Análise Psicológica (1991), 3-4 (IX): 373-378

Le Nombre, sa Genèse et son Utilisation par l'Enfant et l'Adulte (*)

MICHEL FAYOL (**)

Le nombre peut être abordé selon quatre grandes perspectives (Fayol, sous presse):

1. comme phénomène lié à une culture et à *une langue*, celle-ci fournissant à l'enfant une organisation linguistique tout prête qu'il s'agira d'assimiler (Cf. Hurford, 1987);
2. comme *outil* constitué de *procédures* plus ou moins sophistiquées: du comptage d'élèments d'une collection à dénombrer à la résolution d'opérations complexes (Fuson, 1988); procédures que l'enfant doit apprendre, exécuter, coordonner, contrôler;
3. comme *concept* mettant en jeu les notion sous-jacentes d'*ordinalité* et de *cardinalité* (Piaget & Szeminska, 1941); notions qui structurent le nombre et ses emplois sans que, nécessairement, celui qui y recout en soit conscient;
4. comme *instrument* utilisé dans le *résolutions de problèmes* (ici additifs) (Cf. Fayol, sous presse).

1. LE NOMBRE COMME FAIT LANGAGIER

L'utilisation de la numération orale ou écrite nécessite que l'enfant dispose d'un véritable sous-système linguistique et qu'il en maitrise parfaitement l'organisation. Celle-ci n'a été que très récemment étudiée par les linguistes. De la même façon, les psychologues n'ont abordé que depuis peu la genèse et le fonctionnement adulte de cet aspect de la numération.

1.1. *Le système linguistique de dénomination des nombres*

Lorsqu'on a affaire à un ensemble *fini* d'objets distincts, la meilleure manière de les dénommer consiste à leur attribuer un nom à chacun. Hélas, le nombre de quantités à dénombrer étant infini, la *lexicalisation* systématique est insuffisante et non pertinente. De là le recours, comme dans les autres secteurs de la langue, à la *syntaxe* qui permet de produire et comprendre un nombre infini de messages (ici renvoyant à des référents numériques) jamais produits ou entendus au auparavant.

Le sous-système français de dénomination des quantités numériques n'échappe pas à cette règle. Il comporte en effet, pour ce qui concerne la numération verbale (orale ou écrite) (Cf. Power & Longuet-Higgins, 1978):

- un lexique très limité: un, deux... neuf, dix, onze... seize, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, cent, mille...
- une *syntaxe* régie par des règles très strictes portant notamment sur l'ordre d'occur-

---

(*) Comunicação apresentada no IV Colóquio «Psicologia e Educação», ISPA, Outubro de 1988 (Nota da Redacção).

(**) L.E.A.D., 36 rue Chabot-Charny, 21000 Dijon, France.

rence des items lexicaux (comparer, par exemple, *vingt-quatre* et *quatre-vingts* ou *trois cents* et *cent trois*).

Le bien-fondé de cette approche linguistique apparait plus particullièrement lorsqu'on s'attache à comprendre certains troubles du calcul (Cf. les acalculies) et à étudier l'acquisition par l'enfant du sous-système de dénomination utilisé dans sa langue.

1.2. *L'étude des acalculies*

L'approche neuropsychologique (Deloche & Seron, 1987) met clairement en évidence que les acalculies constituent un groupe *hétérogène* de troubles du traitement des informations numériques.

On trouve en effet des atteintes *extrêmement spécifiques* affectant par exemple:

- les seules *opérations* ou la seule récupération en mémoire des résultats (auxquels cas, le sujet est obligé de compter systématiquement),
- la seule *compréhension* des dénominations (orales ou bien écrites),
- la seule *production* (orale ou écrite).

Il ne semble pas y avoir de «capacité numérique générale», mais plutôt des «*modules de traitement*» très spécialisés effectuant chacun un certain type d'intervention sur un certain type de représentation.

On a ainsi réussi à identifier des troubles différenciés affectant de manière spécifique tantôt le lexique de base de la numération (par exemple, sujets auxquels on dicte 8 ou 35 et qui écrivent respectivement 3 ou 42) tantôt la syntaxe (sujets auxquels on dicte 6231 et qui écrivent 600020031).

L'étude de ces erreurs systématiques tend à montrer que le lexique de la numération s'organise, dans une langue comme le Français, en trois ensembles: les unités (de un à neuf), les «particuliers» (de onze à seize), les dizaines (de dix à soixante; en Français de France). Les sujets tendent soit à substituer l'un à láutre deux éléments d'un même ensemble, (3 5; 11 14...) soit à passer d'un ensemble à un autre en conservant le rang (4 14 ou 40; 17 70...).

Or, cette organisation qui se manifeste à travers les pathologies doit être acquise. Cela nécessite plusieurs années avant que l'enfant ne parvienne á maîtriser la structure linguistique de la dénomination des nombres en Français.

1.3. *L'étude de la genèse*

L'approche linguistique comme la perspective neuropsychologique mettent en évidence la double composante de la numération verbale: un lexique et une syntaxe.

Ces deux aspects, l'enfant va devoir se les approprier en commençant par le premier. Ensuite, lorsque la suite numérique utilisée deviendra suffisamment «longue», il lui sera possible de découvrir la combinatoire syntaxique.

L'étude de l'acquisition de la suite numérique (Fuson, Richards & Briars, 1982; Fuson, 1988) révèle qu'elle s'effectue selon les lois-classiques-de l'apprentissage sériel de listes de mots n'entretenant entre eux aucune relation. C'est ainsi que les items du début de la liste (un, deux, trois, quatre...) sont trés tôt acquis sans erreur de dénomation ou d'ordre. Peu à peu, en fonction du corpus et des sollicitations, la «taille» de la suite s'agrandit et les dénomination se font de plus en plus conventionnelles et stables. On relève toutefois de très importantes différences inter-individuelles. Certaines — relativement faciles à éliminer — tiennent à la plus ou moins grande fréquence d'exposition. D'autres semblent plus liées à la variété des rythmes d'acquisition.

L'accès à la combinatoire syntaxique est beaucoup plus tardif. Cela s'avère surtout en Français (et en Anglais) du fait que la syntaxe n'est utilisée qu'à partir de six-sept.

Or, la plus ou moins grande maîtrise de la suite verbale des dénominations conditionne dans une large mesure l'utilisation que le sujet peut en faire. Ainsi, à un certain niveau, la résolution de problémes additifs passe par le dénombrement intégral un à un des collections *physiquement et visiblement réunies*. En revanche, à une étape ultérieure, les mêmes problèmes seront résolus par comptage mental à partir du cardinal d'une des deux collections (4+3 4 5(+1) 6(+2) 7(+3)).

L'accès au code écrit ne parait pas soulever de difficultés particulières tant que l'on s'en tient aux quantités allant de 0 à 9. Les problèmes surgissent avec la notation *positionnelle* et, notamment, avec le rôle qu'y joue le *zéro* (Cf. Perret, 1985). Ils apparaissent également avec l'usage des signs d'opérations (+/-/x/:/=) qui semblent, très longtemps, interprétés en termes d'actions. Il s'ensuit des erreurs consécutives à certains types d'utilisation (par exemple ?+b=c est beaucoup plus complexe que a+b=?).

2. LES PROCEDURES DE QUANTIFICATION

Lorsqu'on doit identifier le nombre d'éléments que comporte une collection, on dispose de trois grandes catégories de procédure: l'évaluation globale, rapide mais imprécise; le «subitizing», rapide, très précis, mais portant sur des petites quantités (de 1 á 3 coup sûr, peut-être 4 voire 5); le comptage. Bien que le «subitizing» ait fait l'objet de plusieurs recherches au cours de la derniére décennie, nous nous limiterons ici à la seule étude du *comptage.*

Le comptage un à un des éléments d'une collection nécessite que le sujet (1) pointe — du doigt ou des yeux — un à un tous les éléments de la collection sans en oublier ni en recompter un seul, (2) égrène la suite verbale des noms de nombres sans en omettre ni sans se tromper d'ordre, (3) coordonne ces deux activités.

Or, des recherches successives ont montrés que chacun de ces aspects, loin de pouvoir être considéré comme élémentaire, présente pour l'enfant des defficultés.

Ainsi, le «simple» ponintage exhaustif et non répétitif de tous les éléments d'une collection est loin d'être effectué sans erreur par les enfants. Selon la taille des collections et leur disposition spatiale on relève plus ou moins d'oublis ou d'itérations.

Les observations convergentes mettant en évidence des différences très importantes de performance chez les mêmes enfants confrontés à des tâches de dénombrement poutant approximativement équivalentes (Fayol, 1985) ont conduit Gelman à proposer une théorie à la fois très puissante et très ingénieuse du développement des capacités de dénombrement.

Selon Gelman (Gelman & Gallistel, 1978; Gelman & Meck, 1983), le comptage repose sur *cinq principes*: (a) le principe de stricte correspondance selon lequel à chaque élément de la collection dénombrée doit correspondre un et un seul nom de nombre, (b) le principe d'ordre strict en vertu duquel l'ordre d'énonciation des éléments de la suite verbale (un, deux, trois...) doit être strictement respecté, (c) le principe de cardinalité selon lequel le dernier nom de nombre fourni (p. ex. *huit*) lors d'un dénombrement de collection représent le cardinal de la collection, (d) le principe d'abstraction qui stipule que le cardinal d'une collection n'est pas affecté par le caractère hétérogéne (vs homogène) de ses éléments, (e) le principe d'ordre de traitement indifférent selon lequel, quel que soit l'ordre de prise en compte des éléments d'une collection, le cardinal reste identique.

Gelman et ses collaborateurs ont pu montrer que chacun de ces principes, pris isolément, était compris et mis en oeuvre dès 3-4 ans. Les enfants de cet âge sont en effet capables de repérer et de corriger les erreurs commises par une «poupée» concernant chacun des cinq principles. Selon Gelman, c'est donc la coordination des principes lors du dénombrement qui pose problème. L'enfant, dans l'obligation d'activer, d'exécuter et de contrôler l'exécution de l'ensemble serait «débordé» par la tâche et se tromperait d'autant plus que la taille de la collection croîtrait et/ou que les contraintes extérieures (par exemple la disposition spatiale) introduiraient des obstacles supplémentaires.

La conception de Gelman est très ingénieuse. Elle constitue sans doute actuellement la théorie la plus complète. Toutefois, elle présent deux types de faiblesse. D'une part, l'origine et le développement des cinq principes ne sont pas étudiés. D'autre part, certains aspects de la «maîtrise» des principes ont été abordés trop sommairement. Des résultats récents (Briars et Siegler, 1984) montrent que, au moins pour certains principes, Gelman a sans doute été un peu optimiste.

Par ailleurs, le problème se pose de l'articulation du comptage avec la conservation.

3. LA CONSERVATION

Quel que soit le domaine concerné, l'accès à la conservation revient à distinguer les transformations qui affectent une qualité (la numérosité par exemple) de celles qui ne la modifient pas. Ainsi, en ce qui concerne le nombre, l'addition et la soustraction d'éléments changent la cardinalité alors que la modification de la disposition spatiale ne l'affecte pas.

Or, Piaget et Szeminska (1941) ont montré que jusqu'à environ 6 ans, les enfants, soumis à une épreuve de conservation du nombre répondent en prenant pour critére non pas la numérosité mais la disposition spatiale des collections.

Ainsi, un ensemble (A) sera considéré comme ayant «plus» d'éléments qu'un autre (B) du simple fait que la longueur de **A** est supérieure à celle de **B**, même si, par ailleurs, **A** comporte moins d'éléments que **B**.

De très nombreuses expériences ont confirmé les observations de Piaget. On a montré que, à 4-5 ans, la longueur jouait systématiquement le rôle d'un leurre tendant à infléchir les jugements dans un certain ses. Toutefois, les raisons pour lesquelles il en va ainsi sont moins claires. Des travaux récents semblent montrer qu'interviennent au moins deux facteurs: d'une part, la formulation; d'autres part, la clarté (aux yeux de l'enfant) du critère de décision. En effet, lorsqu'un entraînement préalable — souvent très bref — attire l'attention de l'enfant sur la numérosité, les réponses de conservation deviennent très vite beaucoup plus fréquentes. Ainsi, la correspondance terme-à-terme visualisée tout comme le dénombrement préalable induisent des réponses de conservation (Michie, 1984).

Cependant, les relations entre comptage et conservation du nombre ne sont pas simples. On peut, à la fois, montrer que la pratique des activités arithmétiques favorise l'accès aux opérations logiques (Clements, 1984) et remarquer que les performances au dénombrement rendent peu plausible un étayage de la conservation sur la pratique de comptage (Cooper, 1984; Saxe & Sicilian, 1981). De fait, les erreurs de dénombrement sont, à 4-5 ans, particulièrement fréquentes alors même que les sujets qui les commettent en sont particulièrement inconscients. On voit donc mal comment le comptage pourrait, *directement*, influer sur l'accès à la conservation.

4. LA RESOLUTION DE PROBLEMES ADDITIFS

Les recherches conduites au cours de la dernière décennie ont mis en évidence l'impact d'une série de facteurs sur la plus ou moins grande facilité de résolution de problèmes additifs. Ces facteurs se regroupent en deux grandes catégories: la sémantique des problèmes d'une part; les modalités de présentation d'autre part.

4.1. *La sémantique des problèmes*

Les caractéristiques sémantiques des problèmes concernent les connaissances conceptuelles relatives aux accroissements, diminutions, combinaisons et comparaisons d'ensembles d'éléments. Leur prise en compte a amené divers auteurs à proposer des taxonomies de problèmes. Les deux classifications les plus connues sont, en France, celle de Vergnaud (1982) et, aux Etats-Unis, celle de Carpenter et Moser (1982). La première est certainement la mieux fondée et la plus exhaustive. Il reste que c'est la seconde qui est la plus utilisée, vraisemblablement en raison de la langue anglaise. Ainsi, nous réfèrerons-nous essentiellement à celle-ci.

La classification américaine distingue quatre catégories de problèmes: Changement, Comparaison, Combinaison, Egalisation. Le problème était évidemment, pour les auteurs, d'établir la «validité psychologique» de ces distinctions. La question soulevée peut-être ainsi formulée: les problèmes relevant d'une même catégorie sont-ils résolus de la même manière; manière différente de celle utilisée pour les problèmes d'autres catégories.

Les recherches empiriques conduites dans cette perspective ont montré que, conformément aux attentes des auteurs, les taux de réussites varient d'une catégorie à l'autre. Par ailleurs, l'étude du développement fait apparaitre certains problèmes comme résolus avant d'autres (Riley, Greeno & Heller, 1983). Des recherches plus précises ont également mis en évidence que les procédures de résolution changent, au moins chez les plus jeunes, en fonction des types de problèmes.

Toutefois, les catégories sémantiques ainsi distinguées ne suffisent pas à rendre compte de la diversité des performances. Une autre variable intervient: la nature de l'inconnue. Par exemple, dans les problèmes de type changement (exemple: Paul avait **x** billes. Alain lui a donné **y** billes. Paul a maintenant **z** billes), les taux de réussite et les procédures de résolution diffèrent selon que la recherche porte sur **z** (état final), **y** (la transformation) ou **x** (état initial).

Les données disponibles font donc apparaitre l'impact d'au moins deux variables: la sémantique des problèmes (ou l'organisation relationnelle selon Vergnaud) d'une part; la nature de l'inconnue d'autre part. Toutefois, ces deux facteurs ne suffisent pas à rendre compte de l'ensemble des phénomènes observés. Il convient de considérer aussi les modalités de présentation des énoncés.

4.2. *Les modalités de présentation*

Une première série d'observations, malheureusement peu théorisées et peu nombreuses, font apparaitre que, au moins chez les enfants jeunes, la présentation matérielle des énoncés joue un rôle dans la sélection des procédures de résolution. Ainsi, la présence de matériel (jetons...) ou d'illustrations (images...) semble affecter les performances. Des études plus précises sont toutefois nécessaires pour qu'on comprenne mieux comment et pourquoi s'opèrent ces influences.

Une deuxième série d'observations, beaucoup mieux documentée, fait ressortir l'impact des formulations sur, à la fois, les performances et les procédures y conduisant. Ainsi, Fayol et Abdi (1986) ont observé d'importantes différences de comportements chez des enfants de 6, 8 et 10 ans selon que la question des problèmes se trouvait en début ou en fin d'énoncé. Ainsi encore, De Corte et Verschaffel (1985) ont réussi à induire une sensible amélioration des performances en reformulant certains énoncés; la reformulation tendant à rendre explicites les présupposés.

Ainsi, les modalités de formulation se révèlent, y compris chez les adultes, aussi importantes que la sémantique des problèmes en ce qui concerne la détermination des procédures de résolution et les réussites qui s'ensuivent.

5. CONCLUSION

Après de très nombreuses années marquées, en psychologie, par des recherches utilisant des matériaux abstraits (syllabes sans signification; mots sémantiquement indépendants les uns des autres...) un certain nombre de travaux ont, au cours de la dernière décennie, entrepris d'explorer les activités complexes: compréhension et production de textes (Fayol, 1985); résolution de problémes; etc... Ces approches ont bénéficié et bénéficient encore largement des apports théoriques et pratiques émanant de la linguistique, de l'intelligence artificielle, des mathématiques, etc... Elles ont — au moins dans certains secteurs — abouti à des conceptions d'ensemble cohérentes et bien articulées avec les données empiriques.

A notre connaissance, deux domaines ont ainsi particulièrement évolué: la compréhension de textes et le développement du nombre. Cela ne signifie pas que ces champs sont désormais «clos». Bien au contraire. En revanche, cela implique que les nouveaux problèmes soulevés doivent être posés en référence à un corps de connaissances désormais incontournable.

Sans aucun souci d'exhausivité, nous souhaiterions, pour conclure, soulever quelques unes des questions qui surgissent:

- quel impact ont — si elles en ont un — les caractéristiques linguistiques liées à chaque langue sur la conceptualisation du nombre? A première vue incongrue, cette question ne parait plus aujourd'hui ni triviale ni superflue;
- quel impact ont, sur la conceptualisation effectuée par les enfants, les «pratiques» qui leur sont proposées et les interactions sociales au sein desquelles elles se déroulent? Les phénomènes que nous observons au cours du développement ne sont-ils pas *aussi* (surtout?) les résultats d'un apprentissage socio-cognitif qu'il faut comprendre et modéliser quant au fonctionnement cognitif du sujet?
- quel(s) rapport(s) entretiennent les notions mathématiques telles que les conceptualise cette discipline et les procédures et autres «théorèmes en action» (Vergnaud, sous presse) utilisés par les sujets?

- comment intégrer en un modèle unique l'impact de la sémantique des problèmes et celui des formulations?
- quel statut accorder à la conservation et comment rendre compte de ses rapports avec les activités numériques?

... telles sont quelques unes des voies de recherche.

REFERENCES

Carpenter, T.P. & Moser, J.M. (1982). The development of addition and substraction problem-solving skills. In *Addition and substraction: A cognitive perspective* (T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg, Eds.), Hillsdale: Erlbaum.

Cooper, R.G. (1984). Early number development. In *Origins of cognitive skills* (C. Sophian, Ed.), Hillsdale: Erlabaum.

De Corte, E., Verschaffel, L. & De Win, L. (1985). Influence of rewording verbal problems on children's problem representations and solutions. *Journal of Educational Psychology*, 77(4): 460-470.

Deloche, G. & Seron, X. (1987). *Mathematical disabilities*. Hillsdale: Erlbaum.

Fayol, M. (1985a). *Le récit et sa construction*. Neuchâtel, Paris: Delachaux & Niestlé.

Fayol, M. (1985b). Nombre, numération et dénombrement: Que sait-on de leur acquisition? *Revue Française de Pédagogie*, 70: 59-77.

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre*. Neuchâtel, Paris: Delachaux & Niestlé.

Fayol, M. & Abdi, H. (1986). Impact des formulations sur la résolution de problèmes additifs chez l'enfant de 6 à 10 ans. *European Journal of Psychology of Education*, 1(1): 41-58.

Fuson, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New-York: Springer-Verlag.

Fuson, K.C., Richards, J. & Briars D.J. (1982). The acquisitions and elaboration of the number word sequence. In *Children's logical and mathematical cognition* (C. Brainerd, Ed.), New-York: Springer-Verlag.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge: C. U. P.

Gelman, R. & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skills. *Cognition*, 13: 343-359.

Harford, J.R. (1987). *Language and number*. Oxford: Basil Blackwel.

Michie, S. (1984). Why preschoolers are reluctan to count spontaneously. *British Journal of Developpemental Psychology*, 2: 347-358.

Perret, J.F. (1985). *Comprendre l'écriture des nombres*. Berne: Peter Lang.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant*. Neuchâtel, Paris: Delachaux & Niestlé.

Power, R.J.D. & Longuet-Higgins, H.S. (1978). Learning to count. *Proceedings of the Royal Society of London*, B 200, 391-417.

Riley, M.S., Greeno, J.G. & Heller, J.I. (1982). Developpement of children's problem-solving ability in arithmetic. In *The developpement of mathematical thinking* (H.P. Ginsburg, Ed.), New-York: Academic Press.

Saxe, G. & Sicilian, S. (1981). Children's interpretation of their counting accuracy. *Child Developpement*, 52: 1330-1332.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thougt involved in addition and substraction problems. In *Addition and substraction: A cognitive perspective* (T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg, Eds.), Hillsdale: Erlbaum.