

¹⁰ Os autores referem que em situações parte/todo foram propostas exercícios típicos, que os alunos encontram na escola, como por exemplo, pintar $\frac{2}{3}$ de duas figuras: uma dividida em 6 partes iguais e outra dividida em 9 partes iguais. Esta tarefa implica pensar sobre fracções equivalentes pois deverão pintar respectivamente $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ da figura.

¹¹ Por exemplo: o Peter corta 1 chocolate em 4 e come 2. O Alan corta em 8 e come 4. O Peter vai comer mais? O Alan vai comer mais? Os dois vão comer igual?

¹² A situação apresentada (com suporte visual) consistia em apresentar um grupo de 3 meninos que dividiam 1 bolo e outro grupo de 6 meninos que dividiam 2 bolos perguntando se comiam igual ou diferente.

¹³ No grupo A, dois meninos partilham 1 barra de chocolate. No grupo B, 4 meninos partilham 2 barras. As crianças do grupo A comem mais, o mesmo, ou menos que crianças do grupo B?

¹⁴ Um menino cortou uma barra de chocolate em 2 partes e comeu 1. A menina cortou a sua em 4 partes e comeu 2. O menino comeu mais, o mesmo, ou menos que a menina?

Segundo Nunes e Bryant (2009), as situações de divisão (i.e., quando existem duas medidas) apelam a esquemas de correspondência e permitem desenvolver diferentes *insights* sobre a equivalência pensando, por exemplo, que (1) independente do número de partes em que se dividiu a unidade, o mesmo número de pessoas e a mesma quantidade de piza resulta na mesma quantidade; ou ainda, (2) que havendo duas vezes mais objectos a partilhar e duas vezes mais pessoas então cada uma irá receber a mesma parte. Este *insight*, que implica uma relação directa, é fundamental para uma compreensão conceptual de quantidades que permita aos alunos perceber as razões pelas quais o procedimento de multiplicar numerador e denominador pelo mesmo número funciona. As situações de “*measurement*”, apelam ao esquema mental de partição, não parecem produzir os mesmos *insights* imediatos sobre a equivalência: a compreensão que surge nestas situações será “se cortar um todo em duas vezes mais partes, o tamanho de cada parte será a metade”. Por exemplo, uma piza que foi dividida em partes iguais, e posteriormente dividido em partes iguais mais pequenas permite nomear fracções equivalentes: uma tarte cortada em 4 peças, uma fatia representa $\frac{1}{4}$ da tarte; a mesma tarte cortada em 8 peças (cortando cada uma das 4 partes em metade), cada peça representa então $\frac{1}{8}$ da tarte e duas peças representam a mesma quantidade que $\frac{1}{4}$. Estas experiências de partilha ajudam os alunos a desenvolver ideias de equivalência que são significativas e que permitem a compreensão da relação inversa entre o número de partes do todo e o tamanho das partes. Parece que as crianças percebem melhor uma relação directa do que o inverso da relação.

No entanto, como referem Stafylidou e Vosniadou (2004), esta compreensão que se o número de partes da unidade aumenta, cada parte se torna progressivamente mais pequena (os alunos argumentam que “quanto mais partes menor o valor”) representa uma fase transitória no processo de aprendizagem das fracções (um modelo sintético) quando começam a encarar a “*Fracção enquanto uma Parte de um Todo*” e não mais como dois números independentes.

- *O conceito de ordem*

Ordenar fracções implica que se considere a magnitude das fracções que depende da relação entre numerador e denominador. Nunes et Bryant (2009) sugerem

que os alunos têm de considerar diferentes ideias: (1) com denominador igual, quanto maior é o numerador, maior será a magnitude da fracção ($2/4 < 3/4$); (2) com numerador constante, quanto maior é o denominador, menor será a fracção ($3/2 < 3/4$); (3) se ambos variam então é necessário mais conhecimento para ordenar fracções.

Lamon (1999) resumizou as estratégias usadas pelos alunos para ordenar fracções: a) Quando têm um denominador comum as partes têm o mesmo tamanho pelo quanto maior o numerador maior será a fracção. Esta estratégia é denominada por estratégia “*Partes do mesmo tamanho*” (*Same-Size Parts strategy*); b) Quando o numerador é o mesmo, o numero de partes consideradas é o mesmo, pelo que, quanto maior o denominador menor será a fracção, pois cada parte é menor logo a fracção também. Esta estratégia - denominada por “*o mesmo número de partes*” (*Same Number of Parts strategy*) considera então o número de partes; c) A terceira estratégia - que é útil quando o numerador e denominador diferem - consiste em comparar as fracções como um terceiro ponto, um ponto de referência (como $1/2$ por exemplo). Segundo a autora, esta estratégia desenvolvida por meio de um pensamento flexível deverá ser encorajada.

Clarke et al., (2007) verificaram que os estudantes que obtiveram melhor desempenho, utilizam certas estratégias baseadas numa compreensão conceptual do tamanho das fracções: a primeira, denominada de *benchmarking* consiste em comparar o tamanho da fracção com um ponto de referência seja ele 0, $1/2$ ou 1 (no par $3/7$ e $5/8$, por exemplo, os estudantes poderão notar que $3/7$ é menos que $1/2$ e que $5/8$ é mais que $1/2$). A segunda estratégia - *pensamento residual* - consiste em referir a quantidade necessária para reconstruir o todo. Por exemplo, para comparar $5/6$ e $7/8$, os estudantes podem concluir que a primeira fracção requer mais $1/6$ para obter o todo enquanto a segunda requer apenas $1/8$ para reconstituir o todo. Sendo uma parte ou número mais pequeno concluem que $7/8$ é maior. Estas estratégias baseiam-se numa compreensão conceptual e não são generalizadamente utilizadas por estudantes e professores¹⁵ apesar de serem as que mais utilizamos no quotidiano¹⁶. Estas estratégias, que são usadas apenas pelos

¹⁵ Uma conclusão curiosa do estudo de Clarke (2007, 2008) foi a dificuldade ressentida pelos vários grupos de professores da primária e da “*junior secondary*” com o par $3/4$ e $7/9$, que se demonstraram incapazes de propor uma explicação que vá para além da utilização do denominador comum. Neste contexto, os autores consideram que a pequena percentagem (de 10.8%) de sucesso dos estudantes nesta tarefa não é surpreendente.

¹⁶ Clarke et al., (2008) cita um estudo de Northeote e McIntosh (1999) com 200 adultos que demonstrou que 60% de todos os cálculos efectuados nas situações quotidianas são estimações; pelo que o currículo

alunos que dispõem de uma maior compreensão conceptual do tamanho das fracções (Clarke et al., 2007), deverão ser encorajadas e desenvolvidas por meio de um pensamento flexível (Lamon, 1999).

Nunes et al. (2006) e Clarke et al. (2007, 2008) verificaram percentagens elevadas¹⁷ de sucesso quando os alunos têm de comparar fracções com o mesmo denominador; o que, no entanto, não atesta uma efectiva compreensão de número racional (Nunes & Bryant, 2009). A segunda relação resulta mais difícil¹⁸ (Nunes et al., 2006), pois as crianças precisam de pensar numa relação inversa entre denominadores e a quantidade representada pela fracção (Mamede et al., 2005; Nunes et Bryant, 2009). Os alunos têm de considerar o valor da fracção de uma forma que não vai ao encontro da ordem que utiliza com números naturais.

Um estudo de Berhr, Wachsmuth, Post, and Lesh (1984, cit. por Nunes et Bryant, 2009), apresentou uma análise detalhada dos argumentos das crianças no que diz respeito à ordenação de fracções num contexto partição, verificando que com o mesmo numerador e denominadores diferentes, os estudantes são capazes que argumentar que existe uma relação inversa entre o número de partes nas quais o todo foi dividido e o tamanho das partes. Este argumento aparece com referência explícita ao numerador ("existem 2 peças em cada mas as peças em $2/5$ são menores.", p. 328) ou sem ela ("quanto maior o número de partes, menor se tornam as peças.", p. 328). No entanto, este *insight* sobre a relação inversa entre o divisor e a quantidade que só os ajuda quando o dividendo é mantido constante. Não existem evidências que as crianças estendam esta compreensão a situações onde numerador e denominadores diferem e que sejam capazes de compreender que o número de partes e tamanho das partes podem-se compensar, de forma proporcional. Por exemplo: comparando entre $6/8$ e $3/4$ poderiam ter argumentado que existem duas vezes mais partes quando o todo foi cortado em 8 partes em comparação com um todo cortado em 4 partes, pelo que precisamos de tomar duas vezes mais partes (ou seja 6) para obter a mesma quantidade (Nunes et Bryant,

deverá enfatizar este aspecto. Ensinar algoritmos com fracções não prepara os estudantes para enfrentar fracções no dia-a-dia, onde as estimativas mentais são a competência chave

¹⁷ No estudo de Nunes et al. (2006) 94% dos alunos do 4º ano e 87% dos alunos do 5º ano conseguiram comparar fracções com o mesmo denominador ($3/7$ e $5/7$).

¹⁸ Quando o denominador varia e o numerador é o mesmo (comparar $3/5$ e $3/4$), os alunos a percentagem de sucesso foi de 25% no 4º ano e 70% no 5º ano.

2009). Ao contrário, situações de correspondência facilitam essa compreensão (Nunes e Bryant, 2009).

Também Mamede et al. (2005) verificou que crianças demonstraram maiores capacidades para resolver problemas relacionados com ordenação de fracções em contexto quociente¹⁹ do que em contexto parte/todo²⁰.

Segundo Escolano & Gairin (2005), em contexto de medida, os alunos desenvolvem uma ideia muito nítida da comparação de fracções: uma quantidade pode ser maior, menor ou igual a outra (ainda que a interpretação e aplicação a nível simbólico das técnicas de cálculo associadas lhes resulte bastante difícil) e sabem ordenar fracções utilizando como estratégia básica o significado de fracção como medida.

3. Algumas pistas para compreender as dificuldades

A análise dos erros cometidos pelos alunos - realizada em diversos países - revela que os erros observados não são devidos ao acaso mas que são reproduzíveis e persistentes. Várias investigações levadas a cabo nos últimos anos apontam diversas razões para explicar as dificuldades encontradas na aprendizagem inicial das fracções. A literatura é extensa. Deixamos aqui algumas contribuições.

Se parece que uma boa parte das dificuldades de compreensão se situam no conjunto de conceitos, procedimentos, relações e operações da própria estrutura numérica das racionais algumas dificuldades de compreensão são provocadas pelos processos de ensino. Com efeito, referimos, no capítulo II, algumas críticas que são apontadas à ênfase excessiva que é dada à interpretação da fracção enquanto parte/todo; o que poderá acarreta obstáculos didácticos (Escolano & Gairin, 2005).

Para Behr et al. (1983), o desempenho geralmente pobre pode ser um resultado directo de uma forte tendência para traduzir o conceito de fracção utilizando apenas a exploração do significado parte-todo, e da ênfase curricular colocada nos procedimentos

¹⁹ O grupo A, formado por 2 crianças, tem de partilhar 1 barra de chocolate; o grupo B, formado por 3 crianças, tem de partilhar 1 barra de chocolate. Quem comeu mais, as crianças do grupo A ou do grupo B?

²⁰ Bill e Ann têm, cada um, uma barra de chocolate de mesmo tamanho. Bill partiu em 2 partes iguais e comem uma; Ann partiu em 3 partes iguais e comem uma. Quem comeu mais?

mecanizados, em detrimento de um cuidadoso desenvolvimento dos aspectos ligados à compreensão da fracção e das suas funções importantes.

Para Bezuk (1988) não é investido tempo suficiente no desenvolvimento do conceito de fracção e em actividades relacionadas com ordenação e equivalência de fracções antes de se introduzir as operações com fracções. Tais práticas conduzem os alunos a seguir procedimentos sem significado e os alunos demonstram-se incapazes de avaliar se os seus resultados são ou não razoáveis.

Por outro lado, parece que algumas das dificuldades estão relacionadas com uma generalização dos conhecimentos adquiridos sobre o número inteiro que são mal aplicadas às fracções. Streefland (1991) defende que os conhecimentos sobre os números naturais inibem os conhecimentos sobre fracções (favorecendo uma dupla contagem absoluta). Stafylidou e Vosniadou (2004) admitem uma tendência construtivista das crianças em distorcer a nova informação sobre fracções de forma a encaixá-la na sua teoria de contagem dos números naturais. No entanto, esta sobre generalização de conhecimentos adquiridos sobre os números inteiros pode ser exacerbada, senão causada pelos métodos de ensino que utilizam o modelo parte-todo como primeira definição das fracções (Freudenthal, 1983, cit. por Monteiro, Pinto e Figueiredo, 2005; Stafylidou e Vosniadou, 2004) e por uma utilização prematura dos símbolos que representam as fracções (Mack, 1990).

Por outro lado, parece haver um *gap* entre a compreensão conceptual e procedimental das fracções e que os alunos não são capazes de relacionar o seu conhecimento intuitivo (ou contextos familiares) com os símbolos. Os alunos conseguem resolver um grande número de problemas no seu dia-a-dia mas não conseguem fazê-lo quando são apresentados de forma simbólica, e isto, porque esta capacidade está desconectada do significado que os alunos dão aos símbolos fraccionários (Mack, 1990). O conceito de fracção deverá se desenvolver com base o conhecimento informal das crianças e nas experiências quotidianas (Moss e Case, 1999; Mack, 1990) descentrado de um ensino das fracções numa perspectiva de adulto (Moss e Case, 1999).

Outra causa de dificuldades poderá estar relacionada com uma pouca utilização de material concreto. Bezuk (1988) defende que o material manipulativo não é suficientemente usado e é removido do processo de ensino demasiadamente cedo.

CAPÍTULO III - MÉTODO

Neste estudo pretende-se proceder à análise dos manuais de matemática do 5º ano mais utilizados em Portugal (e respectivos cadernos de exercícios), e isto, relativamente aos materiais curriculares referentes à introdução aos Números Racionais. Nesta secção iremos identificar e explicitar os instrumentos e os critérios utilizados de modo a concretizar os objectivos formulados.

O estudo envolveu duas fases distintas. Num primeiro momento propomo-nos proceder a uma análise, mais estruturada e metódica, através da aplicação da Grelha de Análise utilizada no *Project 2061*. Num segundo momento pretende-se analisar como são abordados os principais conceitos relacionados com os números racionais. Esta análise surgiu da necessidade de proceder a uma avaliação das actividades, experiências ou tarefas propostas pelos manuais de forma a responder a alguns itens da grelha. Por outro lado, e tendo em conta a especificidade do conhecimento matemático em questão, pareceu-nos interessante proceder à análise em redor de determinados conceitos considerados fundamentais para a compreensão do conceito de fracção.

Nesta secção do método são apresentados os instrumentos e os critérios que foram utilizados para ambas as fases de análise.

3.1- Amostra

Para seleccionar os manuais analisados, foi solicitado, ao Ministério da Educação, a listagem dos manuais de matemática do 5º ano do Ensino Básico mais utilizados pelas escolas em Portugal. A lista enviada mencionava cinco manuais dos quais se escolheram, aleatoriamente, três manuais.

Assim, são objecto de análise os seguintes manuais (e respectivos cadernos de exercícios): (1) Viva a Matemática! 5º (Asa Editores II, SA); (2) Matematicamente Falando 5 (Areal Editores, SA); (3) Matemática 5 (Porto Editora). Passaremos a referir-nos a estes manuais como manual nº 1, 2 e 3, respectivamente.

3.2 - Instrumento

3.2.1 – Grelha de Análise dos Manuais utilizada no *Project 2061*

Num primeiro momento, a nossa análise dos manuais será efectuada com base nos critérios da Grelha utilizada no *Project 2061*.

Esta grelha é da autoria de um grupo de investigadores que, em 1985, iniciou o *Project 2061* financiado pela *National Science Foundation*, e apoiado pela *American Association for the Advancement of Science – AAAS*.

Segundo os autores do projecto, este surge da necessidade dos professores/educadores terem de escolher qual o manual mais indicado, sendo que, para tal, é necessário um método fiável e válido para avaliar a qualidade dos materiais curriculares. Desta forma, esta grelha serve tanto para responder às necessidades das escolas face à escolha de um manual como também auxilia os professores a rever os materiais (manuais) já existentes para melhorar a sua eficácia. Os autores referem ainda que esta poderá servir de guia aos investigadores na criação de novos materiais.

A grelha contempla duas análises distintas: uma análise relativa ao conteúdo dos manuais, a nossa primeira análise, e outra, referente a determinados critérios de Ensino (*Instructional criteria*), a nossa segunda análise.

A análise de conteúdo tem por objectivo verificar se o material está alinhado com os objectivos curriculares definidos no Programa Curricular de Matemática no que diz respeito à introdução dos Números Racionais no 5º ano (a nossa primeira análise). No entanto, a simples presença desse conteúdo nos manuais não assegura que os estudantes irão aprendê-lo. Para uma aprendizagem real, os manuais terão de se focar em estratégias de ensino específicas para transmitir as ideias e as competências que os estudantes deverão adquirir (a nossa segunda análise). Esta análise providencia informação quanto ao potencial dos manuais em ajudar os alunos numa aprendizagem efectiva de conceitos e competências. Os sete critérios definidos para fazer as apreciações dos manuais são derivados da investigação sobre o processo de ensino e aprendizagem, assim como, no conhecimento prático de técnicos da educação experientes. Como, no presente estudo, a metodologia de análise dos manuais irá basear-se em parte na metodologia deste projecto, esta irá ser detalhadamente descrita.

3.2.1.1 - Análise do conteúdo dos manuais

A nossa primeira análise tem por objectivo verificar se os manuais estão alinhados com os objectivos curriculares definidos no Programa Curricular de Matemática, no que concerne a introdução dos Números Racionais no 5º ano. Pretende-se, então, verificar se determinadas ideias/conceitos e competências estão, ou não, presentes no manual.

O Project 2061 distinguiu duas análises de conteúdo: uma relativa ao conceito de números racional (“*Number Concept*”), que remete para os vários significados de fracção, e uma segunda análise que se debruça sobre competências desenvolvidas com os números racionais (“*Number Skills*”).

Segundo os autores, a análise do conteúdo dos manuais resulta não só muito importante como difícil pois é necessário perceber se o conteúdo é apresentado num nível de sofisticação apropriado para o ano de escolaridade. Para tal, é fundamental uma definição clara e objectiva do conhecimento e competências que os alunos deverão desenvolver; é necessária uma definição suficientemente específica de forma a permitir aos analistas determinar em que medida a manual cumpre os objectivos.

Os objectivos definidos no Programa Curricular de Matemática no que concerne os Números Racionais no 5º ano são: Distinguir número inteiro e número fraccionário; Comparar e ordenar números racionais representados de diversas formas; Escrever fracções equivalentes à uma fracção dada; Escrever, se possível, uma fracção decimal equivalente à uma fracção dada; Converter uma fracção decimal em numeral com vírgula. Na categoria “observações/ sugestões metodológicas” lêem-se as seguintes orientações: “O estudo das fracções deve incluir diferentes tipos de representações gráficas. Sugere-se ainda a utilização de materiais manipuláveis: sectores circulares em papel, geoplano, material Cuisenaire, calculadoras multibásico...

Verifica-se que os objectivos definidos, no actual Programa Curricular de Matemática especificamente na área referente aos Números Racionais, não são precisos na descrição do conhecimento ou das competências que se pretende que os estudantes adquiram, ou seja, estão pouco operacionalizados. Com efeito, relativamente ao conceito de fracção, o objectivo remete apenas para a distinção entre número inteiro e

número fraccionário. Esta operacionalização dos objectivos resulta claramente desadequada, pelo que se considerou a operacionalização dos objectivos propostas pelos autores da grelha: a expressão a/b tem diferentes significados: a partes de tamanho $1/b$ cada (parte/todo), a a dividir por b (quociente), a comparado com b (razão), a enquanto medida de uma quantidade relativa de b , que representa a unidade dessa quantidade (medida); uma multiplicação por a e divisão por b (operador).

Assim, considera-se que o manual contempla a maioria do conteúdo quando aborda quatro ou cinco significados; o manual contempla parcialmente o conteúdo quando aborda três significados; o manual contempla um conteúdo mínimo quando aborda dois significados ou menos. A simbologia utilizada será a seguinte:

- A maioria do conteúdo: o manual contempla quatro ou cinco significados
- Conteúdo parcial: o manual contempla três significados
- Conteúdo mínimo: o manual contempla dois ou menos significados

Para proceder à análise de conteúdo que se debruça sobre as competências desenvolvidas com os números racionais irá ter-se em conta os objectivos definidos pelo Programa Curricular, i.e., Comparar e ordenar números racionais; Escrever fracções equivalentes à uma fracção dada.

No entanto, verificamos, uma vez mais, que estes objectivos estão pouco operacionalizados, em particular no que diz respeito à comparação de fracções que poderá se aplicar a diferentes situações. Como refere Nunes e Bryant (2009) existem três situações relativamente à comparação e ordenação de fracções: (1) com denominador igual e numerador diferente ($2/4 < 3/4$); (2) com numerador igual e denominador diferente ($3/2 < 3/4$); e (3) quando ambos variam.

Assim, considera-se que o manual contempla a maioria do conteúdo quando aborda as quatro competências: equivalência e as três situações relativamente à comparação e ordenação de fracções. Considera-se que o manual contempla parcialmente o conteúdo quando aborda três das quatro competências; e que o manual contempla um conteúdo mínimo quando propõe situações que remetem para duas, ou menos, das competências exigidas. A simbologia utilizada será a seguinte:

- A maioria do conteúdo: o manual aborda as quatro competências
- Conteúdo parcial: o manual aborda três competências
- Conteúdo mínimo: o manual aborda duas competências, ou menos

Optou-se nesta análise por não abordar as fracções decimais por duas ordens de razões: (1) a literatura sugere que o trabalho/compreensão das fracções decimais requerem uma boa conceptualização dos números decimais e uma abordagem metodológica própria (Brissiaud, 1998; Brousseau, 1981); e (2) segundo os autores da grelha, se o leque de objectivos é muito grande, deverá ser seleccionada uma amostra representativa destes, com a finalidade de análise. Por outro lado, parece consensual na literatura, que é necessário um longo trabalho no sentido de desenvolver uma compreensão conceptual do conceito antes de iniciar a efectuar operações com as fracções. O nosso objectivo é analisar como se introduzem conceitos antes dos algoritmos; pelo que não será avaliada a forma como são abordadas as quatro operações com números racionais.

3.2.1.2 - Critérios de Ensino

Os autores da grelha referem que esta análise providencia informação quanto ao potencial dos manuais em ajudar os alunos numa aprendizagem efectiva de conceitos e competências, ou seja, remete para estratégias de ensino específicas utilizadas para ensinar ideias e competências.

A tradução dos critérios e itens de avaliação da Grelha foi realizada anteriormente por Silvestre (2008).

A Grelha original é constituída por sete critérios. Tendo em conta que o último critério remetia para a caracterização do ambiente da sala-de-aula de Matemática, e à semelhança do estudo anteriormente referido, este critério foi retirado. Assim sendo, a nossa análise irá se debruçar em redor das seis categorias. São elas:

- Identificação de um sentido de objectivo

Este critério inclui itens que indicam se o manual se esforça para que os objectivos sejam claros e significativos para o aluno, e se relaciona as aulas com o objectivo da unidade.

- Construção de conhecimento a partir das ideias matemáticas dos alunos

Este critério analisa se o manual contém sugestões específicas para a identificação das ideias dos alunos. Promover uma melhor compreensão nos alunos requer que se perca algum tempo a escutar as ideias que eles já possuem, sejam concepções erradas, ou concepções que podem ser úteis como base para a aprendizagem seguinte. Esse esforço implica que os professores tenham presente quais os pré-requisitos necessários para a compreensão do que é esperado, e quais deverão ser as ideias iniciais dos alunos e, em particular, as ideias que poderão interferir com a aprendizagem da matemática.

- Mobilização dos alunos para a Matemática

Um dos grandes objectivos da Matemática é descobrir padrões e modelar ideias e relações nos termos de um simples número. Este critério verifica se o manual estimula os alunos a valorizarem o poder da Matemática, e para isso precisam de ter uma noção da variedade e complexidade das ideias e aplicações que a matemática pode explicar ou servir como modelo.

- Desenvolvimento de ideias Matemáticas

Este critério inclui itens para determinar se o manual expressa e desenvolve ideias de forma que sejam acessíveis e inteligíveis para os alunos, e se demonstra a utilidade dos conceitos e competências em contextos variados.

A literacia matemática possui um número de ideias importantes, mas abstractas – representação simbólica, padrões e relações, resumir dados. Essas ideias não são passíveis de ser imediatamente descobertas no mundo real, as próprias ideias foram sendo desenvolvidas ao longo de várias centenas de anos, como resultado de discussão e debate acerca da existência e lógica das leis matemáticas, e comprovação de teoremas. O sucesso dos alunos e, conseqüentemente, dos manuais, requer que estes consigam perceber qual a ligação entre os conceitos e competências, que vejam a Matemática como lógica e útil, e que adquiram mais competências ao utilizar a Matemática.

- Promoção do pensamento sobre a Matemática

Este critério inclui itens para verificar se o manual sugere formas de ajudar os alunos a expressarem-se, a pensar sobre as suas ideias, e reformulá-las para melhor decifram o mundo.

- Avaliação do progresso dos alunos na Matemática

A avaliação providencia informação aos alunos acerca do que é importante, e aos professores do que foi aprendido. Do mesmo modo, a avaliação fornece informação para ambos sobre os ajustamentos necessários a fazer no ensino e na instrução. Porque a avaliação é tão importante no processo de aprendizagem, deve estar de acordo com os objectivos de aprendizagem do currículo. Deste modo, este critério possui determinados itens que permitem verificar se o manual inclui avaliações que possam ser utilizadas como instrumentos diagnósticos ou formativos, que por sua vez ajudam a determinar as carências dos alunos.

Estes critérios compreendem entre 2 a 6 itens cada um, perfazendo um total de 21, que, uma vez aplicados, depois da cotação, poderão assumir a classificação de *Nenhuma, Baixa, Média* ou *Alta*. A classificação obtida varia conforme o número de indicadores preenchidos pelo manual. Ou seja, para cada item existe um conjunto de indicadores a serem preenchidos, esses indicadores podem variar entre 2 e 4. A pontuação é, então, atribuída, pelo facto do manual preencher 1, 2, 3 ou 4 dos indicadores, ou por outro lado se não preencher nenhum.

Devida à extensa descrição dos itens e da sua cotação, optou-se por colocar essa informação em Anexo [Anexo A].

3.2.2 - Análise da abordagem aos conceitos de unidade e partição assim como o conceito de equivalência e ordem

Referimos anteriormente que esta análise surgiu inicialmente da necessidade de proceder a uma avaliação das actividades e experiências propostas pelos manuais para desenvolver conceitos e procedimentos, e isto, de forma a responder a alguns itens da grelha. Com efeito, vários itens da grelha têm por objectivo verificar se os manuais propõem actividades, experiências ou tarefas diversificadas, que são apropriadas, significativas ou eficientes²¹ para introduzir, desenvolver e aplicar conceitos e

²¹ Como por exemplo: “As actividades que providenciam experiências que dão aos estudantes ligações significativas entre o conceito ou competência e o seu conhecimento” (III.2.1); “As experiências práticas são eficientes quando comparadas com outras experiências que poderiam ter sido utilizadas” (III.2.3), ou ainda, “O manual providencia exemplos apropriados ou aplicações significativas dos termos e procedimentos” (IV.2.3).

procedimentos. Responder a estes critérios implica que se proceda a uma revisão de literatura para conseguir determinar que experiências resultam mais apropriadas, significativas ou eficientes, e isto, tendo em conta a especificidade do conhecimento matemático em questão.

Por outro lado, a revisão de literatura efectuada revelou-nos que, mais importante que trabalhar subconstrutos ou conceitos “soltos”, é necessário organizar o programa de ensino-aprendizagem em redor de determinadas “grandes ideias” importantes, que fornecem âncoras e conexões entre informações e conhecimentos que têm de ser aprendidos (Baker, Simmons & Kameenui, 1994, cit. por Clarke et al., 2007). Referimos anteriormente que Carpenter, Fennema, & Romberg (1993) identificaram três elementos unificadores para as interpretações: a unidade (“*Unitizing*”); partição (“*partitioning*”) e a noção de quantidade; aos quais Lamon (1999) acrescenta o pensamento multiplicativo ou relativo. Kieren (1988) salientou a importância da ideia de equivalência (para além da partição) como sendo um mecanismo de construção do conceito (ou elemento unificador). Nunes & Bryant (2003) consideram ordem e equivalência dois invariantes centrais para o conceito de fracção.

Neste sentido, e considerando a especificidade do conhecimento matemático em questão, propomo-nos proceder a uma análise com o objectivo de perceber como se organiza o programa de ensino-aprendizagem em redor do conceito de unidade, partição, equivalência e ordenação. Tendo em conta a complexidade e amplitude do conceito de pensamento multiplicativo, optamos por não o abordar.

Através da revisão de literatura efectuada identificámos algumas experiências e situações que favorecem a compreensão dos diversos conceitos relacionados com número racional, e que serão a base para a nossa análise.

De seguida, em dois momentos distintos, passámos à descrição dos critérios que iremos utilizar para avaliar as experiências que são propostas para trabalhar os conceitos de unidade e partição, assim como de equivalência e ordenação.

3.2.2.1. Unidade e partição

A análise realizada por Stafylidou & Vosniadou (2004) permitiu-nos retirar várias ideias, nomeadamente, a importância de trabalhar (1) o conceito de unidade e (2) de fracção igual, maior ou menor que a unidade. Assim, propomo-nos analisar, em

momentos distintos, a forma como os manuais abordam e trabalham o conceito de unidade assim como o conceito de fracção imprópria e número misto.

A nossa análise relativa à forma como é trabalhado o conceito de unidade basear-se-á nos seguintes critérios:

- Reconhecemos, com Saenz-Ludlow (1995) e Steffe e Olive (1993), a importância de propor actividades que permitam a equidivisão da unidade em partes, a divisão recursiva da parte em subpartes e a reconstrução da unidade; atribuindo especial importância à divisão recursiva da parte em subpartes e a reconstrução da unidade (Lamon, 1999; Steffe e Olive, 1993). Defendemos, com os autores, que esta acção é fundamental para o desenvolvimento do significado de número racional; que fornece flexibilidade ao conceito de unidade; e que poderá ajudar o aluno a perceber a relação funcional entre o todo e as suas partes, afastando-se de uma concepção da fracção enquanto constituída por dois números independentes.

- Com Behr et al. (1992) e Lamon (1999) reconhecemos a importância de trabalhar o conceito de unidade através de actividades de medida e partição.

Por tarefa de medida entende-se as situações em que existe uma determinada quantidade que é considerada a unidade de referência e a partir da qual a situação será redefinida em termos dessa unidade (Lamon, 1993; Olive & Steffe, 1980, cit. por Wong e Evans, 2008) assim como tarefas que implicam recurso à recta numérica.

Para avaliar o tipo de actividades de partição que são propostas, recorreremos a Pothier e Sawada (1990) que identificaram cinco tipos de unidades distintas que podem ser partilhadas: a) quantidades contínuas; b) quantidades contínuas com subconjuntos separáveis; c) objectos discretos; d) Conjuntos de objectos discretos com elementos divisíveis; (e) Conjuntos discretos com subconjuntos separáveis.

Tendo em conta as considerações de Nunes e Bryant (2009) atribuímos especial importância às situações de divisão, i.e., quando existem dois domínios de medida.

A nossa análise relativa à forma como é trabalhada a ideia de fracção igual e superior à unidade e os números mistos terá em consideração as ideias de Amato (2005) que aponta a importância de se propor, desde cedo, uma variedade de experiências e múltiplas representações para as fracções iguais à unidade (n/n) e de números mistos.

Atribuímos especial importância às situações onde o conceito de fracção imprópria parece surgir mais naturalmente, i.e., situações medida (Escolano e Gairin, 2005; Clarke et al., 2008) e divisão (Nunes e Bryant, 2009; Mamede et al., 2005; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005).

3.2.2.2. Equivalência e ordem/comparação

A nossa análise relativamente à forma como é trabalhado o conceito de equivalência terá por objectivo: (1) verificar se são introduzidas as duas ideias enunciadas por Nunes e Bryant (2009), i.e., duas quantidades fraccionárias com nomes diferentes podem ser equivalentes; e duas fracções com o mesmo nome podem representar duas quantidades diferentes; e (2) analisar o tipo de situação que é utilizada para introduzir e desenvolver o conceito, prestando especial atenção a situações de divisão (Nunes et al. 2006, 2009; Mamede et al., 2005; Monteiro, Pinto & Figueiredo, 2005) e de medida (Escolano e Gairin, 2005).

Para analisar a forma como são abordados os conceitos de ordem e comparação propomo-nos analisar quais os contextos utilizados para tal, atribuindo especial importância a situações de divisão (Nunes et Bryant, 2009) e de medida (Escolano e Gairin, 2005).

Como referimos, estes conceitos de equivalência e ordenação são fundamentais para uma boa compreensão da ideia da magnitude da fracção. Considerando as ideias de Nunes & Bryant (2009), propomo-nos ainda verificar se os manuais fomentam o desenvolvimento de raciocínios quantitativos, desenvolvendo *insights* sobre a quantidade que permitam ao aluno construir uma compreensão conceptual dos conceitos (e não só procedimental) ou se, pelo contrário, se ensinam algoritmos sem os ancorar numa compreensão de quantidades. Consideramos que um raciocínio como “quanto mais partes menor o valor” (ou seja, uma relação inversa entre o número de partes do todo e o tamanho das partes) é importante pois permite ao alunos entrar numa fase transitória do processo de aprendizagem das fracções, quando começam a encarar a Fracção enquanto “*uma Parte de um Todo*” e não mais como dois números independentes (Stafylidou e Vosniadou, 2004). Raciocínios tais como (1) “independente

do número de partes em que se dividiu a unidade, o mesmo número de pessoas e a mesma quantidade de piza resulta na mesma quantidade”; ou ainda, (2) “duas vezes mais objectos a partilhar e duas vezes mais pessoas então cada uma irá receber a mesma parte” (ou seja, uma relação directa entre quantidades) são fundamentais para a compreender que o número de partes e tamanho das partes podem-se compensar de forma proporcional (Nunes et Bryant, 2009).

CAPÍTULO QUARTO - APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Neste capítulo irão ser analisados os dados resultantes da análise efectuada aos manuais de matemática do 5º ano, especificamente aos capítulos reservados à introdução aos números racionais.

Estes dados organizam-se em dois momentos distintos. Num primeiro momento apresentamos os dados resultantes da aplicação da Grelha de Avaliação, que como vimos, contempla uma análise do conteúdo relativo ao conceito de número racional e às competências com números racionais (a nossa primeira análise) e outra referente a critérios de ensino (a nossa segunda análise). Num segundo momento, apresentamos os dados resultantes da análise à abordagem aos conceitos de unidade e partição assim como de equivalência e ordem nos diferentes manuais (a nossa terceira análise).

4.1. Grelha de análise

Como anteriormente foi referido no capítulo reservado ao método, foi aplicada a Grelha de Análise traduzida e adaptada do *Project 2061, Middle Grades Mathematics Textbooks*. De seguida, são apresentados os dados relativos a essa análise para os três manuais seleccionados, e isto, em dois momentos distintos: os dados da análise relativa ao conteúdo dos manuais e outra relativa aos critérios de ensino.

A Tabela 1 mostra-nos se os manuais apresentam as diferentes ideias e competências identificadas. Essa análise de conteúdo refere-se (1) ao conceito de número racional; e (2) às competências com os números racionais.

Resultado da análise realizada aos três manuais com base nos seis critérios de ensino já enunciados, apresentamos a Tabela 2 que ilustra as pontuações obtidas em cada item (Nenhuma, Baixa, Média e Alta). A Figura 3 ilustra o número de itens que obteve a pontuação Nenhuma, Baixa, Média ou Alta, e isto, por manual.

A Tabela 3 mostra-nos a média das pontuações obtida em cada critério, sendo que a pontuação mínima é de 0 pontos e a pontuação máxima a atingir é de três pontos (numa escala de 0 a 3). Estes dados permitem-nos verificar quais as áreas que de um modo geral necessitam de mais atenção de acordo com os critérios do *Project 2061*.

4.1.1 – Análise de conteúdo dos manuais

Tabela 1

Resultados da análise de conteúdo relativos ao conceito de número racional e às competências com número racional nos três manuais

	1	2	3
Conteúdo – Conceito de número fraccionário	○	●	○
Conteúdo – Competências com número fraccionário	●	●	●

4.1.1.1. Análise de conteúdo relativo ao conceito de número racional

O objectivo desta análise é verificar se o manual introduz as diferentes interpretações de número racional, tendo em conta a operacionalização anteriormente identificada.

Atendendo à tabela 1, verificamos que nenhum dos manuais contempla todos os significados de fracção. O manual nº 1 e 3 abordam um conteúdo parcial (significado parte/todo, quociente, operador) e o manual 2 aborda um conteúdo mínimo (significado parte/todo e quociente). A interpretação operador está presente nos manuais nº 1 e 3. O construto medida é claramente o mais descurado: está presente nos três manuais apenas através de alguns exercícios, sem nunca ser dada uma definição formal desta interpretação. O subconstruto razão não é introduzido em nenhum dos manuais analisados.

Passamos a uma descrição mais pormenorizada das análises efectuadas:

No **manual 1**, a definição formal de fracção introduzida na primeira lição remete simultaneamente para uma definição de fracção numa interpretação quociente e parte/todo (esta situação será comentada posteriormente por nos parecer pouco rigorosa). No entanto, a grande maioria dos exercícios e situações-problema propostos remetem para um significado operador, sem nunca ser fornecida uma definição formal da fracção nesta interpretação e uma clara distinção desta interpretação em relação às outras. Apesar desta ausência de rigor, e tendo em conta o número de situações e

exercícios em contexto operador, consideramos que este significado está presente no manual. Relativamente à interpretação medida, não é dada uma definição formal. Este significado é introduzido através de uma situação problema e dois exercícios com recurso à recta numérica em todo o capítulo destinado aos Números Racionais o que nos parece claramente insuficiente para fomentar a compreensão desta interpretação. Neste sentido, considera-se que este significado não está presente no manual. Assim sendo, considera-se que o manual se dirige a um conteúdo parcial.

Referimos que a primeira definição formal de fracção introduzida na primeira lição remetia simultaneamente para o significado parte/todo e quociente. Com efeito, verificamos que a definição coloca a ênfase no significado quociente: “*uma fracção é uma divisão em partes iguais*” e “*a fracção é uma representação do quociente exacto entre dois números inteiros*”²² (p. 34). A definição de numerador e denominador remete para: “*O numerador representa o dividendo, isto é, o número de partes consideradas. O denominador representa o divisor, isto é, o número de partes em que se divide*”. Parece-nos que esta situação é pouco rigorosa: o manual opta por introduzir a fracção na sua interpretação quociente, i.e., a fracção a/b representa a operação de dividir a por b mas recorre a uma situação em que existe uma unidade a dividida em b partes (“*um bolo dividido em sete partes*”). Também todas as representações utilizadas (círculos pré-divididos) remetem para uma interpretação parte/todo. Ora, como referimos, nas situações em que uma única quantidade (o todo) é dividido num certo número de partes b das quais que consideram algumas partes a , o símbolo a/b representa esta quantidade em termos de uma relação parte-todo. Por outro lado, introduzir a fracção no seu significado divisão implica que se introduza a ideia de que existem duas quantidades, ou medidas, a e b ; a representa o dividendo e b o divisor, obtendo-se uma única quantidade a/b com a operação de divisão (neste caso concreto seria bolo(s) e o número de crianças). Também se verifica que a definição proposta para numerador e para denominador remete simultânea e indiferenciadamente para uma interpretação quociente e parte/todo: temos “*o numerador que representa o dividendo*” (interpretação quociente), “*i.e. o número de partes consideradas*” (interpretação parte/todo) e temos o denominador que “*representa o divisor*” (interpretação quociente), “*isto é, o número de*

²² Dando a seguinte exemplo: “ $1:7 = 0,142857142\dots$. Desta forma, não é possível escrever o quociente exacto de 1 por 7. A utilização de fracções permite ultrapassar este problema” (p. 34).

partes em que se divide” (interpretação parte/todo). Referir-se ao “*número de partes consideradas*” e ao “*número de partes em que se divide*” remete para uma situação de representação da quantidade em termos de uma relação parte-todo e não de quociente. Uma última observação relativamente à definição do denominador que “*representa o divisor, isto é, o número de partes em que se divide*”. Aqui é legítimo perguntar o que se divide? A unidade? Se é a unidade, estamos num contexto parte/todo. Relativamente à definição de numerador que representa “*o número de partes consideradas*”, podemos colocar a mesma questão: o número de partes do quê? Depreende-se que seja o número de partes da unidade; o que nos remete para um contexto parte/todo.

Se a ideia é introduzir a fracção num contexto parte/todo, então resulta fundamental colocar a ênfase na ideia de unidade; conceito esse que é essencial para compreender a fracção enquanto quantidade definida pelos termos da fracção, que se encontra directamente relacionada com a relação que existem entre fracção e a unidade.

Esta situação de indiferenciação destas duas interpretações distintas da fracção mantém-se ao longo do capítulo: no final do manual, na secção “Agora Já sabes” encontramos a seguinte ilustração de fracção: “*3/4 é a fracção que representa a parte colorida da figura*” (p.48). Também na secção “Resumo” do caderno de actividades encontramos a definição: “*a fracção é uma divisão em partes iguais em que o numerador representa o número de partes consideradas e o denominador representa o número de partes em que a unidade está dividida*” (p.48). Ambas remetem claramente para uma situação parte/todo.

Neste sentido, parece-nos fundamental diferenciar claramente estas duas interpretações para ajudar os alunos a compreenderem que a fracção tem diferentes significados.

No **manual 2**, a definição de fracção dada na primeira lição remete para uma interpretação parte/todo: “*a fracção representa uma parte de um todo (a unidade), ou seja, é uma divisão em partes iguais. O denominador indica o número de partes iguais em que se dividiu a unidade. O numerador indica quantas dessas partes se consideram*” (p. 60). Logo a seguir, na mesma página, encontramos uma definição do significado quociente que é introduzido da seguinte forma: “*O numerador é o dividendo e o denominador é o divisor (...). O traço de fracção representa a operação da divisão. A fracção é a forma de representar o quociente de uma maneira exacta*” (p. 60). Esta situação permite a discussão da interpretação da simbologia fraccionária num contexto

divisão. No entanto, parece-nos que teria resultado interessante, não só distinguir as duas interpretações, como também guiar os alunos numa compreensão contextualizada deste símbolo que pode ser interpretado como 1 barra de chocolate que é dividida por 3 crianças, por exemplo.

Considerando todo o capítulo, verifica-se que o manual remete unicamente para o subconstruto parte/todo. Apenas um exercício é proposto com recurso à recta numérica sem ser fornecida nenhuma definição formal desta interpretação; pelo que consideramos que esta interpretação não se encontra presente no manual. Assim sendo, consideramos o conteúdo mínimo.

No **manual 3**, as várias definições de fracção remetem para: (1) a interpretação quociente (p. 48); (2) a fracção enquanto parte de um todo (p. 52); (3) a fracção operador, introduzida como “*fracção de uma quantidade*” (p. 66). Os autores do manual optaram por abordar estas diferentes interpretações em lições distintas. A interpretação medida é abordada apenas através de poucos exercícios, não sendo dada uma definição formal e clara. Consideramos que esta interpretação não está presente no manual. Assim sendo, consideramos que o manual se dirige a três interpretações (conteúdo parcial).

Esta análise mais pormenorizada permite-nos apresentar as justificações da nossa avaliação e salientar alguns aspectos que nos pareceram pertinentes. Em geral, constatamos que todos os manuais focam-se muito na interpretação parte/todo e, no caso do manual nº 1, na interpretação operador. Apenas o manual nº 3 aborda separadamente as várias interpretações de fracção. O manual nº 1 apresenta pouco rigor na definição que é fornecida para o conceito de fracção.

Por outro lado, não queremos deixar de acentuar que todas as situações-problemas que remetem para a interpretação de fracção enquanto quociente entre dois números inteiros têm apenas por objectivo conduzir os alunos a exercitarem o algoritmo da divisão. Nenhuma tarefa permite que os alunos desenvolvam o sentido de número racional iniciado no ciclo anterior, aprofundando o significado de fracção como quociente exacto entre dois números inteiros em contexto de partilha equitativa em que o numerador a representa o número de *coisas* a serem partilhadas e o denominador b o número de elementos por quem se partilha. Neste sentido, as situações e exercícios propostos parecem-nos claramente insuficientes para promover a compreensão de um número racional como quociente. Uma última consideração: nos três manuais a

introdução do conceito é feita através de situações estáticas, em variável contínua com representação icónica, recorrendo a figuras geométricas planas apresentadas divididas em partes iguais.

4.1.1.2. Análise de conteúdo relativo às competências com o número racional

Os três manuais analisados introduzem o conceito de equivalência e consideram as três diferentes situações relativamente à comparação e ordenação de fracções. Neste sentido, consideramos que os manuais contemplam a maioria do conteúdo relativamente ao desenvolvimento de competências.

4.1.2 – Critérios de Ensino (*Instructional Criteria*)

Tabela 2 - Resultados da análise referente aos critérios de ensino nos três manuais

	1	2	3
Categorias/ Itens para Análise (Instructional Categories)			
I. Identificação de um sentido de objectivo			
I.1. Indica o objectivo da Unidade	Nenhuma 0	Média 2	Nenhuma 0
I.2. Indica o objectivo da lição/aula	Baixa 1	Média 2	Baixa 1
I.3. Justifica a sequência de actividades	Nenhuma 0	Média 2	Média 2
II. Construção de conhecimento a partir de ideias matemáticas dos alunos			
II.1. Especifica pré-requisitos	Nenhuma 0	Média 2	Baixa 1
II.2. Alerta os professores para possíveis ideias dos estudantes	Nenhuma 0	Nenhuma 0	Nenhuma 0
II.3. Apoiar os professores na identificação de ideias	Nenhuma 0	Nenhuma 0	Nenhuma 0
II.4. Dirige-se a concepções erradas	Nenhuma 0	Nenhuma 0	Nenhuma 0
III. Mobilização dos alunos para Matemática			
III.1. Providencia contextos variados	Nenhuma 0	Média 2	Nenhuma 0
III.2. Providencia novas experiências	Baixa 1	Média 2	Alta 3
IV. Desenvolvimento de ideias matemáticas			
IV.1. Justifica a importância do Programa Curricular	Nenhuma 0	Nenhuma 0	Nenhuma 0
IV.2. Introduce termos e procedimentos	Baixa 1	Média 2	Alta 3
IV.3. Expõe as ideias de forma adequada	Média 2	Média 2	Média 2
IV.4. Relaciona as ideias do Programa	Nenhuma 0	Baixa 1	Baixa 1
IV.5. Demonstra/Modela procedimentos	Alta 3	Alta 3	Alta 3
IV.6. Promove a prática	Baixa 1	Baixa 1	Baixa 1
V. Promoção do pensamento sobre a Matemática			
V.1. Encoraja os estudantes a explicar o seu raciocínio	Nenhuma 0	Nenhuma 0	Baixa 1
V.2. Guia a Interpretação e o Raciocínio	Nenhuma 0	Média 2	Nenhuma 0
V.3. Encoraja os estudantes a pensar sobre o que aprenderam	Nenhuma 0	Nenhuma 0	Nenhuma 0
VI. Avaliação do progresso dos alunos na Matemática			
VI.1. Alinha a avaliação com o Programa	Alta 3	Nenhuma 0	Nenhuma 0
VI.2. Avalia através de aplicações	Nenhuma 0	Nenhuma 0	Nenhuma 0
VI.3. Incorpora a avaliação na apresentação dos temas	Nenhuma 0	Nenhuma 0	Nenhuma 0

Figura 2. Gráfico com o número de itens e a sua respectiva pontuação obtidos na análise dos manuais

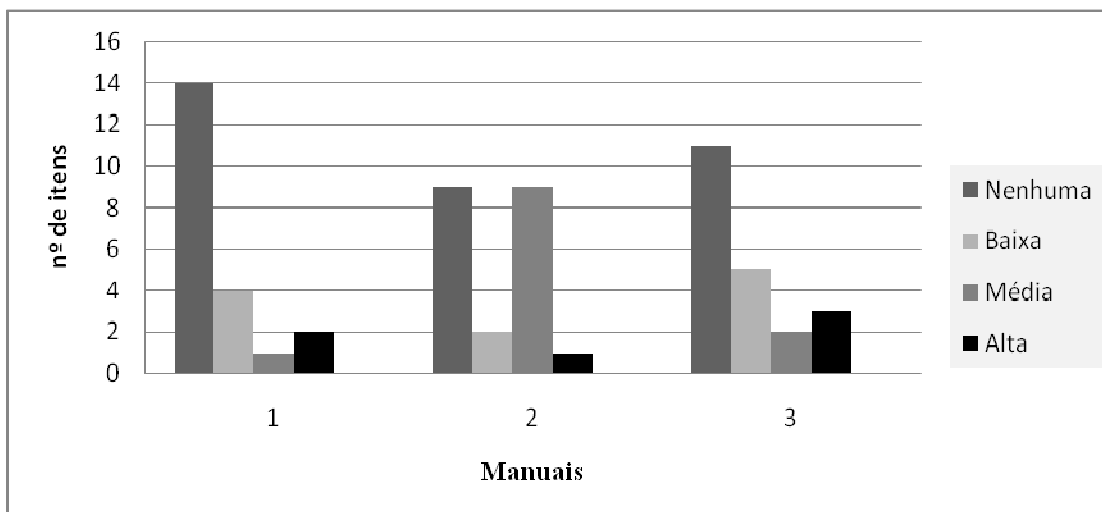


Tabela 3

Média das pontuações em cada critério (máximo 3 pontos).

Critérios de Análise	Média das pontuações Manual 1	Média das pontuações Manual 2	Média das pontuações Manual 3	Média das pontuações dos 3 manuais
I. Identificação de um sentido de objectivo	0,33	2	1	1,11
II. Construção de conhecimento a partir de ideias matemáticas dos alunos	0	0,5	0,25	0,25
III. Mobilização dos alunos para a Matemática	0,5	2	1,5	1,33
IV. Desenvolvimento de ideias Matemáticas	1,17	1,5	1,65	1,44
V. Promoção do pensamento sobre a Matemática	0	0,7	0,33	0,33
VI. Avaliação do progresso dos alunos na Matemática	1	0	0	0,33

Se atendermos às tabelas 1 e 2 bem como à figura 3, constataremos que, no **manual nº 1**, a 14 dos 21 itens (67%) não foi atribuída qualquer pontuação; a pontuação baixa foi atribuída a 4 itens (19%); apenas uma vez foi atribuída a pontuação média (5%) e duas vezes a pontuação alta (10%). Em geral, no manual nº 1, verifica-se que 86% dos itens obtiveram uma pontuação nula ou baixa e apenas 15% dos itens obteve a pontuação média ou elevada. Uma análise por categorias revela-nos que este manual obteve uma pontuação nula ou quase nula em quatro das seis categorias definidas pelos autores do projecto, e as restantes duas categorias obtiveram pontuações baixas.

O **manual n° 2** difere substancialmente: 9 itens (43%) não obtiveram qualquer pontuação, 2 itens (10%) obtiveram uma pontuação baixa, 9 itens (43%) obtiveram uma pontuação média, e 1 item obteve uma pontuação alta (5%). Dos três manuais analisados, verificamos que este é o manual com a menor quantidade de itens aos quais não foi atribuída nenhuma pontuação (e o único cuja percentagem é inferior 50%) e com maior quantidade de itens aos quais foi atribuída uma pontuação média. No total, 53% dos itens obtiveram uma pontuação nula ou baixa e 48% dos itens obteve uma pontuação média ou elevada. Uma análise por categorias/áreas revela-nos que o manual n° 2 obteve uma pontuação nula ou quase nula em três das seis categorias definidas pelos autores do projecto; duas categorias obtiveram uma média de pontuação de 1,5 e uma categoria obteve uma pontuação média (2 pontos, na categoria I).

Relativamente ao **manual n° 3**, constatamos que 11 itens (52%) não obtiveram qualquer pontuação; a pontuação baixa foi atribuída a 5 itens (24%); a pontuação média foi atribuída a 2 itens (10%); e a pontuação elevada foi atribuída a 3 itens (14%). No total, verifica-se que não se atribuiu qualquer pontuação a mais de metade dos itens; 76% dos itens obtiveram uma pontuação nula ou baixa e que 24% dos itens obtiveram uma pontuação média ou elevada. Uma análise por categorias/áreas revela-nos que este manual obteve uma pontuação nula ou quase nula em três das seis categorias definidas pelos autores do projecto; e as restantes três categorias obtiveram uma média de pontuação que varia entre 1 e 1,65 (mais precisamente uma categoria obteve uma pontuação média de 1; outra 1,5 e 1,65).

Esta análise demonstra-nos que, em geral, e tendo em conta os critérios definidos pelo *Project 2061*, os nossos manuais obtêm pontuações baixas ou nulas na maioria dos itens (o manual n° 1 obteve pontuações baixas ou nulas em 86% dos itens; no manual n° 2 a percentagem é de 53%; e de 76% no caso do manual n° 3) e poucos itens obtiveram a pontuação elevada (respectivamente 10%, 5% e 14%).

Atendemos agora às tabelas 1 e 2. Pretendemos, desta forma, concluir quais às áreas nas quais os nossos manuais demonstram maiores qualidades ou lacunas, de acordo com os critérios da Grelha utilizada.

Relativamente à categoria **“Identificação de um sentido de objectivo”**, observa-se que, em média, os manuais obtiveram uma pontuação baixa (1,11 numa escala de 0 a 3). Esta pontuação baixa deve-se sobretudo ao facto de os manuais - excepto o manual 2 - não transmitirem um objectivo global para o estudo dos números racionais de forma clara, compreensível e motivante para os alunos, dando-lhes a oportunidade de discutirem e pensarem sobre o objectivo geral de trabalhar com os números racionais. Em todos os manuais, as unidades destinadas aos números racionais encontram-se seccionadas por lições individuais, sem se incentivar a compreensão ou explicação de como cada lição se relaciona com as restantes. Nenhum manual analisado direcciona o aluno a pensar sobre o que aprendeu e sobre o que precisam aprender/fazer a seguir.

No que diz respeito ao critério **“Construção de conhecimento a partir de ideias matemáticas dos alunos”**, observa-se que é a categoria com pontuações mais baixas, quase nulas (0,25 numa escala de 0 a 3). Nenhum manual torna explícito quais os pré-requisitos ou competências necessárias, e apenas um manual (o manual nº 2) atenta mencionar os pré-requisitos e relacioná-los com os conhecimentos que o aluno já possui. Todos os manuais obtiveram uma pontuação nula em 3 dos 4 itens desta categoria sendo preocupante que nenhum dos manuais alerte ou clarifique os professores sobre as ideias prévias, ideias comumente defendidas pelos alunos bem como sobre concepções erradas, ou apoie os professores na identificação destas possíveis ideias dos estudantes.

A **mobilização dos alunos para Matemática** está também ela pouco presente (1,33 numa escala de 0 a 3), ainda que tenha sido uma das categorias que obteve a pontuação mais elevada. Em geral, verificou-se que os manuais introduzem os conceitos apoiando-se numa situação única. Ainda que as situações propostas permitam ligações significativas entre o conceito ou competências e o seu conhecimento, estas situações revelam-se, frequentemente, inapropriadas em número e nem sempre são as mais eficientes (estas questões serão desenvolvidas no ponto 4.2.). É evidente a escassez de variedade de experiências, actividades e situações-problema que permitam uma real compreensão dos vários conceitos. Por outro lado, e à excepção do manual 2 (que propõe duas actividades com material manipulativo), nenhuma actividade implica o

recurso a material, o que se revela claramente insuficiente não só tendo em conta a temática em questão como também as sugestões curriculares.

Desenvolvimento de ideias Matemáticas é o critério que obteve a pontuação mais elevada. Todos manuais introduzem o vocabulário matemático ou procedimento em conjunto com uma ou várias situações. Verifica-se que uma das lacunas dos manuais é precisamente limitar o número de experiências propostas para introduzir conceitos e procedimentos, no entanto, propõem demonstrações e modelações adequadas desses procedimentos. Na maioria das vezes, os manuais propõem apenas uma situação (expositiva) para introduzir os conceitos. Ainda que a exposição das ideias seja, em geral, realizada de forma clara e compreensível verifica-se pouca variedade, providenciam-se poucos exemplos e aplicações significativas de conceitos, termos e procedimentos.

Relativamente às representações dos conceitos constatou-se que todos os manuais recorrem quase exclusivamente a figuras geométricas pré-divididas (geralmente círculos), ou seja, as representações dos conceitos remetem para uma interpretação da fracção enquanto parte de um todo. Ainda que este tipo de representação possa resultar compreensível para os alunos, é alarmante a ausência de variedade de representações.

Também o item que remete para a promoção da prática obteve classificações baixas: as tarefas propostas para aplicação do novo conhecimento são, na sua grande maioria, exercícios descontextualizados no sentido de situação-problema; os exercícios remetem essencialmente para o cálculo e aplicação de procedimentos e abrangem pouca variedade de contextos. O tipo de exercícios propostos é sempre muito semelhante e, neste sentido, considera-se que acabam por se tornar habituais e previsíveis para os alunos. Assim sendo, consideramos que os manuais não preenchem o critério relacionado com a variedade de situações, não só para a aprendizagem, mas também para a aplicação dos conceitos.

A aplicação da grelha permitiu-nos verificar, ainda, que estes manuais apresentam muitas carências ao nível da **Promoção do pensamento matemático**, uma vez que não estimulam os alunos a expressar clarificar, justificar e interpretar as suas ideias e raciocínios, o que não promove o pensamento e reformulação das ideias desenvolvidas pelos alunos. O único manual que inclui actividades que fomentam a

expressão das ideias matemáticas (manual nº 3) não fornece *feedback* explícito acerca das possíveis ideias dos alunos, nem inclui sugestões (para alunos ou professores) sobre como utilizar as respostas dos alunos para diagnosticar erros ou dificuldades. Assim, considera-se que não preenchem satisfatoriamente este critério. Por outro lado, (e à excepção do manual nº 2), os manuais não incluem sequências de tarefas ou questões que permitam guiar/orientar o pensamento dos alunos, de forma a conduzi-los a estabelecer generalizações e compreender relações. Parece-nos que os manuais optam por uma metodologia excessivamente expositiva.

Nenhum dos manuais analisados contém questões que conduzam ou apoiem os alunos a monitorizar o seu progresso, a pensar sobre se as suas ideias se desenvolveram ou modificaram, nem dão aos alunos a oportunidade de rever as suas ideias iniciais com base naquilo que aprenderam.

No último critério avaliado, **Avaliação do progresso dos alunos na Matemática**, verifica-se uma pontuação praticamente nula em todos os itens e isto, para todos os manuais. Uma análise dos itens avaliativos propostos pelos manuais nº 1 e 2 (que contemplam uma secção própria para esse efeito, que em ambos se encontra no final da unidade) revela que a avaliação não testa o entendimento e o raciocínio matemático dos alunos, tendo antes por objectivo classificar o conhecimento; estas avaliações não fornecem oportunidades ou orientação para ajudar os alunos a compreender mais profundamente as ideias do currículo. Os manuais não incluem sugestões ou orientações para os professores sobre como explorar o entendimento dos alunos relativamente às ideias do currículo; nem providenciam sugestões específicas sobre como os professores poderão utilizar a informação retirada das avaliações.

Em geral, a análise realizada aos manuais seleccionados não foi de todo positiva. Parece que nenhum dos manuais preenche os requisitos máximos para o ensino efectivo. Nenhuma das categorias se aproxima sequer do valor médio das classificações possíveis.

A categoria “Construção de conhecimento a partir de ideias matemáticas dos alunos” é a que apresenta os resultados mais baixos (sendo a média de 0,25 numa escala de 0 a 3) seguida da categoria “Promoção do pensamento” e da “Avaliação” (para

ambas as categorias a média é de 0,33). A categoria que obteve melhor classificação foi “Desenvolvimento de ideias Matemáticas” (com uma média de 1,44).

4.2 - Análise da abordagem aos diferentes conceitos de unidade e partição assim como de equivalência e ordenação, por manual.

Referimos anteriormente, no capítulo reservado ao método, que nos propomos proceder a uma análise que tem por objectivo perceber como são abordados os conceitos de unidade e partição assim como de equivalência e ordenação. Esta análise basear-se-á, sempre que possível, na revisão de literatura efectuada que nos permitiu definir algumas experiências e situações que resultam apropriadas, significativas ou eficientes para trabalhar os conceitos. No capítulo anterior, identificámos essas situações e estabelecemos os nossos critérios de análise.

De seguida são apresentados os dados relativos a essa análise para os três manuais seleccionados, e isto, em dois momentos distintos: para cada manual, iremos analisar a forma como são abordados (1) os conceitos de unidade e partição; e (2) de equivalência e ordem.

4.2.1. Manual nº 1

Conceito de unidade e partição

Verifica-se uma grande lacuna do manual relativamente ao trabalho com o conceito de unidade. As situações e exercícios propostos não reforçam este conceito. Aliás, uma referência explícita à unidade surge unicamente três vezes²³ em todo o capítulo.

Atendendo às duas primeiras lições destinadas à introdução do conceito de fracção no manual e respectivos exercícios do caderno de actividades, encontramos

²³ (1) quando é fornecida uma definição de fracção na secção “Resumo” do caderno de actividades; (2) quando é modelizado o procedimento para resolver o problema proposto com a recta numérica e (3) quando é inserida a noção de fracção igual, superior e inferior à unidade.

várias situações-problema e exercícios num contexto parte/todo, essencialmente em contexto contínuo, acompanhados de representações de figuras geométricas pré-divididas em partes iguais, todas com indicadores visuais completos. Estes exercícios podem ser resolvidos recorrendo a estratégias de dupla contagem e não salientam a ideia de unidade. Apenas quatro exercícios são proposto em contexto discreto²⁴.

Em contexto medida, apenas são propostos uma situação-problema e um exercício com a recta numérica. A situação-problema (semelhante ao exercício proposto no caderno de actividades) resulta interessante para trabalhar o conceito de unidade: solicita-se ao aluno que determine as fracções correspondentes aos pontos marcados em três rectas diferentes, onde a unidade é diferente, com pontos inferiores e superiores à unidade. No entanto, a resolução oferecida não explora a mudança de unidade ou a noção de fracção imprópria. Pelo contrário, parece-nos que promove a utilização de uma estratégia de contagem²⁵ ao sugerir que se conte o número de partes em que a unidade está dividida.

A grande maioria dos exercícios e problemas remetem para a interpretação operador. São propostos problemas como, por exemplo, calcular $2/5$ de 4000 euros, $2/3$ da área de um quadrado, ou ainda, $1/6$ de 24 km. As resoluções das situações-problema propostas remetem para a ideia de divisão do total nas partes (e não da unidade) das quais se consideram algumas²⁶. Ainda que muitos destes exercícios não se refiram a objectos discretos, consideramos que o manual propõe tarefas de partição de objectos discretos. São, contudo as únicas experiências de partição que são propostas.

A ideia de fracção n/n representar a unidade, igual a 1, e o conceito de fracção própria e imprópria só são explicitamente introduzidos na lição destinada à comparação e ordenação de números racionais (p.41), e isto, quando é sugerido um dos métodos para comparar fracções (por comparação à unidade). A ideia da unidade é introduzida unicamente num contexto parte/todo (“*Considera-se tantas partes quantas aquelas em que a unidade está dividida*”), recorrendo a círculos iguais pré-divididos, sem recurso a material manipulativo e totalmente descontextualizada. Tendo em conta a literatura, esta

²⁴ Por exemplo: escreve a fracção correspondente aos ovos partidos (com representação de uma caixa com meia dúzia de ovos)

²⁵ “*Para determinar as fracções correspondentes, deve-se contar o número de partes em que a unidade foi dividida (denominador) e o número de partes entre o zero e o ponto (numerador)*” (p. 36)

²⁶ “*Então divide-se o total em 5 partes e consideram-se duas*” (p. 36).

situação única, exclusivamente em contexto parte/todo, e sem qualquer recurso a material manipulativo para introduzir os conceitos de fracção menor, igual e superior à unidade resulta não só insuficiente para desenvolver uma compreensão destes conceitos, como também parecer ser a menos apropriada. A própria definição fornecida para o conceito de unidade não explora nem a ideia de unidade, nem a noção de quantidade: “*considerar todas as partes em que a unidade está dividida*” não transmite a ideia que a fracção representa uma quantidade relativa que depende do tamanho da unidade, que é a referência da fracção. O mesmo ocorre quando é introduzida a explicação: “*Verifica-se que a fracção representa o número 1, se o numerador é igual ao denominador*” (p. 41). O manual introduz a “regra” na sua generalidade, colocando a ênfase na ideia da fracção enquanto número. O mesmo ocorre na explicação da fracção própria²⁷ e imprópria²⁸. Nenhum problema contextualizado ou exercício é proposto no sentido de consolidar a ideia de fracção igual, superior ou inferior à unidade.

A abordagem aos números mistos é feita apenas na lição destinada à equivalência de fracções, completamente descontextualizada e separada da abordagem das fracções impróprias, e antes mesmo que se tenha explorado esta última noção. A situação utilizada para introduzir o conceito confronta o aluno com a seguinte situação: “*(...), os amigos comeram 9/4 de pizza, ou seja, comeram nove quartas partes. Então, isto significa que cada piza estava dividida em 4 partes e eles comeram 9*” (p. 39). O manual apresenta então 3 círculos divididos em 4 partes, e prossegue: “*9/4 de piza é o mesmo que 2 pizzas inteiras mais 1/4. Pode escrever-se $9/4 = 2 + 1/4$ ou $9/4 = 2 \frac{1}{4}$. Ao número $2 \frac{1}{4}$ chama-se misto fraccionário porque tem uma parte inteira (2) e uma parte fraccionária (1/4)*”. Tecemos vários comentários: (1) a situação remete para a fracção numa interpretação parte/todo que não parece ser a mais apropriada para a introdução dos números mistos; (2) introduzir a ideia de 9/4 como “nove quartos” implica que os alunos procurem a parte inteira de 9/4, sendo que as crianças são supostas elaborem o seguinte raciocínio: sempre que há 4 partes em 9 quartos faz uma unidade. Neste sentido, parece-nos que este raciocínio implica a compreensão do conceito de fracção

²⁷ “*Uma fracção representa um número menor que 1, se o numerador é menor que o denominador*” (p. 42).

²⁸ “*Consideram-se mais partes do que aquelas em que a unidade está dividida. Conclui-se que: Uma fracção representa um número maior que 1, se o numerador é maior que o denominador*” (p. 42).

imprópria ($9/4$ de piza), bem como a compreensão da fracção n/n (neste caso $4/4$) representar a unidade; conceitos esses que só são explicitamente explorados no capítulo seguinte (destinado à comparação de fracções). Parece-nos conceptualmente mais complicado (e incorrecto) introduzir o conceito de número misto antes de se trabalhar a unidade e de explorar a fracção imprópria, e em lições distintas; (3) por último, a compreensão de fracção como uma extensão do sistema dos números naturais parece beneficiar do uso de múltiplas representações da fracção igual a 1 (n/n) e dos números mistos introduzidos desde muito cedo, e acreditamos nós, ao mesmo tempo, num capítulo próprio. Três dos quatro exercícios propostos para consolidação do conceito de números mistos (10 itens no total) remetem exclusivamente para aplicação de procedimentos pedindo que se transforme em fracções os números mistos fraccionários, e isto, sem qualquer contextualização ou representação que sirva de apoio ao pensamento. Um exercício apresenta várias figuras geométricas divididas em partes iguais, solicitando que se escreva o número misto fraccionário correspondente a cada representação gráfica. Parece-nos que teria resultado útil contextualizar os exercícios (referindo-se a pizzas, por exemplo) e, sobretudo, definir previamente qual a unidade a considerar pois, se não for definida a unidade, é possível considerar-se que os dois rectângulos apresentados constituem a unidade, pelo que não estamos perante um número misto mas sim $11/18$ da unidade.

Assim, parece-nos que o escasso trabalho em redor do conceito de unidade, as poucas experiências de partição, a ausência de exploração da noção de magnitude relativa, a ênfase dada à fracção numa interpretação operador, em combinação com definições que colocam a ênfase em números iguais, superiores e inferiores a 1, poderá reforçar um dos obstáculos à compreensão da fracção que consiste em encará-la enquanto dois números independentes. Por outro lado, a literatura sugere que estes conceitos são fundamentais para uma compreensão do significado da fracção e deveriam ser introduzidos desde o início.

Conceito de equivalência e ordem

O conceito de equivalência de fracções é introduzido através de uma situação única, em contexto parte/todo, apoiando-se numa representação de duas barras de chocolate pré-divididas: a Helena come $1/4$ da barra de chocolate e a Luísa come $2/8$.

De seguida é introduzida a definição e procedimento²⁹ para obter fracções equivalentes. A resolução fornecida baseia-se em indicadores visuais: “*Por observação das figuras concluis que ambas comeram a mesma quantidade de chocolate. (...)*”. Esta definição de equivalência remete para ideia de fracções que representam a mesma quantidade, o que vai de encontro à sugestão de Mack (1995). Contudo, é a primeira e única vez que o manual se refere explicitamente à ideia de quantidade. A situação proposta não desenvolve raciocínios sobre quantidades que possam ajudar os alunos a compreender os procedimentos. Estamos longe de uma compreensão conceptual da quantidade no sentido de “quanto maior o número de partes, menor se torna o tamanho das peças”, por exemplo. Parece-nos que este tipo de abordagem fomenta uma excessiva dependência dos modelos desenhados e uma memorização de procedimentos. Tão pouco se ensina a regra da redução ao mesmo denominador na sua maior generalidade, i.e., “não se altera o valor de uma fracção quando se multiplica o numerador e o denominador por um mesmo número”. Todos os exercícios propostos no sentido de consolidar o conhecimento são semelhantes e remetem para a aplicação de “algoritmos” (ex: escreve fracções equivalentes a ...; torna irredutível as fracções). Por outro lado, e tendo em conta a ênfase colocada na fracção numa interpretação operador, teria sido interessante recorrer novamente a esta situação para trabalhar o conceito de equivalência.

Também o conceito de ordem (e comparação) é introduzido exclusivamente num contexto parte/todo, sem recurso a material manipulativo, apoiando-se apenas em duas representações: um jardim plantado com $\frac{3}{4}$ ou $\frac{1}{4}$ de túlipas, e um queijo partilhado em $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. O manual introduz de imediato a “resolução” das situações colocadas sem levar o aluno a apreender/pensar sobre o fenómeno³⁰, estimulando-o a basear o seu raciocínio em indicadores visuais e não em *insight* relativamente à quantidade. Seguem-se as definições: “*duas fracções com o mesmo denominador, representa um maior número a que tem maior numerador*” e “*(...) com o mesmo numerador representa um número maior a que tem menor denominador*” (p. 40). Uma vez mais coloca-se a ênfase na fracção enquanto número. Relativamente à terceira ideia (quando numerador e denominador diferem), o manual não propõe nenhuma situação, experiência ou representação que a contextualize: introduz apenas a questão: “*E se as fracções não têm*

²⁹ “*Para obter uma fracção equivalente a outra, multiplica-se ou divide-se ambos os termos da fracção pelo mesmo número diferente de zero – Princípio de equivalência de fracções*” (p. 38).

³⁰ “*Claro que $\frac{3}{4}$ é maior que $\frac{1}{4}$* ” ou ainda “*Facilmente concluis que metade é maior que a quarta parte*” (p. 40)

numerador nem denominador igual? É maior 7/5 ou 5/3?”. Recorde-se que esta situação é introduzida antes de se ter promovido uma compreensão da fracção imprópria (que, no manual, só é abordada a seguir). De imediato, o manual propõe 3 “métodos possíveis” para resolução destas situações: transformar as fracções em fracções equivalentes com mesmo denominador; proceder à divisão do numerador pelo denominador e comparar os resultados obtidos; e comparar a fracção com a unidade. Salientámos, na revisão de literatura, que esta estratégia parece ser usadas apenas pelos alunos que dispõem de uma compreensão conceptual do tamanho das fracções, que ainda não foi verdadeiramente desenvolvida. Muitos dos exercícios propostos remetem exclusivamente para a aplicação de procedimentos de resolução.

Em geral, denota-se: (1) uma variedade muito reduzida de experiências para introduzir os conceitos e procedimentos; (2) muito poucas experiências de partição; (3) os conceitos de equivalência e ordem são trabalhados unicamente em contexto parte/todo; (4) muitos exercícios e poucas situações-problemas; (3) uma ênfase nos procedimentos sem desenvolver muitos raciocínios sobre quantidades; (5) uma ênfase colocada na fracção enquanto número; (5) a ausência de situações e exercícios que permitam uma real compreensão da ideia de dimensão absoluta e relativa dos números racionais.

4.2.2. Manual Nº 2: Matematicamente Falando

Unidade e Partição

A primeira actividade³¹ proposta resulta muito interessante para introduzir, desde o início, um objectivo global para o estudo dos números racionais: introduz a ideia de partes iguais (sendo este um pré-requisito para trabalhar com fracções); introduz a interpretação parte-todo; a segunda pergunta introduz informalmente a soma

³¹ O problema apresentado consiste numa situação de partilha de 1 piza entre 4 amigos; situação essa que vem acompanhada da representação de uma piza já pré-dividida.

É solicitado aos alunos que determinem que porção de piza comeu cada amigo.

De seguida é introduzida a ideia do Miguel comer mais uma fatia; sendo pedido que porção de piza comeu o Miguel ao todo? Que porção de piza sobrou?

Uma última situação é apresentada: “Se tivéssemos uma pizza com metade do tamanho desta dividida em 5 partes, que fracção teria comido cada um dos amigos? Será que as fatias seriam iguais às anteriores?”

de fracções; a terceira pergunta introduz a ideia de todo ou unidade ao sugerir que as crianças comeram 5 fatias, pelo que comeram a piza toda (não sobrando partes); e a 4ª pergunta remete para a noção quantitativa do número racional, de percepção do tamanho relativo dos números racionais, que nos remete desde já para o conceito de unidade.

Nas lições destinadas à introdução do conceito de fracção (e respectivos exercícios do caderno de actividades), a grande maioria dos exercícios propostos remetem para a interpretação parte/todo, em contexto contínuo e discreto. Apenas contabilizámos um exercício em contexto de medida com recurso à recta numérica solicitando que sejam assinalados os valores 1,5; 2,5; $1/2$; 2; $3/4$.

Tendo em conta os cinco tipos de unidades distintas que podem ser partilhadas verificamos que apenas são propostos dois exercícios de partilha de objectos discretos, como, por exemplo, “pinta um quarto de maçãs de vermelho”, sendo que a unidade é constituída por 16 maçãs. A resolução deste tipo de exercícios implica que se determine primeiro a unidade (neste caso que se determine que a unidade é constituída por 16 maçãs); que se proceda a uma decomposição da unidade de forma a obter 4 unidades e se perceba que cada parte representa $1/4$. Neste sentido, as actividades permitem desenvolver uma abordagem flexível ao *unitizing*, e, por implicarem múltiplas composições da unidade, poderão contribuir ao pensamento multiplicativo.

Apesar da pouca variedade das situações propostas, verifica-se a preocupação dos autores em colocar constantemente a ênfase na ideia da unidade ao longo do capítulo destinado aos números racionais: na definição de fracção, e em praticamente todos as situações-problema propostas no manual, é inicialmente definida qual a unidade³².

Também a actividade de descoberta proposta para tratar a equivalência de fracções permite trabalhar o conceito de unidade: a actividade pressupõe o recurso a material manipulativo: é sugerindo que o aluno desenhe 7 círculos³³, divididos em número de partes diferentes (em 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12), sendo solicitado que “represente metade da unidade” e “um terço da unidade” (p. 62) recorrendo às peças de diferente

³² Por exemplo: “considerando o círculo como unidade, ...”.

³³ Resulta, no entanto, pouco provável que seja dada a oportunidade aos alunos, na sala de aula, de procederem por si próprios à construção dos círculos - ao contrário do que é sugerido pela literatura - pois o manual propõe os círculos já pré-recortados e pré-divididos (em cartolina).

tamanho. Esta actividade requer a acção de equidivisão da unidade em partes e a divisão recursiva da parte em subpartes. Como referimos esta acção é fundamental para o desenvolvimento do significado de número racional. No entanto, é de lamentar que não sejam propostas actividades que impliquem a reconstrução da unidade, i.e., a capacidade de operar sobre a relação parte-todo.

À semelhança do manual anteriormente analisado, verifica-se que ideia da fracção n/n representar a unidade igual a 1, e de fracção imprópria é introduzida apenas no capítulo destinado à comparação de fracções (introduzindo o método de comparar as fracções à unidade quando numerador e denominador diferem). A actividade de descoberta proposta remete exclusivamente para a interpretação parte/todo em contexto contínuo: apresentam-se dois círculos divididos em quartos, sendo solicitado que, considerando como unidade o círculo, o aluno descubra: (1) que fracção representa 3 peças amarelas, 5 peças amarelas e 4 peças amarelas; (2) que descubra quantas peças amarelas são necessárias para formar 1 unidade; (3) que as ordene e que as compare com a unidade (simbolizada por 1). A explicitação coloca a ênfase na unidade³⁴. Ainda que esta abordagem inicial ao conceito de unidade seja adequada enquanto actividade de descoberta, uma situação única, em contexto parte/todo para a introduzir tardiamente o conceito de fracção imprópria resulta insuficiente como também pouco eficiente para desenvolver uma real compreensão: a literatura demonstra que os alunos têm dificuldades em compreender o conceito de fracção imprópria nestas situações, e que a ênfase colocada sistematicamente na interpretação de fracção enquanto “partes da unidade” reforça a ideia da fracção representar sempre uma quantidade inferior à unidade. Apenas dois exercícios são dirigidos a aplicação deste conhecimento (exercício 10 e 11, p. 60 do caderno de actividades).

O conceito de números mistos surge apenas no capítulo destinado à adição e subtracção de fracções, numa “chamada de texto” denominada “*sabias que...?*” definidos como representação da soma de um número inteiro com números fraccionários.

³⁴ “*Se o numerador é igual ao denominador, a fracção é igual à unidade; Se o numerador é menor que o denominador, a fracção é menor que a unidade; Se o numerador é maior que o denominador, a fracção é maior que a unidade*” (p. 67).

Equivalência e ordem

A abordagem ao conceito de equivalência é feita unicamente através de uma actividade de descoberta referida anteriormente. Ainda que adequada parece-nos insuficiente. Segue-se a definição de equivalência (“*São fracções equivalentes as que representam a mesma parte da unidade*”, p. 63) baseando-se na representação de três círculos pré-divididos em 2, 4, e 8 partes. Esta definição reforça a ideia de parte da unidade; não introduz a ideia de quantidade nem a noção que duas fracções com o mesmo nome podem representar duas quantidades diferentes. Introduce-se o procedimento para obter fracções equivalentes³⁵ e a definição de fracção irredutível, sem estimular uma compreensão conceptual sobre as quantidades que permita aos alunos perceber as razões pelas quais o procedimento funciona. Apenas são propostos exercícios para aplicação do conhecimento, nenhuma situação-problema. Contabilizaram-se cerca de 23 exercícios no total, 7 no manual e 16 no caderno de actividades, todos em contexto parte-todo. Destes, três exercícios consistem na apresentação de diagramas iguais mas divididos em número de partes diferentes. Estas tarefas resultam relativamente fáceis pois é possível resolver a tarefa por comparação perceptiva. Os outros exercícios propostos têm por objectivo a aplicação dos procedimentos ensinados como, por exemplo, completar as igualdades ($\frac{1}{4} = \frac{3}{\dots}$); encontrar fracções equivalentes; concluir a equivalência recorrendo ao algoritmo da divisão dos quocientes.

Relativamente à ordenação e comparação de fracções, as actividades de descoberta, que pressupõe o recurso aos círculos anteriormente referidos, consiste na ordenação das peças de cada cor ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{10}$) por ordem crescente de tamanho e que se complete a sequência (...<...<...<...<...). São colocadas questões com o intuito de levar o aluno a depreender/pensar sobre o fenómeno³⁶. Na mesma lógica, é solicitado que comparem fracções com denominadores iguais e numeradores diferentes. Estas actividades possibilitam a descoberta e percepção da noção de ordem de fracções mas, provavelmente, serão insuficientes. Na página seguinte introduz-se a “regra”: “*Se duas fracções têm o mesmo numerador, é maior a que tiver menor*

³⁵ “*Para obtermos fracções equivalentes, multiplicamos ou dividimos ambos os termos da fracção pelo mesmo número diferente de zero*” (p. 63).

³⁶ “*Qual é o numerador de cada uma das fracções? Qual é o denominador de cada uma das fracções? Se duas fracções têm o mesmo numerador, é maior ou menor a que tiver maior denominador?*” (p. 64)

denominador” e “*Se duas fracções têm o mesmo denominador, é maior a que tiver maior denominador*”. Relativamente à terceira ideia (quando numerador e com denominadores diferem), o manual não propõe nenhuma situação ou representação que a contextualize. A actividade de descoberta implica o recurso aos círculos para comparar, por exemplo, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$. De seguida, introduz os três “métodos possíveis”: transformar as fracções em fracções equivalentes com mesmo denominador; proceder à divisão do numerador pelo denominador e comparar os resultados obtidos; e comparar a fracção à unidade. Os exercícios propostos para aplicação deste conhecimento (tanto no manual como no caderno de actividades) remetem essencialmente para o cálculo e aplicação de procedimentos. Apenas dois exercícios são acompanhados de suporte visual (círculos ou rectângulos pré-divididos). Curiosamente, o caderno de actividades apresenta primeiro os exercícios que se revelam ser os mais difíceis, i.e., quando numerador e denominador diferem.

Em geral, consideramos que as actividades de descoberta e exercícios propostos poderão ajudar os alunos a mover-se de compreensão da fracção enquanto dois números independentes para uma relação parte/todo. No entanto, a ênfase colocada sistematicamente na interpretação de fracção enquanto “partes da unidade”, poderá reforçar a ideia da fracção representar sempre uma quantidade inferior à unidade, sobretudo, tendo em conta a escassa exploração do conceito de fracção imprópria e de experiências de partição. Por outro lado, não é incluída nenhuma referência explícita à ideia de fracção enquanto quantidade. Ainda que se acredite que os alunos poderão desenvolver esta noção através dos exercícios propostos, a fracção e os diferentes conceitos são sempre definidos enquanto “partes da unidade” ou “números” e nunca enquanto quantidade. Aliás, é de lamentar que a noção quantitativa do número racional, nomeadamente a percepção da magnitude relativa da fracção, introduzida na primeira actividade³⁷ do capítulo não tenha sido explorada posteriormente.

³⁷ Esta actividade colocava a seguinte questão: “Se tivéssemos uma pizza com metade do tamanho desta dividida em 5 partes, que fracção teria comido cada um dos amigos? Será que as fatias seriam iguais às anteriores?”

4.2.3. – Manual nº 3

Unidade e partição

Ao longo do capítulo, o conceito de unidade é trabalhado em contextos parte/todo, quociente e medida através de uma variedade de exercícios. Na lição destinada à introdução da fracção na sua interpretação parte/todo são propostas duas situações contextualizadas: uma piza dividida em seis partes que é partilhada por três meninos; quanto comeu cada menino?; um bolo dividido em 5 partes. O Paulo comeu 3 das 5 fatias; “ $\frac{3}{5}$ significa que a unidade foi dividida em 5 e que se tomaram 3” (p. 52). A definição fornecida coloca a ênfase na unidade: “O denominador indica em quantas partes se divide a unidade e o numerador indica quantas dessas partes são consideradas”. Prossegue: “Se (e apresenta um círculo) é a unidade, (...)”. Em contexto parte/todo, e para além dos exercícios “típicos” em contexto contínuo (que consistem na apresentação de figuras geométricas regulares e irregulares solicitando que se determine a fracção correspondente parte pintada) e discreto (cerca de cinco exercícios), o manual propõe ainda cerca de nove exercícios acompanhados com figuras que incluem indicadores visuais incompletos: estas exercícios consistem em considerar as partes sombreadas numa figura cujas partes não são de tamanho igual, evitando desta forma que os alunos desenvolvem apenas estratégias de dupla contagem: para completar a tarefa deverão completar a figura procedendo a uma re-divisão da unidade para formar partes de igual. Ainda que as crianças possam ter dificuldade em ultrapassar os “distractores visuais” e lidar com as tarefas a um nível lógico-matemático, a capacidade em resolver conflitos entre o processamento de informação visual e o processamento cognitivo de relações lógico-matemáticas é vista como um indicador importante do grau de compreensão dos conceitos de número racional. Por outro lado, queremos salientar que, na primeira lição, o manual propõe situações que ajudam os alunos a compreender a importância das partes serem de igual tamanho. Também o exercício de reflexão proposto quando é abordada a fracção enquanto parte de um todo é interessante para trabalhar a unidade: o exercício requer que se determine qual a parte da figura pintada a verde assim como a parte da mesma figura pintada de amarelo, introduzindo desta forma a ideia do todo. Nos capítulos destinados à equivalência e à fracção irredutível, vários exercícios remetem para a capacidade de re-*unitizing* a unidade; estes exercícios são fundamentais para uma compreensão completa do todo ou unidade.

Em contexto medida, são propostos apenas três exercícios com recurso à recta numérica.

São propostos problemas que contemplam quatro dos cinco tipos de unidades distintas que podem ser partilhadas:

- quantidades contínuas, por exemplo, fios de um 1dm de comprimento dividido em três partes. Esta situação é utilizada para introduzir a fracção na sua interpretação quociente (p. 48). No entanto, esta é a única situação proposta.

- partição de quantidades contínuas com subconjuntos separáveis como, por exemplo, três meninos que dividem uma piza dividida em seis partes, cada 1 vai receber $\frac{2}{6}$ da piza (p. 52). Desta forma, as fracções enquanto partes de um todo são representadas de forma concreta e significativa através das actividades de partições equitativas.

- conjuntos de objectos discretos com elementos divisíveis como, por exemplo, “*Numa mesa há seis pães e sentaram-se à mesa quatro pessoas. Noutra mesa há cinco pães e sentaram-se à mesa três pessoas. Em que mesa cabe mais pão a cada pessoa?*” (p. 72 do caderno de actividades). Este é, no entanto, o único problema proposto nesta situação.

- partição de objectos discretos como, por exemplo, $\frac{3}{4}$ de oito círculos (p. 67).

O manual introduz o conceito de fracção própria, de fracção imprópria e a representação de números mistos desde o início, após a introdução dos diferentes significados da fracção o que, como referimos, resulta importante para a compreensão do conceito de fracção. A situação proposta, num contexto de partição, resulta interessante e eficiente: dois meninos pediram duas pizzas, um comeu $\frac{2}{4}$ da piza, o outro menino “*comeu uma piza inteira e os outros $\frac{2}{4}$ da outra*” (...) comeu $1+\frac{2}{4}$ ou $1\frac{2}{4}$ ou $\frac{6}{4}$ (p. 54). Ainda que esta situação única possa resultar insuficiente, parece-nos que permite que o conceito de fracção imprópria e número misto surja naturalmente promovendo também a compreensão da fracção enquanto extensão do sistema de números naturais: primeiro introduz a ideia de 1 unidade inteira mais $\frac{2}{4}$ para estender este conhecimento a “seis quartos de unidade”. A explicação é dada na sua generalidade, i.e., “ *$\frac{2}{4}$ é chamada uma fracção própria. O numerador 2 é menor que o denominador 4*” e “ *$\frac{6}{4}$ é chamada uma fracção imprópria. O numerador 6 é maior que o denominador 4*”. Os exercícios/situações para aplicação do conhecimento são vários. Salientamos os que nos parecem mais interessantes:

- definir quais as fracções impróprias e explicar porquê;

- recorre a formas geométrica (três círculos, rectângulos...) após uma contextualização da situação: “ (...) a figura representa duas pizzas e mais um quarto de piza. A figura pode ser representada pela fracção $\frac{9}{4}$ ou pelo número $2\frac{1}{4}$. Escreve duas representações para cada uma das figuras”. Esta contextualização parece-nos muito importante para compreender os “nove quartos de unidade”. Com efeito, a literatura demonstra algumas dificuldades dos alunos em perceber a fracção imprópria em contexto parte/todo ou de partição da unidade pois não compreendem de imediato como a fracção pode ser superior a si-própria. Nesta situação, primeiro introduz-se a ideia de unidade mais uma fracção dessa unidade para depois se pensar em termos de “quartos da unidade”.
- o exercício de reflexão conduz explicitamente os alunos a pensar em termos de unidades completas e a definir “*quantas unidades completas*” têm as fracções apresentadas (p. 55).
- e, por último, um exercício que solicita que os alunos reflitem sobre “*quantos quartos há em três*”. Este exercício parece-nos bastante desafiante: é necessário definir a unidade e sua partição (neste caso em quartos), para verificar quantas partes fraccionárias existem em 3 unidades inteiras.

Equivalência e Ordem

A única situação utilizada para introduzir o conceito de equivalência consiste na apresentação de barras com a mesma forma e tamanho, divididas em diferentes partes da unidade, sendo solicitado ao aluno que, por observação da figura, conclua a equivalência entre $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$. Esta tarefa apenas requer que o aluno constate a equivalência recorrendo a uma comparação perceptiva. Esta situação única em contexto parte/todo para introduzir o conceito não nos parece suficiente, nem a mais eficiente. De seguida, é introduzido a definição de fracções equivalentes³⁸ (que remete para a noção de número) e o procedimento para obter fracções equivalentes³⁹. O manual coloca a ênfase na compreensão procedimental. Relativamente às tarefas

³⁸ “ $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}$ são fracções equivalentes porque representam o mesmo número” (p. 56).

³⁹ “Multiplicando ou dividindo o numerador e o denominador pelo mesmo número diferente de zero obtém-se uma fracção equivalente a uma fracção dada” (p. 56).

propostas para aplicação deste conceito, o manual propõem apenas exercícios e nenhuma situação-problema. A maioria têm por objectivo a aplicação dos procedimentos ensinados como, por exemplo, completar as igualdades ($\frac{1}{4} = \frac{3}{\dots}$); encontrar duas ou três fracções equivalentes; escrever fracções decimais equivalentes ou em contexto parte/todo. Estes exercícios são acompanhados de figuras geométricas pré-divididas em contexto contínuo e discreto, sendo solicitado que o aluno determine uma fracção equivalente. Por exemplo, apresenta-se um quadrado dividido em 4 partes em que duas estão sombreadas e solicita-se que o aluno determine uma fracção equivalente a $\frac{2}{4}$. Estes exercícios solicitam que o aluno “unitize” a unidade. São ainda propostas tarefas semelhantes à actividade de descoberta do conceito, no entanto, neste exercício é apresentada uma tira de papel que representa a unidade e outras tiras com a mesma forma e tamanho, divididas em diferentes partes. Esta situação é mais interessante pois o todo e as partes são entidades separadas pelo que não existe confusão relativamente à unidade de referência. Nestas tarefas a quantidade fraccionária é construída a partir da relação entre o todo e as partes a serem medidas.

O conceito de fracção irredutível é introduzido na lição seguinte, com uma representação que remete também para um contexto parte/todo em contexto discreto⁴⁰. De seguida é introduzido o procedimento para obter fracções irredutíveis e a definição⁴¹. Os exercícios propostos são semelhantes aos exercícios propostos na lição destinada à equivalência. Seria interessante introduzir mais situações de descoberta diversificadas, mais problemas contextualizados, mais situações que remetam para situações de divisão e que promovam uma compreensão conceptual sobre as quantidades.

Relativamente à ordenação e comparação de fracções, o manual considera as três diferentes situações. Quanto à comparação de fracções com igual numerador e denominador diferentes são apresentadas duas situações em contexto parte/todo para introduzir o conceito: (1) uma representação de várias barras com mesmo tamanho mas divididas em diferentes partes que representam $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$, sendo solicitado que o aluno constate por observação que $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{4}$; e (2) uma situação parte/todo contextualizada com suporte visual (pizas): dois meninos sentados a uma mesa comem

⁴⁰ “Dos 24 alunos (...) seis disseram que não tinham em casa qualquer animal doméstico. Que fracção dos alunos não tem animal doméstico em casa? A Ana respondeu $\frac{6}{24}$. O Pedro respondeu $\frac{1}{4}$. Qual dos dois está certo?”

⁴¹ “Das fracções equivalentes à fracção $\frac{1}{4}$, esta é a que tem os menores termos possíveis, isto é, não pode ser simplificada. Por isso dizemos que $\frac{1}{4}$ é uma fracção irredutível” (p. 58)

1 piza dividida em 2 partes e 3 meninos comem 1 piza de igual tamanho dividida em 3 partes “*se tivesses muita fome em que mesa preferias comer?*”. O manual inclui os seguintes comentários: “a cada um cabe $\frac{1}{2}$ de piza” e “a cada um cabe $\frac{1}{3}$ de piza”. No quadro de síntese é inserida a explicação “típica” pondo ênfase na noção de número: “*Se duas fracções têm o mesmo numerador, a que representa o maior número é a que tem menor denominador*” e “*Se duas fracções têm o mesmo denominador, a que representa o maior número é a que tem maior numerador*”.

Relativamente à comparação de fracções com igual denominador e numerador diferente o manual propõe um desenho que representa uma mesa onde estão sentados 4 meninos frente a 2 pizzas e noutra mesa onde estão 4 meninos frente a 1 piza, sendo solicitado que o aluno determine “*a quem cabe mais pizza?*” sendo de imediato introduzida a solução: “ *$\frac{2}{4}$ é maior que $\frac{1}{4}$. O João come mais pizza que o Pedro*”. Teria sido interessante inserir explicitamente a ideia de duas unidades a dividir por quatro crianças.

As situações propostas resultam interessante pois fornecem um contexto em vez de se limitar a apresentar figuras geométricas. No entanto, e à semelhança dos manuais anteriores é de lamentar que não seja dado *insight* sobre as quantidades no sentido de “quanto mais partes a unidade é dividida menores as partes” ou “quanto maior o número de partes, menor se tornam o tamanho das partes.”

Relativamente à terceira situação, com numerador e denominadores diferentes, o manual propõem apenas um método de resolução, i.e., proceder à divisão do numerador pelo denominador e comparar os resultados obtidos. Nesta situação não é fornecido nenhum suporte gráfico nem nenhuma situação concreta; apenas é colocada a questão: “*Qual é maior: $\frac{3}{5}$ ou $\frac{5}{6}$?*”. No que diz respeito às propostas para aplicação do conhecimento, tanto no manual como no caderno de actividades, são propostos vários exercícios e dois problemas:

- vários exercícios de comparação e ordenação de fracções que abrangem as três ideias, sendo privilegiados os exercícios de ordenação de fracções com numerador e denominador diferentes. Oito exercícios vêm acompanhados de representações (círculos/rectângulos pré-divididos).
- são apresentados dois problemas em contexto parte/todo⁴² e um de divisão⁴³

⁴² “A Ana comeu $\frac{2}{5}$ de um chocolate e o Pedro comeu $\frac{3}{8}$ de um chocolate igual. Quem comeu mais chocolate?” (p. 72 do caderno de actividades).

- dois exercícios com a recta numérica sendo solicitado que sejam ordenadas as fracções na recta.

Em geral, e ainda que o manual ofereça diferentes contexto/situações para introduzir e trabalhar os conceitos, verifica-se uma predominância do contexto parte/todo e pouca exploração da fracção num campo quociente, em particular situações que envolvem a divisão que apela à utilização da correspondência entre as unidades do numerador e as unidades do denominador. Por outro lado, apontamos a ausência de actividades com recurso a material manipulativo e de actividades que permitam aos alunos “mover-se” e estabelecer relações *da parte para o todo, do todo para as partes*, e *da parte para a parte*, bem como ausência de exploração da ideia de magnitude relativa.

⁴³ “*Numa mesa há seis pães e sentaram-se à mesa quatro pessoas. Noutra mesa há cinco pães e sentaram-se à mesa três pessoas. Em que mesa cabe mais pão a cada pessoa?*” (p. 72 do caderno de actividades).

CAPÍTULO QUINTO – DISCUSSÃO

Neste último capítulo, procuramos apresentar as principais conclusões resultantes das diferentes análises efectuadas a alguns manuais de matemática do 5º ano, especificamente à introdução do conceito de número racional. Propomo-nos ainda salientar algumas limitações e obstáculos encontrados, bem como algumas referências a questões que poderão ser abordadas em futuras análises.

5.1. Principais Conclusões

Este estudo surgiu do reconhecimento de várias ideias:

- O conceito de números racionais é uma das ideias matemáticas mais importantes desenvolvidas em contexto escolar, que sustenta o desenvolvimento do raciocínio proporcional, e que resulta importante para subseqüentes tópicos matemáticos incluindo álgebra (Nunes & Bryant, 2009) e probabilidades (Clarke et al., 2007).

- Constitui, no entanto, um dos temas de construção mais difícil, com o qual os alunos demonstram dificuldades de compreensão e de aprendizagem (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Kieren, 1976; Streefland, 1991); e que os próprios professores consideram difícil de compreender e ensinar (Post, Cramer, Behr, Lesh, & Harel, 1993).

- Reconhecemos a importância do manual escolar enquanto um veículo por excelência de comunicação matemática, frequente e excessivamente utilizado por professores para planificar as suas aulas (Tormenta, 1996, cit. por Silvestre, 2009), e que influencia o que se ensina e como se ensina (Reys, Reys e Chávez, 2004, cit. por Silvestre, 2009).

- Verificamos que algumas das dificuldades demonstradas pelos nossos alunos podem ser reforçadas pela forma como as fracções são inicialmente ensinadas (Stafylidou e Vosniadou, 2004; Escolano e Gairin, 2005; Freudenthal, 1983, cit. por Monteiro et al., 2005).

Recordamos que este estudo tem por objectivo proceder a uma análise apenas da abordagem inicial aos números racional proposta pelos manuais, e não da sua globalidade.

Para tal, num primeiro momento, propusemo-nos realizar uma primeira análise através da aplicação da Grelha utilizada no *Project 2061*.

Esta Grelha propõe duas análises distintas: uma análise de conteúdo relativa ao conceito de número racional e às competências com números racionais, a nossa primeira análise. A segunda análise proposta pela Grelha é referente a determinados critérios de Ensino (*Instructional criteria*). Num segundo momento, a nossa terceira análise, procedeu-se a uma avaliação da abordagem feita pelos manuais aos conceitos de unidade e partição assim como de equivalência e ordem.

A primeira análise que nos propusemos efectuar, a análise de conteúdo no que diz respeito ao conceito e às competências com números racionais, tem por objectivo verificar se as ideias e conceitos estão, ou não, presentes no manual.

A análise de conteúdo relativa ao conceito de números racionais teve por objectivo verificar se são introduzidos os diferentes significados da fracção, ou seja, a expressão a/b pode representar a partes de tamanho $1/b$ cada (parte/todo), a a dividir por b (quociente), a comparado com b (razão), a enquanto medida de uma quantidade relativa de b , que representa a unidade dessa quantidade (medida); uma multiplicação por a e divisão por b (operador).

Verificámos que nenhum dos manuais contempla todos os significados de fracção. Dois manuais abordam um conteúdo parcial (significado parte/todo, quociente, operador) e um manual aborda um conteúdo mínimo (significado parte/todo e quociente). Nenhum manual analisado define formalmente o significado medida. O subconstruto razão não é introduzido em nenhum dos manuais analisados.

Assim sendo, podemos concluir que não se verifica a preocupação em se trabalhar todas as situações que, segundo Vergnaud (2001) dão sentido ao conceito e, com os autores do projecto, que os manuais não apresentam o conteúdo num nível de sofisticação apropriado para o ano de escolaridade.

Ultrapassando de certa forma a análise proposta pelos autores da Grelha (que consiste em identificar se os diferentes significados estão ou não presentes), procedeu-se a uma análise das diferentes definições do conceito de fracção propostas pelos manuais.

Esta análise revelou-nos que apenas um manual define formal e diferenciadamente os diferentes significados de fracções, que aborda em lições distintas.

Neste sentido, parece-nos que a ideia de uma variedade de significados (e de usos) distintos das fracções poderá não ficar clara na mente dos alunos. Como aponta Nunes (2003), uma definição clara dos diferentes significados de fracção resulta fundamental para desenvolver uma real compreensão de fracção.

Por outro lado, constatou-se que um dos manuais define indiferenciadamente a fracção enquanto quociente e parte/todo demonstrando pouco rigor nas definições fornecidas, o que poderá dificultar a compreensão dos alunos.

Por último queremos salientar que nenhum manual introduz o significado de fracção como quociente exacto entre dois números inteiros, em contexto de partilha equitativa, em que são consideradas duas medidas: o numerador a representa o número de coisas a serem partilhadas e o denominador b o número de elementos por quem se partilha. Ora, esta interpretação da fracção resulta fundamental para uma compreensão do conceito de número racional (Nunes e Bryant, 2009; Mamede et al, 2005), e poderá permitir aos alunos desenvolver o sentido de número racional iniciado no ciclo anterior.

À análise de conteúdo que diz respeito às competências com o número racional teve por objectivo verificar se são trabalhadas as ideias de (1) equivalência e as três ideias relativamente à comparação e ordenação de fracções definidas Nunes e Bryant (2009), i.e., (2) com denominador igual e numerador diferente; (3) com numerador igual e denominador diferente; e (4) quando ambos são diferentes.

Esta análise revela-nos que os três manuais analisados cobrem as quatro ideias..

Como salientámos no capítulo reservado ao método, a Grelha proposta pelos autores do *Project 2061* considera um segundo momento de análise que remete para estratégias de ensino específicas utilizadas para ensinar ideias e competências. Esta segunda análise que nos propusemos realizar providencia informação quanto ao potencial dos manuais em ajudar os alunos numa aprendizagem efectiva de conceitos e competências.

A Grelha considera várias categorias de análise, nomeadamente (1) *Identificação de um sentido de objectivo*. Este critério permite avaliar se o manual transmite os objectivos de forma clara e significativa para o aluno, relacionando as aulas com o objectivo da unidade; (2) *Construção de conhecimento a partir das ideias matemáticas dos alunos*. Com este critério avalia-se se o manual contém sugestões específicas para a

identificação das ideias dos alunos que poderão interferir com a aprendizagem da Matemática (tanto às ideias que já possuem, como às ideias erradas ou ainda às que podem resultar úteis para a aprendizagem subsequente); (3) *Mobilização dos alunos para a Matemática*. Pretende-se avaliar se o manual valoriza o poder da Matemática, levando os alunos a descobrir padrões e modelar ideias e relações, propondo uma variedade de ideias e aplicações que a Matemática pode explicar; (4) *Desenvolvimento de ideias Matemáticas*. Este critério pretende determinar se os manuais expressam e desenvolvem ideias de forma acessível e inteligível, e se demonstram a utilidade dos conceitos e competências em contextos variados, permitindo que a Matemática seja encarada como lógica e útil; (5) *Promoção do pensamento sobre a Matemática*. O objectivo é verificar se os manuais sugerem formas de ajudar os alunos a expressarem-se, a pensar sobre as suas ideias e a reformulá-las, reconhecendo que os alunos criam o seu próprio significado, o qual pode ou não corresponder aos objectivos de aprendizagem estabelecidos; (6) *Avaliação do progresso dos alunos na Matemática* tem por objectivo verificar se os manuais incluem avaliações que possam ser utilizadas como instrumentos diagnósticos ou formativos, que por sua vez, ajudam a identificar as carências dos alunos.

Em geral, a aplicação da grelha de avaliação do *Project 2061* aos capítulos referentes à introdução dos números racionais revelou-nos que os manuais analisados reflectem muitas fragilidades, não preenchem a maioria dos critérios definidos, e que nenhuma categoria se aproxima sequer do valor médio das classificações possíveis.

Os maiores pontos fracos estão relacionados com as categorias “*Construção de conhecimento a partir de ideias matemáticas dos alunos*” (que apresenta os resultados mais baixos) seguida da categoria “*Promoção do pensamento*” e da “*Avaliação*”.

Verificou-se que os três manuais obtiveram pontuações nulas em três dos quatro itens na categoria “*Construção de conhecimento a partir de ideias matemáticas dos alunos*”, sendo preocupante que nenhum dos manuais alerte ou clarifique os professores sobre as ideias prévias, ideias comumente defendidas pelos alunos bem como de concepções erradas, ou que apoie os professores na identificação destas possíveis ideias dos estudantes. Esta constatação é inquietante tendo em conta que uma das dificuldades dos alunos está relacionada com a generalização dos conhecimentos adquiridos sobre os inteiros, que são mal aplicados às fracções (Stafylidou & Vosniadou, 2004), e neste

sentido resulta fundamental atender às ideias e concepções erradas dos alunos e utilizar a avaliação como instrumento de diagnóstico. Ora, os itens avaliativos (propostos em dois dos manuais analisados) têm claramente um carácter sumativo, não sendo utilizados como instrumento de diagnóstico ao serviço da planificação do ensino e da aprendizagem. E, também se identificaram muitas carências relativamente à categoria “*Promoção do pensamento matemático*”, uma vez que (e à excepção de um manual que encoraja os alunos a expressar, clarificar, justificar e interpretar as suas ideias através das rubricas “*Questões de escolha múltipla*” e “*Questões de Desenvolvimento*”) os manuais não estimulam os alunos a expressar, clarificar, justificar e interpretar as suas ideias e raciocínios, e não promovem o pensamento e reformulação das ideias desenvolvidas pelos alunos. Recorde-se que uma das orientações curriculares no ensino da Matemática é estimular o aluno a comunicar os seus raciocínios, a justificar as suas ideias e a partilhá-las com os outros, oralmente e por escrito, através das tarefas propostas no manual (Ministério da Educação, 1991a, 1991b, 2001).

As pontuações baixas ao nível da “*Identificação de um sentido de objectivo*”, devem-se sobretudo ao facto de os manuais não transmitirem um objectivo global para o estudo dos números racionais de forma clara, compreensível e motivante, relacionando as várias ideias e conceitos, e por não direccionarem o aluno a pensar sobre o que aprendeu e sobre o que precisam aprender/fazer a seguir.

Relativamente à categoria “*Mobilização dos alunos para Matemática*” considerou-se que, em geral, os manuais propõem situações que permitem ligações significativas entre o conceito ou competências e o seu conhecimento. Contudo, estas experiências, actividades e situações-problema são escassas e pouco variadas. Os manuais não aparentam procurar estimular os alunos, no dia-a-dia, para as mais diferentes aplicações da Matemática, e mais especificamente da fracção. Por outro lado, e à excepção de um manual, não são propostas tarefas com material manipulativo, o que se revela claramente insuficiente não só tendo em conta as sugestões curriculares como, também, as várias investigações que demonstram que os vários materiais (Tangrans, Cuisenaire, Pattern Blocks, por exemplo) podem ser usados para encorajar representações mais abstractas das fracções (Baroody & Hume, 1991, cit. por Clarke et al., 2008); ajudam a desenvolver imagens mentais fortes e a superar a influência dos

esquemas que os alunos detêm relativamente aos números naturais (Post e Cramer, 1987).

A categoria “*Desenvolvimento de ideias matemáticas*” obteve a pontuação mais elevada: os manuais introduzirem o vocabulário matemático ou procedimento em conjunto com uma ou várias situações. A exposição das ideias é, em geral, realizada de forma clara e compreensível e os manuais propõem demonstrações e modelações adequadas dos procedimentos. O item “Demonstra e modela procedimentos” foi o único item que obteve a pontuação máxima e isto, para os três manuais, o que confirma a ênfase colocada nos procedimentos. No entanto, outro ponto fraco destes manuais reside na forma deficiente de como os manuais introduzem os termos e procedimentos aos alunos. Como refere Nunes & Bryant (2009) é necessário desenvolver uma compreensão conceptual sobre quantidades antes, ou, ao mesmo tempo, que se ensinam regras e procedimentos. Compreender, e não apenas memorizar vocabulário ou algoritmos, deve ser o objectivo principal no ensino da Matemática, de acordo com o critério de Desenvolvimento de ideias matemáticas.

Num segundo momento, propusemo-nos proceder a uma terceira análise que pretende avaliar a forma com são abordados os conceitos de unidade e partição assim como de ordem e equivalência. Esta análise permitiu-nos evidenciar as razões que nos levaram a atribuir pontuações baixas nos itens⁴⁴ da grelha que remetem para uma avaliação das actividades, experiências ou tarefas diversificadas que são utilizadas para introduzir, desenvolver e aplicar conceitos e procedimentos, e permite-nos identificar algumas das lacunas quanto à forma como são abordados estes diferentes conceitos.

Relativamente ao trabalho com o conceito de unidade, denotou-se pouca atenção atribuída ao conceito, e uma variedade muito reduzida de tarefas e experiências propostas. Discutimos a importância deste conceito para uma compreensão do tamanho relativo ou quantidade dos números racionais (Lamon, 1993, Post et al., 1986), i.e., para a compreensão de que as fracções são comparadas tendo em conta a sua relação com o

⁴⁴ Como por exemplo: “As experiências práticas são eficientes quando comparadas com outras experiências que poderiam ter sido utilizadas” (III.2.3), ou ainda, “O manual providencia exemplos apropriados ou aplicações significativas dos termos e procedimentos” (IV.2.3).

todo, que os define. Verifica-se que dois manuais claramente favorecem a interpretação parte/todo apresentando frequentemente situações de forma descontextualizada, sem recurso a material manipulativo, essencialmente em contexto contínuo, recorrendo a representações de figuras geométricas pré-divididas em partes iguais. Estes exercícios poderão induzir estratégias de simples contagem do todo e das partes (Nunes, 2003; Mitchell, 2005; Escolano e Gairin, 2005) e não permitem salientar o sentido e função da unidade (Escolano e Gairin, 2005). Consideramos mesmo que um dos manuais propõe um muito fraco desenvolvimento do conceito.

Nenhum dos manuais analisado propõe tarefas que conduzam o aluno a reconhecer e compreender todas as relações descritas por Steffe e Olive (1991) e Saenz-Ludlow (1995). Recordamos, com Steffe et Olive (1991), que a equidivisão da unidade em partes, a divisão recursiva da parte em subpartes e a reconstrução da unidade é a acção fundamental para o desenvolvimento do significado de número racional. Esta compreensão fornece flexibilidade ao conceito de unidade e poderá ajudar o aluno a perceber a relação funcional entre o todo e suas partes, afastando-se de uma concepção da fracção enquanto constituída por dois números independentes.

O conceito de unidade é raramente trabalho através de actividades de medida e partição, e isto, apesar da importância atribuída a ambas para uma compreensão do conceito (Behr et al., 1992; Lamon, 1999). A fraca presença de situações e problemas de partição de unidades é alarmante tendo em conta a importância que lhes é atribuída. Com efeito, vários autores têm vindo a demonstrar que partição e partilha são fundamentais para a compreensão de fracção e para a construção do conceito de número racional (Streefland, 1991; Lamon, 1999; Vergnaud, 1981; Nunes & Bryant, 2009). Mack (1990) defende que as actividades de partilha equitativa (“*Fair-sharing*”) representam uma base informal e intuitiva para a compreensão das fracções que poderão ajudar os alunos a relacionar o seu conhecimento intuitivo com o significado que dão aos símbolos fraccionários e a desenvolver uma compreensão conceptual das fracções (Mack, 1990). Nunes & Bryant (2009) insistem na importância de se procurar a origem da compreensão do número racional na compreensão de divisão.

Neste sentido parece-nos fundamental os manuais reforçarem a ideia de que a actividade básica na fracção é de divisão ou partilha de uma quantidade original em subgrupos iguais (Mack, 1990) e proporem mais situações que remetam para a divisão, na nomenclatura de Nunes e Bryant (2009), pois como referem os autores ambas as situações conduzem à construção de esquemas de acção muito diferentes, que permitem

desenvolver estratégias e *insights* diferentes sobre a quantidade, sendo que a correspondência é o esquema mental mais poderoso para desenvolver uma noção de quantidade da fracção.

Por outro lado, e à semelhança do que aponta Hannula (2003, cit. por Amato, 2005), verificou-se que os manuais centram-se muito da fracção própria, trabalhando pouco extensivamente com fracções iguais à unidade e com números mistos. As experiências propostas para introduzir o conceito de fracção imprópria e números mistos remetem para situações em contexto parte/todo (em dois dos manuais) ou de partilha de uma unidade. Ora, as investigações sugerem que os alunos têm dificuldades em compreender a fracção imprópria nestas situações (Stafylidou e Vosniadou, 2004; Escolano e Gairin, 2005; Olive e Steffe, 2002, cit. por Nunes e Bryant, 2009). Por outro lado, e ao contrário do que sugere Amato (2005), os manuais propõem poucas experiências e representações para introduzir as fracções iguais à unidade (n/n) e os números mistos. Saliente-se ainda que, em dois dos manuais, a ideia de fracção imprópria só é explicitamente introduzida na lição destinada à comparação e ordenação de números racionais, e isto, quando é sugerido um dos métodos para comparar fracções recorrendo a uma comparação com a unidade. Ora, esta ideia deverá ser introduzida desde o início, e isto, para promover uma compreensão da fracção enquanto extensão do sistema de número natural (Amato, 2005). Salientámos ainda uma situação que nos pareceu conceptualmente incorrecta: um dos manuais introduz o número misto antes de explorar a fracção imprópria. A compreensão do número misto implica a compreensão da ideia de fracção maior que um, e não deveria ser introduzida antes, nem tão em lições distintas. Apenas um manual aborda a ideia de fracção imprópria e número misto antes de iniciar o trabalho com os conceitos de equivalência e ordenação.

Os conceitos de equivalência e ordenação também são geralmente introduzidos através de uma situação única, exclusivamente para um contexto parte/todo, o que resulta não só insuficiente como também pouco eficiente, tendo em conta as investigações de Nunes & Bryant (2006, 2009) e de Mamede et al. (2005), que demonstraram que os alunos têm melhores desempenhos em situação de divisão; ou de medida (Escolano e Gairin, 2005).

Por outro lado, salientamos a ênfase que é colocada nos procedimentos. Ensinam-se procedimentos e regras sem os ancorar na compreensão de quantidades,

sem se fomentar um desenvolvimento conceptual, propondo tarefas que permitam as crianças desenvolver *insight* sobre as razões pelas quais o procedimento funciona (Nunes e Bryant, 2009). Ora, Nunes e Bryant (2009) e Pitlethly e Hunting (1996) salientam a importância de se desenvolver raciocínios quantitativos (sobre a relação compensatória entre tamanho e número de partes e sobre a relação inversa entre o denominador e o valor da fracção) antes, ou ao mesmo tempo, de se ensinarem representações fraccionárias, para promover o pensamento sobre ordem e equivalência de fracções.

Assim, evidenciou-se que, em geral, os manuais optam por propor uma situação única para introduzir conceitos e procedimentos, e geralmente, recorrendo ao significado parte/todo, apresentada de forma descontextualizada, enfatizando procedimentos em detrimento de um cuidadoso desenvolvimento dos vários conceitos.

Denotou-se também a pouca variedade de exemplos e aplicações significativas dos conceitos, termos e procedimentos e uma grande predominância de exercícios descontextualizados - no sentido de situação-problema - que remetem essencialmente para o cálculo e aplicação de procedimentos, que abrangem pouca variedade de contextos. Consequentemente, depreende-se a importância de privilegiar, nos manuais, mais actividades de resolução de problemas e proporcionar situações diversificadas que visem alargar a significação de um conceito e pôr à prova as competências e concepções dos alunos pois, como refere Vergnaud (1988), a resolução do problema é a origem e o critério do saber operatório; o saber forma-se a partir de problemas⁴⁵ a resolver, de situações a dominar. Acreditando que os conhecimentos dos sujeitos são modelados pelas situações que conferem sentido aos conceitos e aos procedimentos, é fundamental propor uma maior variedade de situações-problema que permitam a descoberta dos diferentes aspectos e propriedades deste conceito, essenciais à conceptualização.

Por outro lado, a ênfase colocada nos procedimentos mecanizados e a forte tendência para traduzir o conceito de fracção utilizando apenas a exploração do significado parte-todo em detrimento de um cuidadoso desenvolvimento dos aspectos ligados à compreensão do conceito e das suas funções importantes poderá constituir uma provável causa das dificuldades e do desempenho, geralmente pobre, dos alunos (Behr et. al, 1983).

⁴⁵ Entenda-se problema por: «qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver actividades de exploração, hipóteses e verificações para produzir soluções» (Vergnaud, 1986).

Por último queremos salientar que a utilização quase exclusiva do subconstructo parte/todo poderá reforçar estratégias de dupla contagem (Nunes, 2003; Mitchell, 2005; Jahn, 1999; Escolano e Gairin (2005), o que poderá acarretar obstáculos didáticos: poderá conduzir à dissociação entre os dois termos da fracção, mais relacionados com uma dupla cardinalidade do que uma relação entre número e/ou grandeza, conduzindo a defeitos de conceptualização e de tratamento, constituindo, desta forma, um obstáculo a aceitação enquanto número único (Streefland, 1991). E ainda, poderá exacerbar a sobre generalização de conhecimentos adquiridos sobre os números inteiros (Freudenthal, 1983, cit. por Monteiro et al., 2005).

Vários investigadores defendem que muitas das dificuldades com as fracções podem ser consideravelmente reduzidas ou ultrapassadas se as práticas educativas providenciarem aos alunos a oportunidade de construir conceitos enquanto estão envolvidos em actividade matemáticas que promovam a compreensão (Bulgar, Schorr, & Maher, 2002; Olive, 2001; citados por. Clarke et al., 2007).

5.2. Limitações e Considerações para Futuras Investigações

Este trabalho encontrou algumas limitações e obstáculos relacionados com o próprio instrumento de Avaliação. Conforme já havia sido referido por Silvestre (2009), uma das limitações da Grelha de Análise utilizada pelo *Project 2061* diz respeito à classificação dos itens que nem sempre é muita clara. Por outro lado, a forma como está implementada permite que alguns dos critérios preenchidos acabem por ser excluídos na fórmula final: a exclusão de determinados itens conduz a uma pontuação nula na categoria.

Neste estudo, deparamo-nos com outro tipo de “limitação”: a grelha propõe vários itens que têm por objectivo verificar se os manuais propõem actividades, experiências ou tarefas diversificadas que são apropriadas, significativas ou eficientes⁴⁶ para introduzir, desenvolver e aplicar conceitos e procedimentos sem, no entanto,

⁴⁶ Como por exemplo: “As actividades que providenciam experiências que dão aos estudantes ligações significativas entre o conceito ou competência e o seu conhecimento” (III.2.1); “As experiências práticas são eficientes quando comparadas com outras experiências que poderiam ter sido utilizadas” (III.2.3), ou ainda, “O manual providencia exemplos apropriados ou aplicações significativas dos termos e procedimentos” (IV.2.3).

operacionalizar este critério. Resulta importante propor uma revisão de literatura que permita determinar quais são essas experiências, e isto, tendo sempre em conta a especificidade do conhecimento matemático que está a ser objecto de análise. Esta questão leva-nos então a concluir que a grelha proposta não se presta a uma avaliação global dos manuais mas, e à semelhança da análise efectuada pelos autores do *Project 2061*, deverá ser aplicada a determinadas “áreas” do conhecimento matemático como, por exemplo, “geometria”, “álgebra” ou “números racionais”.

Temos, também, a consciência que a quantidade de manuais analisados foi muito reduzida e que a análise efectuada deixou muitas questões de fora como, por exemplo, as transladações entre as diversas representações, as fracções decimais, ou ainda, como relacionar as várias interpretações de fracção.

Partindo das limitações identificadas deverá se alargar o leque de análise mas também proceder a uma definição clara e sustentada das experiências, situações e tarefas que resultam mais apropriadas, significativas ou eficientes para introduzir e desenvolver os conceitos tendo em conta a especificidade do conhecimento matemático que está a ser objecto de análise, ou seja, é necessário operacionalizar este critério. Por outro lado, e tendo em conta as considerações de Vergnaud (1981, 1988), parece-nos que uma análise quanto à forma como são abordadas e desenvolvidas as estruturas multiplicativas no primeiro ciclo poderão complementar a análise à abordagem inicial ao conceito de número racional.

5.3. Contributos do Estudo e Comentários Finais

Neste trabalho propusemo-nos proceder a uma análise da abordagem inicial ao conceito de número racional, e isto segundo a perspectiva de um determinado instrumento de avaliação, a Grelha do *Project 2061*. Isto, porque importa compreender se o insucesso dos alunos portugueses relativamente à aprendizagem da matemática poderá estar relacionado com a forma como são abordados os diversos conceitos, e com o tipo de actividades propostas. A avaliação dos manuais por processos rigorosos e fundamentados, tendo em vista a promoção da qualidade do ensino, é actualmente uma

das linhas de acção do Ministério da Educação, em particular no que se refere à disciplina de Matemática.

Ainda que tenham sido apontadas algumas limitações da grelha, consideramos com Kulm (1999, cit. por Silvestre, 2008) que os critérios evidenciados reflectem os princípios e estratégias suportadas por evidências de uma investigação sólida sobre as melhores práticas de ensino, sendo um instrumento rigoroso, completo e fundamentado para avaliar os manuais.

O nosso estudo permitiu identificar algumas situações que poderão não favorecer o desenvolvimento de uma compreensão do conceito de número racional. Não queremos, contudo, como faz Correia (1998, cit. por Silvestre, 2008), atribuir aos manuais toda a responsabilidade pelo insucesso escolar a matemática.

Por outro lado, frequentemente, as análises realizadas aos manuais apenas comunicam conclusões gerais sem incluir exemplos concretos que permitam às editoras ou aos professores ultrapassar os possíveis obstáculos, erros, incorrecções e imprecisões dos manuais. Por exemplo, as conclusões publicadas resultantes da avaliação realizada aos manuais de matemática portugueses do 9º ano remetem para o manual na sua globalidade; propõe-se uma avaliação da qualidade dos nossos manuais em geral. Encontramos afirmações como *“Contém várias situações com pouco rigor científico ou com imprecisões que podem induzir o aluno em erro”* (p.25). Pensamos que poderá resultar interessante propor uma análise mais pormenorizada e explícita das situações menos apropriadas e/ou eficientes e significativas no sentido de ajudar autores e editoras a corrigir algumas situações, e a auxiliar os professores a melhorar a sua eficácia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Advancing Science Serving Society (s.d.). *Project 2061 – Algebra Textbooks: A Standards-Based Evaluation*. Recuperável a 13 de Janeiro 2010 em <http://www.project2061.org/publications/textbook/algebra/report/analysis.htm>
- Amato, S. (2005). Developing student's understanding of the concept of fractions as numbers. In: Chick, H. L. & Vincent, J.L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of the Mathematics Education*, 2, 49 -56. Melbourne: PME.
- Behr, M., Harel, G., Post, T. e Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and proportion. In: Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, 296-333.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R.A. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (91-126). Orlando, FL: Academic Press, .
- Behr, M & Post, T (1992) Teaching rational number and decimal concepts In T Post (Ed), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (201-248) Boston: Allyn and Bacon.
- Bezuk, N. (1988). Fractions in the early childhood mathematics curriculum. *ArithmeticTeacher*, 6(35), 56-60.
- Bezuk, N. & Cramer, K. (1989). Teaching About Fractions: What? When? And How?. In: P. Trafton (ed.), *National Council of Teachers of Mathematics 1989 Yearbook: New Direction for Elementary School Mathematics* (156-167). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Brissiaud, R (1998), *Les fractions et les décimaux au CMI*, verificável a 13 de Janeiro de 2010, em <http://pagesperso-orange.fr/page.perso.brissiaud/pages/Page2.html>

- Brousseau G. (1981), *Problèmes de didactique des décimaux*, RDM, Vol 2.1, 37-128, La Pensée Sauvage (éd), Grenoble.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., e Romberg, T. A. (1993). Toward a unified discipline of scientific inquiry. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (1-11). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clarke, D., Mitchell, A., Roche, A. (2007). Year Six Fraction Understanding: A Part of the Whole Story. In Watson, J & Beswick, K. (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Vol. 1, 207 – 216. Sydney: MERGA.
- Clarke, D., Roche, A., Mitchell, A. (2008). *Practical tips for making fractions come alive and make sense*, recuperável a 13 de Janeiro 21010 em http://www.education.monash.edu.au/research/projects/primary-maths/docs/3_Participants%27%20files/3_Ten%20tips%20to%20make%20fractions%20come%20alive.pdf
- Dickson, L., Brown, M., e Gibson, O. (1984). *Children Learning Mathematics*, London: Cassell
- Escolano, R. e Gairín, J. (2005). *Modelos de Medida para la Enseñanza Del Número Racional en Educación Primaria*, recuperável a 13 de Janeiro 2010 em http://www.fisem.org/descargas/1/Union_001.pdf
- Hiebert, J., e Behr, M. (1988). Introduction: Capturing major themes. In J. A. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (1-18). Hillsdale, NJ and Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and National Council of Teachers of Mathematics.
- Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors*. Berkshire, England: NFER-Nelson.

- Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers – Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (162-181). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum
- Kieren, T. (1980). Recent research on number learning (pp. 125-149): ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education
- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco e F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics, 2001 Yearbook*, (146-165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lamon, S. (2002). Part-whole comparisons with unitizing. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (79-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Mack, N. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16-22.
- Mack, N. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In (85-105). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates
- Mack, N. (1995). Critical ideas, informal knowledge, and understanding fractions. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (67-84). Albany, NY: State University of

New York Press.

Mamede, E., Nunes, T. e Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. In: Chick, H. L. & Vincent, J.L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of the Mathematics Education*, 2, 49 -56. Melbourne: PME.

Ministério da Educação (1991a). *Organização curricular e programas (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

Ministério da Educação (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.

Ministério da Educação (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Mitchell, A. (2005). *Measuring Fractions*, verificável a 13 de Janeiro 2010 em <http://www.merga.net.au/documents/RP612005.pdf>

Monteiro, C., Pinto, H., Figueiredo, N. (2005). *As fracções e o desenvolvimento do sentido de número racional*, (p. 47 – 51), verificável a 13 de Janeiro 2010 em http://arquivo.esep.pt/esep/projectos/sentidonumero/Fraccoes_EM.pdf.

Moseley, B. (2005). *Students Early mathematical representation knowledge: The effect of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving*. Recuperável a 13 de Janeiro de 2010 em <http://www.springerlink.com/content/uj7n802t642714j3/>

Moss, J., e Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 122-147.

Nunes, T. (2003). The effect of situations on children's understanding of fractions. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford: Junho.

Nunes, T., Bryant, P., Hurry, J. e Pretzlik, U. (2006). *Fractions: difficult but crucial in mathematics learning*, recuperável a 13 de Janeiro 2010 em http://www.tlrp.org/pub/documents/no13_nunes.pdf

Nunes, T. e Bryant, P. (2009) Understanding racional numbers and intensive quantities. Recuperável a 13 de Janeiro, em http://www.nuffieldfoundation.org/fileLibrary/pdf/P3_amended_FB2.pdf

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. A. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (53-92). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pitkethly, A., e Hunting, R. (1996). A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 5-38.

Pothier, Y., & Sawada, D. (1990). Partitioning: An approach to fractions. *Arithmetic Teacher*, 38(4), 12-16.

Post, T., Behr, M. & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 8 (1), 39-48.

Post, T., & Cramer, K. (1987). Children's strategies in ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher*, 35(2), 33-35.

- Powell, C. & Hunting, R. (2003). Fractions in the early-years curriculum: More needed, not less. *Teaching Children Mathematics*, 10(1), 6-7.
- Saenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal of Research in Mathematics Education*, 25,50-85.
- Saenz-Ludlow, (1995), *Ann's fraction schemes*, ESM vol. 28, (101-132), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.
- Silvestre, A. (2008). Dificuldades de aprendizagem da álgebra: Análise dos manuais do 7º e 8º ano de escolaridade. *Dissertação de Mestrado em Psicologia Educacional*. Lisboa: ISPA.
- Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L., & Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 127-155.
- Stafylidou, S. e Vosniadou, S. (2004). The development of student's understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14, 503-518
- Steffe, L. P., & Olive, J. (1991). The problem of fractions in the elementary school. *Arithmetic Teacher*, 38(9), 22-24.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Streefland, L. (1986). Rational analysis of realistic mathematics education as a theoretical source for Psychology. Fractions as a paradigm. *European Journal of Psychology of Education*, 1, (2),67-82.
- Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité*. Berne, Peter lang

Vergnaud, G. (1988). Élève face à la tâche: problèmes à résoudre, difficultés à surmonter. In *European Journal of Psychology of Education*. Vol. ESP, n° 1988, 15-21

Wong, M. e Evans, D. (2008). *Fractions as a measure*, recuperável a 13 de Janeiro em <http://www.merga.net.au/documents/RP722008.pdf>

Anexo

Tradução dos critérios de análise do *Project 2061*

www.project2061.org/publications/textbook/algebra/report/analysis.htm

CATEGORIA I: IDENTIFICANDO UM SENTIDO DE OBJECTIVO

Parte de planear um currículo coerente envolve decidir quais os objectivos a atingir e que experiências de aprendizagem poderão contribuir para os atingir. Esta categoria inclui critérios que determinam se o material se esforça para que os objectivos sejam claros e significativos para o aluno, e se relaciona as aulas com o objectivo da unidade.

I.1. Indica o objectivo da Unidade: O manual transmite um sentido de objectivo global que é compreensível e motivante para os alunos?

Este critério pretende verificar quer se o manual começa com uma questão “over-arching” ou problema que se dirige ao tema da unidade (e.g. Como pode um gráfico ajudar-nos a prever algo?), ou com uma representação do que se irá aprender (e.g., um mapa conceptual com as principais ideias que irão ser exploradas), ou se por outro lado identifica um objectivo para a unidade (e.g., uma exposição clara dos objectivos, utilizando termos conhecidos).

Um manual que começa com abstracções ou fenómenos fora do campo de percepção, compreensão ou conhecimento dos alunos, não satisfaz adequadamente os critérios. Ainda assim, um manual que começa com um fenómeno não familiar, mas altamente interessante e motivante para os alunos, pode preencher os critérios.

Nem sempre é possível fornecer aos alunos um sentido de objectivo para toda uma unidade ou capítulo. Nesses casos pode ser suficiente seccionar a matéria dentro de uma unidade.

Indicadores

1. O objectivo é apresentado aos alunos de forma explícita (ou implícita, através de um problema, questão ou representação).
2. O objectivo é susceptível de ser compreendido.
3. O objectivo é susceptível de ser interessante e/ou motivante para os alunos.
4. É dada uma oportunidade aos alunos de pensar e discutir sobre o objectivo.
5. A maioria das actividades e lições são consistentes com o objectivo proposto.

6. No final da unidade ou capítulo é retomado o objectivo inicialmente proposto.

Pontuação

Alta – O manual possui os 6 indicadores.

Médio – O manual possui o indicador 1, e 3 dos restantes 5 indicadores.

Baixo – O manual possui o indicador 1, e 1 dos restantes 5 indicadores.

Nada – O manual não possui nenhum dos indicadores.

I.2. Indica o objectivo da lição/tema: O manual estabelece um objectivo para cada actividade ou lição, e clarifica relação da mesma com as restantes?

A ideia é perceber se o objectivo das actividades individuais é notado pelos alunos e se existe uma transição lógica entre as actividades/lições. Se alguém que visite uma turma perguntar aos alunos o que estão a fazer e porquê, existe alguma razão para pensarmos que eles não saberão?

O objectivo das actividades pode ser introduzido por um texto, comentários por parte do professor (sugeridos no manual), e/ou por respostas às questões dos alunos.

Indicadores

1. O manual incentiva os professores a transmitir o objectivo de cada actividade ou lição aos alunos.

2. Cada actividade encoraja o aluno a pensar acerca do sentido de cada actividade ou lição.

3. O manual impele os professores a explicar aos alunos como é que uma actividade se relaciona com as restantes.

4. O manual habitualmente direcciona os alunos a pensar sobre o que aprenderam até então e sobre o que precisam aprender/fazer a seguir.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 4 indicadores.

Médio – O manual contempla 3 dos 4 indicadores.

Baixo – O manual contempla 1 dos 4 indicadores.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

I.3. Justifica a sequência de actividades: O manual envolve os alunos numa sequência lógica e estratégica de actividades, que constrói o entendimento das ideias na unidade, ou do objectivo do capítulo?

A questão central é se existe uma sequência estratégica e lógica das actividades no manual, e se esta lógica ou estratégia é explícita para o professor ou apenas inferida pelo autor. O motivo racional ou implícito por detrás da sequência de actividades deve ser claro, deve providenciar ao professor e aos alunos um sentido para que haja progresso a direcção do objectivo da unidade ou capítulo.

Indicadores

1. O manual providencia uma base racional para a globalidade da sequência de actividades ou lições.
2. Se não existe uma base racional para a globalidade da sequência de actividades ou lições, o autor pode identificar uma.
3. A sequência das actividades reflecte uma base racional inferida ou determinada, ou um objectivo.

Pontuação

Alta – O manual contempla os indicadores 1 e 3.

Médio – O manual contempla os indicadores 2 e 3.

Baixo – O manual contempla os indicadores 1 ou 2.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

CATEGORIA II: CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTO A PARTIR DAS IDEIAS MATEMÁTICAS DOS ALUNOS

Promover uma melhor compreensão nos alunos requer que se perca algum tempo a escutar as ideias que eles já possuem, quer ideias erradas, quer ideias que podem ser úteis como base para a aprendizagem seguinte. Essa atenção implica que os professores estejam informados acerca dos pré-requisitos necessários para a compreensão do que é esperado, e quais deverão ser as ideias iniciais dos alunos – em particular, as ideias que poderão interferir com a aprendizagem da matemática.

Esta categoria analisa se o manual contém sugestões específicas para a identificação das ideias dos alunos.

II.1. Especifica Pré-requisitos: O manual especifica e chama a atenção para os pré-requisitos necessários à aprendizagem?

Este critério refere-se a:

a) *pré-requisitos conceptuais ou competências verificadas no currículo*

Por exemplo, saber o que é um factor primário é um pré-requisito para aprender como encontrar o denominador comum das fracções.

b) *pré-requisitos para actividades utilizadas no manual para ensinar os conceitos e competências verificados no currículo*

Por exemplo, consideremos o modelo: “Os dados distribuídos numa recta facilita a verificação de onde estão os extremos, de onde existe maior concentração, e de onde se encontram mais falhas. Um sumário dos dados inclui aonde é o meio, e a quantidade em seu redor”.

O manual não deve partir do pressuposto que os alunos possuem as competências necessárias. Os professores deverão estar alerta e preparados para auxiliar os seus alunos no desenvolvimento dessas competências.

Corresponder os critérios a estes pré-requisitos envolve fazer uma lista de pré-requisitos ou competências, examinar se o manual alerta para quaisquer ideias previamente necessárias da lista, e se sim quais, examinar se o manual tem de facto feito realçar esses pré-requisitos de forma adequada na unidade e nas unidades anteriores, e examinar se o manual ajuda os alunos a fazer ligações entre os pré-requisitos do currículo e os seus.

Indicadores

1. O manual torna explícito quais os pré-requisitos e competências específicas, caso existam.
2. O manual menciona os pré-requisitos identificados na mesma unidade ou em unidades anteriores.
3. O manual estabelece relações entre os pré-requisitos padrão e os que o aluno possui.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla 2 dos 3 indicadores.

Baixo – O manual contempla 1 dos 3 indicadores.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

II.2. Alerta o professor para as ideias dos alunos: O manual alerta os professores para as ideias mais comuns que os alunos possuem?

Os investigadores identificaram as ideias que os alunos têm em matérias de várias áreas. O problema que se coloca é se o manual informa os professores acerca dessas ideias comumente tidas pelos alunos ou não. Essa informação pode ajudar os professores a compreender melhor as ideias dos seus próprios alunos, a decidir sobre quais dessas ideias pode trabalhar e quais deve corrigir, ou a melhor compreender a razão e o objectivo por detrás das estratégias e actividades propostas, caso o manual esteja já preparado de forma a chamar a atenção para essas ideias.

Caso não exista estudos acerca das ideias dos alunos sobre uma determinada área a que o manual se dirige, este não deve ser penalizado por não satisfazer este critério.

Para responder a esta questão é necessário analisar se existe pesquisa na área a que o manual se dirige acerca das ideias prévias dos alunos, se o manual alerta os professores para essas ideias, e se o manual apresenta os resultados dos estudos de uma forma adequada.

Indicadores

1. O manual lista, apresenta e identifica ideias específicas comumente defendidas pelos alunos que são relevantes face à norma.
2. O manual clarifica/explica ideias comuns.
3. O manual refere ou explica de forma adequada as ideias comuns mantidas.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla os indicadores 1 e 2.

Baixo – O manual contempla o indicador 1.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

II.3. Apoia o professor na identificação de ideias: O manual inclui sugestões para os professores descobrirem o que pensam os seus alunos sobre situações familiares relacionadas com situações padrão antes das ideias matemáticas serem introduzidas?

Os professores necessitam de um guia na identificação das ideias dos alunos nas áreas em que não ainda existe pesquisa. Mas mesmo em áreas em que há pesquisa sobre as ideias mais comuns dos alunos, os professores necessitam de ajuda a identificar qual a proporção dos seus próprios alunos que mantém essas ideias, assim como outras ideias idiossincráticas.

Para responder a esta questão é preciso examinar não só se os manuais encorajam os professores a descobrir as ideias dos estudantes mas também se providencia sugestões específicas de como o fazer. As sugestões podem incluir tarefas nas quais os alunos fazem prognósticos e fazem as suas próprias descrições dos conceitos ou competências; tarefas nas quais os alunos são solicitados a representar o seu raciocínio através de desenhos; tarefas nas quais os alunos têm que interpretar informação, discutir soluções alternativas, ou dar justificações, e tarefas que questionam os alunos acerca do significado de termos específicos e/ou tenta compreender a importância das relações entre os conceitos.

Para satisfazer este critério é também fundamental analisar a qualidade das sugestões fornecidas. As tarefas não se devem focar exclusivamente na identificação dos significados dos termos para os alunos. É importante que as tarefas façam sentido para os alunos que

nunca estudaram o assunto, e que as questões incluídas sejam colocadas de formas significantes para os alunos que não estão familiarizados com o vocabulário matemático. É, ainda, essencial que o manual encoraje o professor a questionar os alunos para clarificar o que estes pretendem dizer ou para obter mais informação acerca do que pensam.

Indicadores

1. O manual inclui questões ou tarefas específicas que apoiam o professor na identificação das ideias prévias que os alunos possuem.
2. As questões e tarefas devem conseguir ser compreendidas pelos alunos ainda antes de estes se familiarizarem com os conceitos, procedimentos ou vocabulário.
3. O manual inclui questões ou tarefas que exigem dos alunos que estes façam prognósticos ou dêem explicações de conceitos ou procedimentos.
4. O manual sugere como os professores podem utilizar questões ou tarefas para compreender o pensamento dos alunos e o seu nível de compreensão.

Pontuação

Alta – O manual preenche os 4 indicadores.

Médio – O manual preenche os indicadores 1 e 3.

Baixo – O manual preenche o indicador 1.

Nada – O manual não preenche nenhum dos indicadores.

II.4. Dirige-se a concepções erradas: O manual dirige-se explicitamente às ideias comuns dos alunos?

A questão passa por perceber se o manual inclui questões ou actividades que se dirigem às ideias mais comuns mantidas pelos alunos. Por exemplo, o manual pode incluir experiências que podem ajudar os alunos a modificar as suas ideias através de actividades que desafiem as ideias anteriores dos alunos, ou que impelem os alunos a reagir contra ideias erradas e a resolver as diferenças entre as ideias erradas e as correctas. Em alternativa, o manual pode incluir experiências que expandam os conceitos comuns ou competências que têm uma extensão limitada. Apontando as concepções erradas e dizendo aos alunos que as devem evitar não preenche de forma adequada este critério.

Para contemplar estes critérios o manual deve sugerir estratégias gerais que os professores podem utilizar para trabalhar na modificação das ideias dos alunos, e deve providenciar exemplos de como essas estratégias devem ser implementadas na sala de aula. Por exemplo, os professores podem ser encorajados a levar mais além as ideias dos alunos, em justaposição com as ideias de outros alunos, etc.

Indicadores

1. O manual dirige-se explicitamente a ideias específicas comumente apresentadas pelos alunos.
2. O manual inclui questões, tarefas, ou actividades que ajudam ao progresso dos alunos, a partir das suas ideias iniciais, por exemplo:
 - a) desafia explicitamente as ideias dos alunos, por exemplo, comparando os seus prognósticos com aquilo que realmente acontece;
 - b) incita os alunos a contrastar as suas ideias e o conceito ou procedimento correctos, e a clarificar as diferenças entre eles.
 - c) expande ideias correctas comuns que têm uma extensão limitada.
3. O manual sugere estratégias gerais de como o professor se deve dirigir às ideias comuns dos alunos relacionadas com a norma.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla os indicadores 1 e 2.

Baixo – O manual contempla qualquer um dos indicadores.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

CATEGORIA III: MOBILIZAÇÃO DOS ALUNOS PARA A MATEMÁTICA

Um dos grandes objectivos da matemática é descobrir padrões e modelar ideias e relações nos termos de um simples número. Para os alunos valorizarem o poder da matemática, precisam de ter uma noção da variedade e complexidade das ideias e aplicações que a matemática pode explicar ou servir como modelo.

III.1. Providencia contextos variados: O manual providencia experiências matemáticas em vários contextos?

Os matemáticos e outros usam e recorrem ao conhecimento matemático para descrever, explicar, prever e projectar objectos, sistemas ou eventos do dia-a-dia, assim como relações abstractas. Para isso, as ideias matemáticas necessitam de estar de alguma forma ligadas a problemas e situações com significado, e ao mundo real. A questão é verificar se o manual providencia um número suficiente de problemas, experiências, ou acontecimentos numa variedade de contextos suficiente para apoiar as ideias defendidas pelo currículo. O manual pode fornecer experiências com problemas, situações, actividades, sistemas, ou acontecimentos directamente em actividades práticas ou demonstrações, ou indirectamente pela utilização de textos, gráficos, imagens de computador, vídeos, imagens, etc.

Indicadores

1. As experiências com objectos, aplicações, e materiais estão em número suficiente, segundo o conteúdo do currículo.
2. O manual providencia uma variedade apropriada de experiências com objectos, aplicações e materiais.

Pontuação

Alta – O manual contempla os indicadores 1 e 2.

Médio – O manual contempla o indicador 1.

Baixo – O manual contempla o indicador 2.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

III.2. Providencia experiências práticas: O manual inclui actividades e promove experiências práticas quando possível, de acordo com o currículo?

Os alunos podem aprender mais rapidamente as coisas que são tangíveis e acessíveis para os seus sentidos; estes alunos, especialmente os mais novos, beneficiam mais das experiências práticas com objectos, problemas ou acontecimentos aos quais o conhecimento

matemático do currículo se refere. Quando essas experiências não são de todo praticáveis (por exemplo, medir uma montanha), os alunos devem ter ao seu dispor vídeos, imagens ou modelos que possam utilizar no mesmo sentido.

Contudo, é importante que nem todas as experiências sejam práticas, pois se todas o forem isso limitará o número de exemplos que podem ser dados. Além disso, os alunos não devem ser levados a pensar acerca das ideias que vivem na prática, quando na vida real vão também encontrar problemas indirectos.

Indicadores

1. As actividades, sendo práticas ou não, providenciam experiências que dão aos estudantes ligações significativas entre o conceito ou competência e o seu conhecimento.
2. Um número apropriado de actividades são experiências práticas.
3. As experiências práticas são eficientes quando comparadas com outras experiências que poderiam ter sido utilizadas.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla o indicador 1, a par com o indicador 2 ou 3.

Baixo – O manual contempla o indicador 1.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

CATEGORIA IV: DESENVOLVIMENTO DE IDEIAS MATEMÁTICAS

A literacia matemática requer que os alunos consigam perceber qual a ligação entre os conceitos e competências, que vejam a matemática como lógica e útil, e que adquiram mais competências ao utilizar a matemática. Esta categoria inclui critérios para determinar quer se o manual expressa e desenvolve ideias de forma que sejam acessíveis e inteligíveis para os alunos, quer se demonstra a utilidade dos conceitos e competências em contextos variados.

IV.1. Justifica a importância as ideias do currículo: O manual sugere formas de ajudar os alunos a desenvolver um sentido da importância e validade dos conceitos e procedimentos matemáticos?

Este critério releva a importância de incluir algumas medidas no currículo onde um argumento é desenvolvido no apoio de conceitos, competências ou estratégias apresentados. Há tantas razões psicológicas como lógicas para esperar que um manual forneça aos alunos uma resposta de como aquelas ideias fazem sentido.

Indicadores

1. O manual trabalha a importância matemática do currículo.
2. O manual trabalha a validade das ideias matemáticas.
3. O manual trabalha o currículo, de modo a que seja compreensível para o aluno.
4. O manual incentiva os alunos na consideração do caso para a validação e importância dos conceitos e competências do currículo.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 4 indicadores.

Médio – O manual contempla o indicador 1 ou 2, a par com o indicador 3 ou 4.

Baixo – O manual contempla o indicador 1 ou 2.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

IV.2. Introduce termos e procedimentos: O manual introduce termos e procedimentos apenas em conjunto com experiências e apenas onde é necessário para facilitar o pensamento e promover comunicação efectiva?

Compreender, e não apenas memorizar vocabulário ou algoritmos, deve ser o objectivo principal no ensino da matemática. Na matemática, muitos dos termos dizem respeito a conceitos. Para os alunos compreenderem um conceito, devem ser capazes de descrever propriedades, de dar exemplos e não-exemplos, e eventualmente dar uma definição. Os algoritmos são importantes por si só, assim como quando providenciam formas eficientes de

resolver os problemas. Os alunos devem ter oportunidades de aplicar os conceitos ou procedimentos na resolução de problemas e no pensamento.

Indicadores

1. O manual limita o uso de termos e procedimentos.

2. O manual introduz vocabulário matemático ou procedimentos em conjunto com experiências, ao invés de pedir aos alunos que simplesmente memorizam definições ou procedimentos.

3. O manual providencia exemplos apropriados ou aplicações significativas dos termos e procedimentos.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla o indicador 1, a par com o indicador 2 ou 3.

Baixo – O manual contempla o indicador 1.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

IV.3. Apresenta ideias de forma adequada: O manual inclui apresentações de conceitos, procedimentos e relações de forma adequada e compreensível?

Esta questão remete-nos para a importância de utilizar representações adequadas para fazer ideias abstractas inteligíveis para todos os alunos. Diferentes exposições relevam diferentes aspectos de uma ideia e fornece uma variedade de oportunidades para relacioná-la com outras ideias dos alunos. Formas possíveis de expor uma ideia incluem desenhos, diagramas, gráficos, imagens, analogias e metáforas, modelos e simulações, e role-playing. A forma como é apresentada a ideia tem de ser clara para que os alunos possam compreender de forma justa e rápida que ideias estão a ser expostas e como. Além disso, porque muitas vezes a forma como se apresenta uma ideia destaca apenas alguns aspectos desta, é necessário ter cuidado para que esta represente a realidade da forma mais adequada possível.

Indicadores

1. O manual inclui exposições apropriadas.

2. O manual inclui exposições compreensíveis (dependendo do nível de escolaridade dos alunos).

3. O manual inclui o número apropriado e exposições variadas, adequadas e compreensíveis.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla o indicador 1 e 2.

Baixo – O manual contempla o indicador 1.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

IV.4. Relaciona as ideias do currículo: O manual explicitamente orienta a atenção para as correctas relações entre as ideias do currículo?

Este critério pretende enfatizar as relações entre as ideias, conceitos, e competências descritas no currículo. Alguns tipos de relações podem ser classificados como pertencendo a um dos seguintes tipos:

a) um conceito ou competência pode ser o caso de uma generalização (e.g., a soma dos ângulos de um rectângulo ilustra no geral a soma dos ângulos de um polígono).

b) um conceito ou competência pode ser análogo a outra ideia (e.g., adicionando fracções racionais é como adicionar expressões racionais, porque ambos requerem um denominador comum).

c) um conceito ou competência pode surgir em várias áreas ou contextos (e.g., o numero π pode ser a razão da circunferência para o diâmetro, a medida do raio de um semicírculo, ou a soma de uma série).

Para satisfazer este critério é necessário verificar se as relações gerais ou únicas são essenciais, o que requer que se identifique o que tais relações poderão ser.

Indicadores

1. Observam-se relações entre as ideias específicas do currículo no manual.
2. O manual explica e desenvolve adequadamente as relações identificadas
3. O manual incentiva os alunos a fazer e/ou a explicar as relações identificadas.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla o indicador 1 e 2.

Baixo – O manual contempla 1 dos 3 indicadores.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

IV.5. Demonstra/modela procedimentos: O manual demonstra/modela competências ou como utilizar o que se aprende (ou inclui sugestões para os professores de como o fazer)?

Para que os alunos saibam o tipo e nível da performance esperada para uma determinada competência ou a aplicação conceptual desse conhecimento, eles precisam de ver exemplos. Isto é particularmente importante para comportamentos complexos como explicar como se resolve um problema, desenvolve uma generalização, argumento, ou prova, etc. Demonstrar ou modelar uma competência envolve: a) alguém que seja conhecedor para demonstrar ou modelar a competência; b) providenciar um comentário seguido a um texto acerca dos aspectos mais relevantes sobre o desempenho ou demonstração, e c) providenciar critérios para avaliar um bom desempenho.

Satisfazer este critério envolve verificar se a) a demonstração/modelagem é feita por um texto ou outros materiais (e.g. software, vídeo, etc., ou b) o manual inclui sugestões para os professores acerca de como o fazer nas suas salas de aula.

Indicadores

1. O manual demonstra (ou instrui os professores de como o fazer) o procedimento ou performance que se pretende.
2. A demonstração é clara e compreensível.

3. O manual dispõe de comentários que aponta para aspectos particulares da demonstração e/ou dispõe de justificações ou explicações para os passos dados.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla o indicador 1 ou 2.

Baixo – O manual contempla o indicador 1.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

IV.6. Promove a prática: O manual promove tarefas ou questões para os alunos praticarem as suas competências ou conhecimento numa dada variedade de situações?

Uma parte importante da aprendizagem da matemática consiste em dar aos alunos muitas oportunidades de utilizarem o seu conhecimento, em particular dando-lhes oportunidades de praticar utilizando objectos, relações, e eventos, resolvendo problemas, e aplicando o conhecimento em novas situações ou contextos. Mais ainda, a literacia significa que as pessoas conseguem utilizar (retirar) o seu conhecimento matemático quando se deparam com situações que não vêm rotuladas de “álgebra”, “geometria”, ou “estatística”, mas por exemplo como em argumentos políticos, discussões sobre literatura, ou andar na praia. Assim sendo, os alunos precisam de prática para conseguirem estabelecer relações com novas situações. Dar aos alunos oportunidades de praticar apenas calculando respostas em exercícios previsíveis não satisfaz de forma adequada este critério.

Indicadores

1. O manual inclui exercícios e tarefas apropriados segundo o currículo.

2. O manual providencia o número apropriado de exercícios e tarefas à prática.

3. O manual abrange uma variedade de contextos, incluindo tarefas e contextos habituais e originais, assim como práticas familiares.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla o indicador 1, a par com o indicador 2 ou o indicador 3.

Baixo – O manual contempla o indicador 1.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

CATEGORIA V: PROMOÇÃO DO PENSAMENTO DOS ALUNOS SOBRE A MATEMÁTICA

Não importa o quão claros podem ser os manuais na apresentação das ideias, os alunos (como toda a gente) irão criar o seu próprio significado., o qual pode ou não corresponder aos objectivos de aprendizagem estabelecidos. Os alunos necessitam de tornar explícito as suas ideias e raciocínio, submetê-los a uma pesquisa minuciosa, e remodelá-los se preciso. Esta categoria inclui critérios para verificar se o manual sugere formas de ajudar os alunos a expressarem-se, a pensar sobre as suas ideias, e reformá-las para melhor decifrem o mundo.

V.1. Encoraja os alunos a explicar o seu raciocínio: O manual inclui habitualmente sugestões para que cada aluno se expresse, justifique, apresente as suas ideias e de como obter feedback dos pares e do professor?

É importante fornecer oportunidades para que o raciocínio do aluno se torne claro para ele mesmo, para o professor, e para os outros alunos. Ao exprimir as suas ideias, através da escrita, do desenho, ou da linguagem, os alunos tornam-se mais cientes do que pensam. Isto pode estimular a que estabeleçam relações entre as suas ideias e as ideias apresentadas pelo texto ou pelo professor. Trocar ideias em pequenos grupos ou até em grupos maiores pode ser importante para o aluno perceber a diversidade de ideias que por vezes podem surgir, e que podem ajudar a clarificar as suas. O feedback dado pelo professor ou pelos pares é importante para ajudar o aluno a compreender os seus erros e a melhorar a qualidade das suas descrições, explicações ou modelos.

Para responder à 1ª parte deste critério é preciso examinar se o manual impele os alunos a expressar as suas ideias, quer por escrito, quer oralmente. Isso envolve, também verificar se o manual inclui momentos para que cada aluno expresse as suas ideias.

Para responder à 2ª parte do critério é preciso verificar se o manual inclui sugestões específicas para ajudar o professor a fornecer um feedback explícito, se inclui textos que directamente dá um feedback ao aluno, ou se fornece estratégias aos professores que podem utilizar para assegurar que cada aluno da turma recebe um feedback.

Indicadores

1. O manual encoraja os alunos a expressar as suas ideias acerca do currículo.
2. O manual encoraja os alunos não só a expressar mas também a clarificar, justificar e interpretar as ideias do currículo.
3. O manual fornece (ou inclui sugestões) um feedback explícito acerca das possíveis ideias dos alunos.
4. O manual inclui sugestões para os alunos ou para os professores de como utilizar as respostas dos alunos para diagnosticar erros ou dificuldades.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 4 indicadores.

Médio – O manual contempla o indicador 1, a par com 2 dos outros 3 indicadores

Baixo – O manual contempla pelo menos 1 dos indicadores.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

V.2. Guia o pensamento e a interpretação: O manual inclui sequências de tarefas e/ou questões que guiem a interpretação e o pensamento dos alunos acerca dos conceitos, competências e relações?

Experiências práticas com materiais, problemas, e exemplos de ideias matemáticas são úteis mas não suficientes. Os alunos precisam de tempo, oportunidades, e uma guia para retirarem um sentido dessas experiências. As actividades precisam de ser orientadas com sequências de questões que conduzam os alunos a fazer generalizações relevantes e a compreender relações. Da mesma forma, os alunos precisam de tempo, oportunidades, e um guia para encontrarem um sentido nas coisas que lêem e nas ideias que lhes são dadas a conhecer.

Para responder a este critério é necessário verificar se o manual inclui sequências de tarefas e questões que são específica e cuidadosamente escolhidas, para orientar o pensamento dos alunos acerca dos exercícios, problemas ou investigações.

Indicadores

1. O manual inclui tarefas e/ou questões específicas e relevantes para actividades relacionadas com o currículo.
2. O manual inclui sequências de questões e tarefas relacionadas entre si.
3. As questões ou tarefas guiam os alunos no pensamento e interpretação através de abordagens como:
 - a) preparar, introduzir e desenvolver ideias importantes;
 - b) ajudar os alunos a relacionar as suas próprias experiências com ideias matemáticas;
 - c) antecipar ou descobrir dificuldades comuns ou erros dos alunos.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla 2 dos 3 indicadores.

Baixo – O manual contempla pelo menos 1 dos indicadores.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

V.3. Encoraja os alunos a pensarem sobre o que aprenderam: O manual sugere formas de os alunos verificarem o seu próprio progresso?

Este critério sublinha a importância dos alunos olharem para trás e verificarem o seu progresso. Para responder a este critério é preciso verificar se o manual contém questões e tarefas que motivem os alunos a monitorizar a sua própria compreensão, ou inclui sugestões para os professores de como encorajar os próprios alunos a fazê-lo. Por exemplo, O que te provocou mais confusão hoje?, O que pensas que aprendeste e onde pensas que precisas de trabalhar mais?. Encorajar os alunos a monitorizar o seu entendimento deveria também abranger questões de como os alunos podem trocar as suas ideias. Por exemplo, Partilhaste alguma das tuas ideias hoje? Que evidência te persuadiu a fazê-lo?

Indicadores

1. O manual apoia os alunos na monitorização do seu progresso relativamente ao que nos diz o currículo (ou providencia sugestões específicas para os professores os apoiarem).
2. O manual questiona os alunos a pensar sobre se as suas ideias se desenvolveram ou modificaram.
3. O manual dá aos alunos a oportunidade de rever as suas ideias iniciais acerca dos Standards, com base naquilo que aprenderam.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla 2 dos 3 indicadores.

Baixo – O manual contempla pelo menos 1 dos indicadores.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

CATEGORIA VI: AVALIANDO O PROGRESSO DOS ALUNOS NA MATEMÁTICA

A avaliação providencia informação aos alunos acerca do que é importante, e aos professores do que foi aprendido. Do mesmo modo, a avaliação fornece informação para ambos sobre os ajustes que é necessário fazer no ensino e na instrução. Porque a avaliação é tão importante no processo de aprendizagem, deve estar de acordo com os objectivos de aprendizagem do currículo. Ainda, a avaliação deve dirigir-se às várias competências, aplicações, e contextos que reflectem o que se espera que os alunos aprendam. Tudo isto só é possível se a avaliação tiver lugar em todo o processo de ensino, não apenas no fim da unidade ou capítulo.

VI.1. Alinhamento da Avaliação: os itens ou tarefas de avaliação estão em consonância com as ideias, conceitos e competências do Currículo?

Este critério sublinha a necessidade de incluir itens de avaliação para cada ponto do currículo.

Indicadores

1. O manual fornece pelo menos uma tarefa avaliativa que se dirige a ideias específicas do currículo (o item de avaliação não deve ser respondível pela leitura, inteligência geral, ou por um “teste de sabedoria” individual).

2. O item avaliativo que se dirige ao currículo não requer outras ideias (mais sofisticadas).

3. Se o manual fornece um teste que é dado aos alunos, um determinado número de itens avaliativos deve corresponder ao conteúdo do currículo. Se o manual providencia um conjunto de itens de avaliação de qual o professor selecciona alguns, deve acontecer o mesmo com uma proporção adequada de itens avaliativos.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla o indicador 1 e 2.

Baixo – O manual contempla o indicador 1.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

VI.2. Avaliação através de aplicações: o manual inclui tarefas de avaliação que requerem a aplicação das ideias, competências ou conceitos do currículo, e evita permitir que os alunos encontrem uma saída (resposta) trivial, como a utilização de uma fórmula ou a repetição de um termo ou regra memorizados, sem no entanto as compreender?

Mais do que verificar se os alunos memorizaram determinados bits de informação, a avaliação precisa de testar o entendimento, o raciocínio e a aplicação do conhecimento matemático dos alunos. Para isso, o manual precisa de incluir tarefas que mobilizem os alunos para actividades similares àquelas que vão encontrar nas suas vidas fora da sala-de-aula. Pessoas letradas utilizam o conhecimento matemático para descrever, explicar, e prever fenómenos do mundo-real, resolver um problema prático ou discutir questões. De acordo, as tarefas avaliativas precisam motivar os alunos a fazer descrições, explicações, predições, e

esboços das questões. Isto, no entanto, não dita necessariamente o formato que a avaliação deve assumir. Por exemplo, a avaliação do uso do conhecimento dos alunos para explicar um conceito pode incluir o formato de escolha-múltipla ou de resposta estruturada.

Indicadores

1. O manual fornece tarefas de avaliação que focam a aplicação das ideias do currículo.
2. O manual inclui tarefas avaliativas que são familiares assim como tarefas originais.
3. Se o manual fornece um teste que é dado aos alunos, um determinado número de itens avaliativos foca a aplicação. Se o manual providencia um conjunto de itens de avaliação do qual o professor selecciona alguns, deve acontecer o mesmo com uma proporção adequada de itens avaliativos.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 3 indicadores.

Médio – O manual contempla 2 dos 3 indicadores.

Baixo – O manual contempla 1 dos 3 indicadores.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.

VI.3. Incorpora a avaliação na apresentação dos temas: há algumas avaliações incorporadas ao longo do currículo, com conselhos para os professores de como podem utilizar os resultados para escolher ou modificar actividades?

Este critério sublinha a necessidade da avaliação estar ao serviço da instrução na orientação do ensino e da aprendizagem. Este critério requer que os manuais incluam avaliações que possam ser utilizadas como instrumentos diagnósticos ou formativos, que por sua vez ajudam a determinar as carências dos alunos, mais propriamente do que instrumentos de graduação no final de cada unidade ou capítulo.

Para satisfazer este critério é preciso examinar se o manual:

- a) fornece tarefas de avaliação só no final da unidade, para classificar o conhecimento do aluno, ou se as fornece ao longo do caminho, para monitorizar o progresso do aluno;
- b) encoraja e orienta os professores a aprofundar as primeiras respostas dos alunos, a clarificar e a compreender as perguntas;

c) encoraja os professores a utilizar a informação retirada das avaliações para fazer decisões instrutivas acerca das ideias que precisam de ser mais trabalhadas com a turma toda, ou em pequenos grupos de alunos.

Indicadores

1. O manual possui avaliações incorporadas como parte da estratégia ou design instrutivo.
2. O manual inclui avaliações que fornecem oportunidades, encorajamento, ou orientação aos alunos, de como compreender mais profundamente as ideias do currículo.
3. O manual inclui sugestões ou orientações para os professores de como explorar o entendimento dos alunos das ideias do currículo.
4. O manual providencia sugestões específicas para os professores sobre como utilizar a informação retirada das avaliações para fazer decisões instrutivas acerca das ideias que precisam de ser mais trabalhadas.

Pontuação

Alta – O manual contempla os 4 indicadores.

Médio – O manual contempla o indicador 1, a par de 2 dos outros 3 indicadores.

Baixo – O manual contempla o indicador 1.

Nada – O manual não contempla nenhum dos indicadores.