INSTITUTO SUPERIOR DE PSICOLOGIA APLICADA

MESTRADO EM PSICOLOGIA EDUCACIONAL

2000 / 2002

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

"Estudo das dificuldades encontradas em 2000 pelos alunos na resolução da Prova de Aferição de Matemática – 4.º Ano"

Maria José da Cruz Nunes Guerra – n.º 1712

ORIENTADOR: Profª. Doutora Glória Ramalho

Instituto Superior de Psicologia Aplicada

SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO DIRIGIDO POR:

Profª. Doutora Glória Ramalho

Instituto Superior de Psicologia Aplicada

Outubro de 2002

AGRADECIMENTOS

Os meus sinceros agradecimentos a todos os que me apoiaram na elaboração desta dissertação. Gostava ainda de dirigir um obrigado muito especial às seguintes pessoas:

- À Profª Doutora Glória Ramalho, pelos seus ensinamentos, conselhos, sugestões e incentivos, e pela dedicação, disponibilidade e boa disposição que sempre mostrou ao longo da realização deste trabalho.

- Aos Alunos, Professores e Conselhos Directivos das escolas que colaboraram neste estudo, sem os quais ele não teria sido possível.

- Aos meus amigos, em especial à Zé Rento, à Vanda, à Sara e ao Carlos Dias pela ajuda dada ao longo da realização desta dissertação, quer no apoio a nível informático quer na transcrição dos protocolos.

- Às minhas colegas de mestrado, por tudo aquilo que aprendi com elas.

- Aos meus pais, pelos sacrifícios que fizeram para que os meus sonhos se pudessem realizar.

- Por fim, aos meus filhos João e Tiago, pelas horas que passaram sem a mãe.

A todos o meu sincero obrigado !

ÍNDICE

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Esta dissertação é um estudo sobre as dificuldades e os erros dos alunos do 4° ano de escolaridade na realização de 14 itens das provas de aferição de Matemática de 2000, que tinham revelado mais dificuldade.

Na análise das concepções e dificuldades dos alunos tivemos como referência os estudos de vários autores, nomeadamente Piaget, Vergnaud, Vygotsky, Brissiaud, Borasi, entre outros.

Vergnaud (1986) chama a atenção para a importância da análise dos erros, pois estes fornecem indicadores do modo como se está a desenrolar o conhecimento.

Borasi (1987) considera os erros como meios poderosos de diagnóstico das dificuldades de aprendizagem, podendo ser utilizados como instrumentos educacionais no ensino da matemática.

O estudo é um estudo descritivo, com uma preocupação secundária de comparação entre escolas de meio rural e de meio urbano.

A amostra é constituída por 118 alunos de 7 escolas da zona interior centro do país. A amostragem das escolas foi de conveniência. As idades variaram entre 9 e 12 anos, mas a maioria tinha 10 anos.

Os instrumentos utilizados foram a entrevista individual de tipo piagetiano audiogravada, e um questionário, constituído por 10 questões.

A análise dos resultados foi realizada tendo em conta simultaneamente as produções escritas e os protocolos resultantes das entrevistas. Oito dos 14 itens foram sujeitos a uma análise de conteúdo. As respostas dos alunos aos questionários foram também objecto de uma análise de conteúdo.

As dificuldades encontradas residiram em: i) identificar números com zeros em posições intermédias; ii) descrever, com rigor, sólidos geométricos; iii) utilizar a noção de perímetro; iv) converter unidades de medida; v) realizar operações com números decimais; vi) utilizar processos sistemáticos na contagem de possibilidades em exercícios que envolviam a combinação de vários objectos segundo uma regra enunciada.

O estudo termina com a apresentação de algumas implicações, tanto a nível pedagógico como a nível de futuras investigações.

INTRODUÇÃO

Por vezes, ouve-se dizer que "hoje" as crianças sabem menos do que antes ou que agora não se ensina tão bem como antigamente. Porém, estas afirmações são mera opinião e carecem de fundamentação.

Em 1992, através do despacho normativo 98-A/92, foi introduzida uma modalidade designada por avaliação aferida, pretendendo-se criar um conjunto de procedimentos que permitissem obter informações, o mais rigorosas possível, sobre uma parte significativa das aprendizagens efectuadas pelos nossos alunos.

Já em 2001 o novo Despacho Normativo nº 30/2001 vem, em relação a este ponto, reafirmar os princípios estabelecidos no despacho anterior.

Apareceu, assim, a avaliação aferida causando alguma controvérsia no seio da comunidade educativa (professores, alunos e pais). Estava lançada a plataforma para se poder saber como aprendem e o que sabem os nossos alunos e como reagem a uma prestação desta natureza.

No ano lectivo 1999/2000 foram lançadas as provas de aferição a nível nacional, onde todos os alunos do 4º ano de escolaridade da Escola Pública e das escolas Particulares que assim o desejaram, foram sujeitos a provas nas áreas de Língua Portuguesa e de Matemática. Estas provas tinham como objectivo aferir os conhecimentos dos alunos deste grau de ensino nestas duas áreas fundamentais do saber.

O objectivo geral que presidiu à realização deste estudo consistiu em compreender as dificuldades sentidas por alunos do 4º ano na realização das provas de aferição de Matemática de 2000, em particular em 14 itens que tinham revelado um maior grau de dificuldade.

Os objectivos específicos foram: i) identificar as estratégias utilizadas na resolução dos itens e ii) detectar as dificuldades sentidas pelos alunos durante essa resolução.

Os erros cometidos pelos alunos são indicadores importantes da compreensão que relevam da tarefa que lhes é solicitada e da sua forma de pensar relativamente a ela. Uma abordagem directa do estudante durante esta resolução, como refere Ginsburg (1983) permite, adicionalmente, ter uma maior sensibilidade relativamente às estratégias utilizadas e às dificuldades sentidas no percurso desta resolução.

Na análise das concepções e dificuldades dos alunos tivemos como referência a teoria dos campos conceptuais de Vergnaud (1994). De acordo com esta teoria, a explicitação de um conceito, em linguagem natural ou através de qualquer outro sistema simbólico modifica profundamente o estatuto dos conhecimentos. Esta explicitação implicaria uma reflexão por parte de um indivíduo sobre o que fez e/ou pensou, tomando consciência do que fez, mostrando quais os processos mentais utilizados e quais as dificuldades sentidas.

A chave é considerar a acção do sujeito em situação, e a organização da sua conduta. O funcionamento cognitivo do sujeito em situação depende do estado dos seus conhecimentos, implícitos ou explícitos.

É necessário, pois, conceder uma grande atenção ao desenvolvimento cognitivo, às suas continuidades, às suas rupturas, às suas passagens obrigatórias, à complexidade relativa das classes de problemas, dos procedimentos, das representações simbólicas, à análise dos principais erros e dos principais fracassos (Vergnaud, 1991).

Vergnaud (1989) na linha de Vygotsky, refere também que a interacção social é uma condição necessária para a construção do saber, sendo facilitadora do processo de desenvolvimento cognitivo dos indivíduos. Porque é através da interacção social que ocorre toda e qualquer construção dos saber, pois cada ser nunca está sozinho, faz parte do social.

A criança recebe dos que a rodeiam uma série de instrumentos socioculturais, dos quais se vai apropriando, progressivamente, por um processo de internalização. Neste contexto assumem particular relevância as interacções que a criança estabelece com familiares, amigos e professores, pois é através dessas interacções que lhe é possibilitado o acesso aos meios necessários ao seu desenvolvimento (Vygotsky, 1934/2001).

O desenvolvimento de uma criança é inerente à sua participação em actividades socioculturais: as crianças desenvolvem capacidades em contextos com características e estruturas específicas, e novas formas de pensar e de agir dependem do conteúdo e estrutura dos contextos em que novos processos cognitivos emergem (Rogoff, 1995)

Os contextos socioculturais em que as crianças se desenvolvem – família, escola e comunidade – são muito importantes porque a interacção com outras pessoas permite que estas assistam a criança no seu desenvolvimento, pela orientação da sua participação em actividades relevantes, pela ajuda na compreensão de novas situações, na estruturação das suas tentativas de resolução de problemas e na ajuda a assumir responsabilidades. Este processo nem sempre é explícito e com o objectivo de instruir, mas aparece muito frequentemente na organização e no desenrolar das actividades do dia-a-dia. Estas experiências estão culturalmente organizadas e as crianças constróem representações generalizadas que vão organizar toda a sua actividade comunicativa e cognitiva.

Na mesma linha, Brousseau (1989) fala da relação professor aluno como envolvendo um "contrato didáctico", um jogo de expectativas recíprocas entre professor e alunos. Nesta interacção a comunicação, em especial a linguagem, tem um papel fundamental pois, segundo Vygotsky, a linguagem é a maior fonte de planificação e de controle da acção.

Nesta investigação procurámos analisar as competências e as concepções dos alunos face a algumas das situações problemáticas incluídas na prova de aferição de Matemática, nomeadamente sobre números e operações, grandezas e medidas, geometria, espaço e forma, e como fazem a selecção e a organização dos dados fornecidos.

Esta dissertação consta de quatro capítulos.

No primeiro capítulo faz-se uma revisão das principais Teorias do Desenvolvimento Cognitivo, em que se aborda igualmente o conhecimento existente nas aprendizagens de domínios específicos da Matemática, como sejam, os números e operações, grandezas e medidas, geometria, espaço e forma, e como fazem a selecção e a organização dos dados fornecidos em situações problemáticas.

Aborda-se, também, a problemática dos erros e das dificuldades dos alunos sob a perspectiva de vários autores ao longo dos anos mais recentes.

Este conhecimento é fundamental para que, em situação de sala de aula, se possa lidar com as dificuldades e os erros que se conhecem e se antecipam, favorecendo uma melhor aprendizagem do aluno.

No segundo capítulo descrevemos a metodologia utilizada. Começamos com a definição do problema, os seus objectivos e a caracterização da amostra seleccionada. Depois passamos à descrição dos instrumentos e dos procedimentos utilizados.

No terceiro capítulo apresentamos os resultados obtidos; uma primeira secção ilustra os resultados uma vez aplicados os critérios de classificação das provas, na segunda secção mostraremos a análise de conteúdo realizada e a discussão dos resultados obtidos nas entrevistas e numa terceira secção abordaremos a análise de conteúdo dos questionários incluídos.

No quarto e último capítulo discutimos os resultados apresentados no capítulo anterior e confrontaremos esses resultados com a revisão da literatura efectuada; terminamos com a apresentação das conclusões tendo em conta as vantagens, os limites deste estudo e as suas implicações pedagógicas. No final apresentaremos propostas educacionais de acordo com os resultados obtidos.

CAPÍTULO 1

ABORDAGEM TEÓRICA

Esta investigação tem por base os estudos de vários autores, tais como Piaget, Vygotsky, Vergnaud e Brissiaud.

Por um lado Piaget com a sua Teoria Construtivista do Conhecimento, onde defende que toda a aprendizagem é uma construção pessoal.

Por outro lado Vygotsky, com o seu quadro teórico e a sua abordagem sócio-cultural, onde o autor defende as raízes sociais e culturais de toda e qualquer forma de conhecimento.

Por outro lado ainda Vergnaud com a sua análise naturalista das situações no próprio contexto onde ocorrem, abandonando as situações altamente elaboradas em favor de um estudo o mais próximo possível do quotidiano dos sujeitos (Vergnaud, 1990).

Finalmente Brissiaud com os seus trabalhos sobre o ensino e a aprendizagem do cálculo e as suas implicações pedagógicas.

Serão também citados, outros autores que têm desenvolvido trabalhos de investigação na área da didáctica da Matemática, ajudando a uma melhor compreensão dos erros e das dificuldades dos alunos e do seu desenvolvimento intelectual, em diversas áreas do saber matemático, escolhidas de acordo com o instrumento utilizado.

As Implicações da Teoria de Piaget na Educação

Piaget era um psicólogo e um investigador do desenvolvimento, preocupado em descobrir as mudanças ontogenéticas no funcionamento cognitivo, do nascimento à adolescência, sendo por isso o fundador da Psicologia Genética.

Entendia a inteligência como um mecanismo de adaptação ao meio ambiente. Para ele o desenvolvimento da inteligência não é contínuo, desenvolvendo-se através de estádios sucessivos (estádio sensório-motor, estádio pré-operatório, estádio das operações concretas e estádio das operações formais). Estes estádios estavam organizados segundo uma ordem estável e eram considerados totalidades dinâmicas e integradoras, possuidoras de um mecanismo regulador de assimilação e acomodação que permitia a adaptação e o sucesso.

Os processos de assimilação e acomodação são estimulados pelo desequilíbrio, que continua a produzir mudanças nos esquemas, ao longo da vida.

O ponto de vista de Piaget é o de que uma nova construção é sempre realizada sobre uma construção anterior e que, com a desequilibração, é sempre possível o avanço das construções anteriores.

Baseou-se na ideia de que a criança, no seu desenvolvimento, constrói estruturas cognitivas sofisticadas que vão dos poucos e primitivos reflexos do recém-nascido até às mais complexas actividades do jovem adulto. De acordo com Piaget, a estrutura cognitiva é um "mapa" mental interno, um "esquema" ou uma "rede" de conceitos construídos pelo indivíduo para compreender e responder às experiências que decorrem dentro do seu meio ambiente.

Nos estudos que fez sobre a génese do número na criança, Piaget (1941) utilizou provas de conservação, seriação e inclusão, com o objectivo de verificar a relação existente entre o desenvolvimento das capacidades lógicas e o desenvolvimento das competências numéricas na criança. Verificou que o sucesso que se obtinha numa prova estava associado ao sucesso que se obtinha nas outras provas.

O conhecimento lógico-matemático é o conhecimento construído a partir das acções físicas ou mentais sobre os objectos. Os mecanismos por meio dos quais deriva o conhecimento lógico matemático chama-se abstracção reflexiva. A abstracção reflexiva ultrapassa sempre o observável e resulta em reorganização mental, implicando sempre em uma abstracção de um nível mais elementar para um nível mais alto.

Segundo Brainerd (1978), a abstracção reflexiva é um pensamento interno ou uma reflexão baseada no conhecimento disponível. No estádio formal, a reflexão interna pode resultar em conhecimento novo, numa nova construção. As crianças operacionais concretas não podem construir conhecimento novo, apenas a partir da reflexão interna. A experimentação e a interacção social têm, nesta fase, um papel muito importante.

Como refere Piaget, citado por Wadsworth (2001), em cada novo nível de desenvolvimento cognitivo, os níveis anteriores são sempre incorporados e integrados. A criança pré-operacional não se desfaz dos esquemas sensório-motores e adquire outros totalmente novos. Os esquemas sensório-motores são modificados e aperfeiçoados no decorrer do desenvolvimento pré-operacional. O processo de assimilação e acomodação assegura a contínua construção e reconstrução das estruturas cognitivas e afectivas. Os esquemas são ininterruptamente modificados ao longo da vida, desde o nascimento.

A Teoria Construtivista de Piaget

O princípio básico do construtivismo piagetiano é de que o conhecimento é uma construção pessoal e que a fonte da compreensão e do raciocínio da pessoa é o conhecimento construído.

O desenvolvimento resulta da interacção sujeito-meio (interaccionismo), interacção esta que leva à construção (construtivismo) de esquemas progressivamente mais complexos e integrados em estruturas de conjunto. O conhecimento não está nos objectos nem no interior do sujeito, mas é construído activamente pelo sujeito, a partir de acções físicas ou mentais sobre o mundo.

No processo de desenvolvimento, a teoria de Piaget defende uma continuidade funcional e distingue alguns factores que o regulam: maturação, experiência , acção educativa e equilibração. No entanto, para além do mecanismo de equilibração deve-se ter em conta a experiência física e a experiência lógico-matemática.

As crianças constróem o conhecimento a partir das suas acções exploratórias sobre o meio ambiente. Elas podem ser físicas (como a manipulação de objectos) ou mentais (como pensar sobre algo). As acções apresentam duas fases. A primeira envolve a exploração de um objecto ou de uma ideia. Se a exploração provocar a desequilibração, a exploração continua, porém, atenta em atribuir sentido (assimilação) ao que produziu o desequilíbrio. Isto é construção do conhecimento.

Piaget, segundo Kamii (1985), reconheceu fontes externas e internas de conhecimento. A fonte do conhecimento físico e social é, em parte, externa ao indivíduo. A fonte do conhecimento lógico-matemático, ao contrário é interna.

O conhecimento físico é construído através das acções sobre os objectos. O conhecimento lógico-matemático é construído a partir das acções exploratórias sobre os objectos, sendo a componente mais importante a acção da criança, e não o objecto em si. Os conceitos de número, comprimento e área não podem ser construídos apenas através da leitura ou de ouvir dizer sobre eles. E a construção do conhecimento social depende da acção exploratória na interacção com outras pessoas. Também este tipo de conhecimento não pode ser transmitido directamente apenas através de palavras ou de outros símbolos, mas sim a partir da exploração activa.

Edelstein (1992), disse, concretamente: "O grande princípio de instrução é o princípio de exploração (interpretado equivocadamente como descoberta), o que conduz a vários modos ou implementações do processo de construção" (p.169).

Nos últimos anos, a teoria de Piaget, tem sido criticada, entre outras coisas, por não reconhecer a importância dos factores sociais e culturais no desenvolvimento da inteligência. Muitos referenciam o trabalho do psicólogo russo Vygotsky, a fim de preencher o que foi interpretado como uma lacuna na obra de Piaget, dado que defende que o desenvolvimento não pode ser considerado independentemente dos contextos socioculturais em que ocorre.

A Perspectiva de Vygotsky sobre Desenvolvimento e Aprendizagem

Vygotsky (1934), foi também um grande pesquisador sobre o desenvolvimento do indivíduo. Contemporâneo de Piaget, construiu a sua teoria tendo por base o desenvolvimento do ser humano como resultado de um processo sócio-histórico, enfatizando o papel da linguagem e da aprendizagem nesse desenvolvimento.

A perspectiva de Vygotsky enfatiza a mediação histórico-cultural dos fenómenos psicológicos, sublinhando que a característica principal da actividade humana é ser socialmente mediada.

A sua teoria sublinha o papel da cultura no desenvolvimento e a sua natureza intrinsecamente social e defende como questão central a aquisição de conhecimentos pela interacção do sujeito com o meio.

De acordo com Vygotsky (1988) o processo de formação de conceitos remete para as relações entre pensamento e linguagem, para a questão cultural no processo de construção de significados pelos indivíduos, para o processo de internalização e para o papel da escola na transmissão de conhecimento, que é de natureza diferente daqueles aprendidos na vida quotidiana. Propõe uma visão de formação das funções psíquicas superiores como internalização mediada pela cultura.

Segundo Vygotsky (1987) o funcionamento do cérebro humano coloca o cérebro como a base biológica e as suas peculiaridades definem limites e possibilidades para o desenvolvimento humano. Estas concepções fundamentam a sua ideia de que as funções psicológicas superiores (por ex: linguagem, memória) são construídas ao longo da história social do homem, na sua relação com o mundo. Deste modo, as funções psicológicas superiores referem-se a processos voluntários, acções conscientes, mecanismos intencionais e dependem de processos de aprendizagem.

O desenvolvimento é encarado como o produto da interacção social; a criança recebe dos que a rodeiam uma série de instrumentos socioculturais, dos quais se vai apropriando, progressivamente, por um processo de internalização. De todos os instrumentos resultantes da evolução histórica e das conquistas culturais a que a criança tem acesso através da experiência social, dá um destaque particular à linguagem, poderoso instrumento de comunicação, mas também poderoso instrumento de mediação semiótica.

Mediação é a ideia central para a compreensão das suas concepções sobre o desenvolvimento humano como processo sócio-histórico. Enquanto sujeito do conhecimento, o homem não tem acesso directo aos objectos, mas acesso mediado, através de recortes do real, operados pelos sistemas simbólicos de que dispõe. Portanto enfatiza a construção do conhecimento como uma interacção mediada por várias relações, ou seja, o conhecimento não é visto como uma acção do sujeito sobre a realidade, mas através da mediação feita por outros sujeitos.

O outro social, pode apresentar-se por meio de objectos, da organização do ambiente, do mundo cultural que rodeia o indivíduo.

A linguagem, sistema simbólico dos grupos humanos, representa um salto qualitativo na evolução da espécie. Fornece os conceitos, as formas de organização do real, a mediação entre o sujeito e o objecto do conhecimento. É por meio dela que as funções mentais superiores são socialmente formadas e culturalmente transmitidas. Daí que, sociedade e culturas diferentes produzem estruturas diferenciadas.

A cultura fornece ao indivíduo os sistemas simbólicos de representação da realidade, ou seja, o universo de significações que permite construir a interpretação do mundo real. Ela dá o local de negociações no qual os seus membros estão em constante processo de recriação e reinterpretação de informações, conceitos e significações.

O processo de internalização é fundamental para o desenvolvimento do funcionamento psicológico humano. A internalização envolve uma actividade externa que deve ser modificada para tornar-se uma actividade interna; é interpessoal e depois torna-se intrapessoal.

O autor usa o termo função mental para se referir aos processos de pensamento, memória, percepção e atenção. Defende que o pensamento tem origem na motivação, no interesse, na necessidade, no impulso, no afecto e na emoção.

A génese social do pensamento é um outro elemento fundamental para Vygotsky. A evolução do pensamento é intrínseca à realização de actividades em cooperação com os parceiros sociais e por meio de instrumentos. É pela internalização progressiva destes instrumentos de cooperação que se constrói um pensamento consciente.

Como refere Vygotsky (1934;2001), o desenvolvimento do pensamento depende da linguagem, dos meios de expressão do pensamento e da experiência sociocultural da criança. O desenvolvimento do discurso interior depende basicamente do exterior; e a evolução da lógica da criança, como mostraram os estudos de Piaget, é uma função directa da sua linguagem socializada. O pensamento da criança – se assim se pode formular esta ideia – depende da aquisição dos meios sociais do pensamento, isto é, da linguagem. (p.147).

Existem, pelo menos, dois níveis de desenvolvimento identificados por Vygotsky: um real, já adquirido ou formado, que determina o que a criança já é capaz de fazer por si própria, e um potencial, ou seja, a capacidade de aprender com outra pessoa.

De acordo com um dos pressupostos de Vygotsky (1985), "o conhecimento humano nunca está acabado, é sempre possível fazer novas (re)construções". Essas reconstruções podem realizar-se com a ajuda do adulto, como defende este autor, através da sua Teoria de Zona de Desenvolvimento Potencial. O autor define-a como "a distância que vai entre o nível de desenvolvimento actual, determinado pela resolução independente de problemas e o nível potencial de desenvolvimento determinado pela resolução de problemas com o apoio de um adulto ou em colaboração com pares mais competentes" (Vygotsky, 1977, p.86).

A aprendizagem interage com o desenvolvimento, produzindo abertura nas zonas de desenvolvimento proximal (Z.D.P.) – distância entre aquilo que a criança faz sozinha e o que ela é capaz de fazer com a intervenção de um adulto; potencialidade para aprender, que não é a mesma para todas as pessoas; ou seja, distância entre o nível de desenvolvimento real e o potencial. Na Z.D.P. as interacções sociais são centrais, estando então, ambos os processos, aprendizagem e desenvolvimento, inter-relacionados; assim, um conceito que se pretenda trabalhar, por exemplo, em Matemática, requer sempre um grau de experiência anterior para a criança.

O desenvolvimento cognitivo, segundo este autor, é produzido pelo processo de internalização da interacção social com materiais, através da cultura, sendo que o processo se constrói de fora para dentro. É na troca com os outros e consigo próprio que se vão internalizando conhecimentos, papéis e funções sociais, o que permite a formação de conhecimentos e da própria consciência.

Assim, a escola é o lugar onde a intervenção pedagógica intencional desencadeia o processo ensino-aprendizagem. O professor tem o papel explícito de interferir no processo, provocando avanços nos alunos trabalhando com eles na zona de desenvolvimento proximal. O aluno não é só o sujeito da aprendizagem, mas, aquele que aprende junto ao outro o que o seu grupo social produz, como valores, linguagem e o próprio conhecimento.

Vygotsky, teve contacto com a obra de Piaget e critica-a porque acha que ele não deu a devida importância à situação social e ao meio. Ambos atribuem grande importância ao organismo activo, mas Vygotsky destaca o papel do contexto histórico e cultural (como já se referiu) nos processos de desenvolvimento e aprendizagem, sendo chamado de sociointeracionista, e não de interacionista como Piaget.

O Desenvolvimento do Conhecimento Matemático segundo Vergnaud

Vergnaud nos estudos que tem feito sobre os processos de transmissão e apropriação de conhecimentos matemáticos construiu uma teoria psicológica sobre a conceptualização do real, onde pretende explicar como o saber se constrói, a partir das concepções próprias de cada sujeito em situação concreta.

Considera que a estrutura do conhecimento de um sujeito é, primeiramente, um reflexo da estrutura do real, apreendida pelo sujeito ao tentar resolver os problemas concretos que se lhe põem – com o repertório e condutas que anteriormente operacionalizou e que o desenvolvimento cognitivo se faz por processos de desestabilização / acomodação / assimilação, como defendia Piaget.

Vergnaud (1983) propõe uma abordagem diferenciada do processo de construção de conceitos matemáticos. Adoptando uma perspectiva desenvolvimentalista e uma concepção interactiva de formação de conceitos, explica as razões da formulação dos campos conceptuais e do modo como estes interagem entre si, desvalorizando a realização de pesquisas de conceitos isolados.

Para Vergnaud o desenvolvimento dos conhecimentos práticos e teóricos de uma criança, faz-se através de "campos conceptuais", isto é, de um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de um conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito, de procedimentos e representações simbólicas em estreita conexão.

A importância de estudar os campos conceptuais e não os conceitos isolados deve-se essencialmente ao facto de uma dada situação:

- não pôr em jogo todas as propriedades de um conceito;
- não pôr igualmente em causa um único conceito;
- a sua análise implicar, geralmente, vários conceitos e as dificuldades dos alunos derivarem normalmente da conjugação, da articulação desses vários conceitos.

Desta forma "nasce" a sua Teoria dos Campos Conceptuais, em que refere não poder separar a análise do desenvolvimento cognitivo, da análise da experiência do sujeito, neste caso das suas aprendizagens escolares anteriores (Vergnaud, 1989).

A Teoria dos Campos Conceptuais

Tal como Piaget, Vergnaud (1986) também refere que o saber operatório resulta da construção individual, no entanto, acrescenta que pouco se sabe sobre este assunto, e que uma abordagem mais especifica sobre a formação de determinados conceitos se torna cada vez mais necessária porque as estruturas do pensamento não são independentes dos conteúdos dos conhecimentos.

A Teoria dos Campos Conceptuais analisa o processo de conceptualização da realidade através do estudo das continuidades e descontinuidades estruturais, presentes nas etapas de aquisição de conhecimentos, considerando sempre a especificidade dos conteúdos. Os conceitos aparecem como invariantes explícitos e os esquemas como invariantes intuitivos ou implícitos (Vergnaud, 1986).

Segundo Vergnaud (1994), a maior parte dos conhecimentos são competências. A única maneira de verificar os conhecimentos de um sujeito é precisamente analisando as suas condutas observáveis, em situação, e tentar alcançar o processo de raciocínio do sujeito face a uma situação problemática.

Um dos conceitos fundamentais de Vergnaud é o de "esquema", um conceito que vem de Piaget e que ele retoma, sendo considerado um conceito chave de toda a Psicologia Cognitiva.

Esquema é, segundo ele, a "organização invariante da conduta para uma determinada classe de situações apresentadas. O esquema é uma totalidade dinâmica funcional que integra as intenções (e como tal os objectivos e as antecipações), as regras de acção, os invariantes operatórios (conceitos em acção e teoremas em acção); e as possibilidades de inferência (em função de valores considerados pelas variáveis de situação)" (Vergnaud, 1994, p.156).

O esquema é composto de invariantes pessoais, noutras palavras, de conceptualizações próprias do sujeito face ao real, e é por meio destas conceptualizações elaboradas pelo sujeito que este reconhece (antecipa) as condições de aplicação das regras contidas no esquema, modelando a sua acção em função das variáveis situacionais (Vergnaud, 1989).

A conceptualização do real está então implícita nos esquemas elaborados pelos sujeitos, e é precisamente a estas conceptualizações que Vergnaud pretende ter acesso através da análise das condutas observáveis dos sujeitos em situação, e pelos pedidos de clarificação e explicitação que faz aos sujeitos, enquanto estes resolvem as tarefas propostas.

Vergnaud não pretende apenas que os sujeitos justifiquem os seus procedimentos mas, que falem alto aquilo que lhes vai na mente no momento em que estão a resolver uma situação, ou seja, pretende alcançar todo o processo de resolução de tarefas identificando simultaneamente quais os mecanismos cognitivos que estão envolvidos na situação.

Assim, para o funcionamento dos esquemas, verificamos que são fundamentais os invariantes operatórios, as regras de acção, as possibilidades de inferência (expectativas e predições), as antecipações e a sua eficiência depende sobretudo da adequação dos seus invariantes.

Invariante é, também, um conceito retomado da teoria de Piaget e foi recuperado por este autor enquanto conjunto de propriedades de um objecto ou de relações que são conservadas num conjunto de transformações.

Os invariantes são essencialmente componentes cognitivas dos esquemas; podemos descrevê-los em termos de objectos, propriedades, relações e proposições. São de natureza muito pessoal e conduzem-nos directamente às concepções pessoais dos sujeitos, as quais só poderão ser percebidas por nós através das palavras ou qualquer outro tipo de representação simbólica.

A eficácia de um esquema só poderá ser verificada de forma paralela pelas representações simbólicas (Vygotsky, 1962, cit. por Vergnaud,1990).

Conceitos-em-acto, Teoremas-em acto e Teoremas

Vergnaud (1983) distingue dois grandes grupos de invariantes operatórios: conceitos-em-acto e os teoremas-em-acto.

Por conceito-em-acto entende as categorias que permitem decidir sobre a informação pertinente numa situação.

E por teoremas-em-acto as proposições tidas como verdadeiras para o sujeito e que lhe permitem tratar essa mesma informação como adequada ao real.

Este autor salienta ainda a distinção entre pertinência e veracidade e acrescenta que a conceptualização consiste numa articulação entre conceitos e teoremas. Para que isso aconteça torna-se necessária a resolução de diversas situações que permitam que a criança exercite e progressivamente tome consciência dos esquemas subjacentes à sua acção.

Os teoremas-em-acto têm origem na actividade espontânea e intuitiva da criança. Podem considerar-se uma forma circunstancial de conhecimento, intrinsecamente ligada à acção e por isso, de validade limitada. O facto da sua natureza ser implícita explica porque em determinado momento do desenvolvimento não aparecem explícitos através de representações matemáticas ou outras.

À medida que a criança começa a ser confrontada com situações-problema diversificadas os teoremas-em-acto transformam-se em teoremas. Através da descoberta e compreensão progressiva das propriedades dos conceitos assiste-se então, à explicitação dos invariantes e à clarificação da relação entre o significado e significante, sendo a sua aplicação mais alargada.

É necessário, por isso, diversificar ao nível das situações, dos procedimentos e das representações para que este processo decorra da melhor maneira.

Para este autor, um dos problemas do ensino reside na passagem dos teoremas-em-acto a teoremas e vice-versa; uma vez que podem existir teoremas que não são teoremas-em-acto, ou seja, conhecimentos apreendidos que as crianças não conseguem aplicar durante a resolução de problemas concretos. O contrário também pode acontecer, quando a criança possui conhecimentos operatórios construídos espontaneamente que não se convertem em verdadeiros enunciados.

A dialéctica existente entre teoremas-em-acto, descobertos ou compreendidos intuitivamente pelas crianças em situação, e os teoremas, ilustra a ligação fundamental entre prática e teoria, necessária no decorrer do processo de conceptualização do real.

No quadro teórico dos campos conceptuais, a formação de um conceito deve ser estudada através de três conjuntos:

Conceito (S,I,Q)

S = conjunto de situações que dão sentido ao conceito;

I = conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito;

Q = conjunto de significantes que podem representar o conceito e as situações que o permitem aprender.

As situações e os invariantes são elementos comuns entre esquemas e conceitos. As representações simbólicas são próprias dos conceitos, uma vez que, um conceito está necessariamente explícito nos significantes linguísticos ou simbólicos, ao passo que, o funcionamento de um esquema não requer essa explicitação (Vergnaud, 1989).

A significação dos conceitos matemáticos não vem principalmente dos símbolos que os representam, mas das situações e das actividades que eles contribuem para conceptualizar.

Vergnaud (1990) garante que, sem o apoio dos conceitos de esquema e de situação, é impossível compreender como se processa a comunicação na aula de matemática, assim como, entender a aquisição dos conhecimentos matemáticos.

A apropriação das estruturas matemáticas é complexa e não se opera de forma linear, existindo descontinuidade durante o desenvolvimento das concepções e conflitos desencadeados por desajustamentos entre significantes e significados.

A linguagem tem um papel muito importante porque é ela que faz a interligação entre o nível conceptual e o real.

Vergnaud (1986) salienta 3 tipos de contribuições:

- de apoio ao nível da designação e identificação dos invariantes sejam eles objectos, propriedades, relações e teoremas; podendo também desencadear a utilização de esquemas disponíveis;
- de apoio durante a resolução de problemas como organizadora das sequências temporais necessárias;
- de apoio ao nível de antecipação, planificação e do controlo de acção.

A linguagem tem assim, funções de comunicação, de representação, de regulação do comportamento e favorece ainda a descoberta de novas relações pertinentes.

A função comunicativa e cognitiva da linguagem assume um papel determinante, a nível social, educativo e posteriormente como organizador do pensamento e da aprendizagem.

Vergnaud (1986) relembra ainda que o desenvolvimento se processa lentamente, e que uma organização em espiral, na qual se trabalham os mesmos conceitos aprofundando-os ao longo do tempo, à medida que se vão introduzindo outros novos, é a metodologia mais eficaz.

Defende também que o saber se forma a partir de problemas a resolver, quer dizer, de situações a dominar. Adopta uma definição alargada de "problema" considerando-o como qualquer situação que torne necessário descobrir relações, desenvolver actividades de exploração, formular hipóteses e proceder à sua verificação, afim de produzir uma solução.

Como conclusão pode afirmar-se que a teoria dos campos conceptuais tem por base o princípio da elaboração pragmática dos conhecimentos, possível através da diversidade de relações, problemas, procedimentos e representações simbólicas que cada criança vai construindo, durante o desenvolvimento de novas concepções e competências.

Segundo Brissiaud (1989) o trabalho sobre as representações é em si mesmo uma esquematização do real; ele favorece a tomada de consciência daquilo que depende do contexto e do que não depende, conduzindo assim a conhecimentos e a capacidades mais generalizadas. A Escola deve, portanto favorecer o trabalho sobre as representações.

Para ambos os autores as situações problemáticas são um meio muito importante para o desenvolvimento cognitivo das crianças porque através delas se pode verificar como pensam os alunos perante um determinado conteúdo programático.

Falar em conhecimento e em aprendizagem sem abordar a problemática das dificuldades e dos erros cometidos pelos alunos, durante o processo de aquisição de conhecimentos, é um pouco redutor na medida em que estas questões são como que um "motor" fundamental na procura de outras maneiras de fazer, mais significativas e motivadoras, que levem os alunos à compreensão dos conceitos.

A Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem tem abordado esta temática, através de numerosos investigadores e dos seus quadros teóricos, numa tentativa de explicar o porquê dos comportamentos observados e de compreender as dinâmicas da mudança, com vista ao desenvolvimento do aluno. Este é o conteúdo da próxima secção.

A Psicologia Cognitiva e o Erro

Aprender não é fácil, é um processo complexo de construção individual que se vai efectuando ao longo da vida à medida que o indivíduo se vai desenvolvendo. Por isso é normal aparecerem dificuldades e erros que devem ser identificados e trabalhados para que haja mudança, aprendizagem e desenvolvimento.

Piaget, foi um dos investigadores que estudou a construção do conhecimento com o objectivo de esclarecer o problema da génese do conhecimento científico e das relações entre o conhecimento empírico e o conhecimento lógico-matemático (Matta, 2001, p.58).

Para Piaget (1967) o desenvolvimento é um processo caracterizado por estádios de equilíbrio transitório, entre níveis de equilíbrio inferior e superior. Os esquemas, ou seja, as acções susceptíveis de se realizarem sobre os objectos, que uma vez interiorizadas se constituem em operações, característicos de determinado nível evolutivo, estão organizados em estruturas, que consistem em organizações dinâmicas das acções ou operações, regidas por determinadas leis e com maior ou menor estabilidade (equilíbrio).

Quando há uma dificuldade gera-se uma situação de instabilidade, de ruptura, que é preciso analisar e recompor para que haja compreensão e apropriação do saber.

Para Piaget, os mecanismos reguladores do processo de equilibração têm as suas raízes em processos de adaptação biológicos; a assimilação, que do ponto de vista psicológico significa a incorporação de uma perturbação do meio a esquemas existentes, e a acomodação, ou seja, face às resistências do meio a necessidade de modificar os esquemas, criando novos esquemas que permitirão uma assimilação mais adaptada.

Por sua vez, Vygotsky desenvolveu uma teoria que defende o papel do sociocultural no desenvolvimento. O desenvolvimento é encarado como o produto da interacção social: a criança recebe dos que a rodeiam uma série de instrumentos socioculturais, dos quais se vai apropriando, progressivamente, por um processo de internalização. De todos os instrumentos resultantes da evolução histórica e das conquistas culturais que a criança tem acesso através da experiência social, destaca a linguagem, como poderoso instrumento de comunicação e de mediação semiótica. (Matta, 2001).

Quando Vygotsky elaborou a sua Teoria de Zona de Desenvolvimento Potencial poderia não ter em mente o estudo dos erros dos alunos. Contudo, posteriormente, vários autores procuraram utilizar esta teoria com vista a uma maior eficácia no processo ensino/aprendizagem, de forma a evitar o erro e/ou a remediá-lo.

Como diz Vergnaud (1981) é um grave erro pedagógico considerar que o ensino consiste na aquisição de hábitos ou procedimentos já elaborados. É através dos processos de exploração livre da criança, de situações favoráveis à actividade espontânea do aluno e da intervenção do adulto que é possível prosseguir no caminho da compreensão do erro. Quando as tarefas se limitam à imitação e à repetição, existe pouca oportunidade de construir o saber. O mesmo autor considera que por vezes o modo de ensino, em vez de ajudar a ultrapassar, pode ajudar a reforçar determinados obstáculos – os chamados erros didácticos do professor.

Por isso, deve haver o máximo cuidado no tratamento da matéria, por parte dos professores, através de uma planificação bem orientada onde o papel do professor seja de mediador consciente do que deve de ser trabalhado e qual a melhor maneira de fazer, para que o seu papel não seja um obstáculo ao desenvolvimento da aprendizagem.

O Erro como Parte Integrante do Conhecimento

Num passado recente, nas nossas Escolas, o erro era considerado como qualquer "coisa" que devia ser escondida para não se voltar a repetir.

Presentemente, o erro tem vindo a ser desdramatizado e até já vai sendo sentido como um factor importante da apropriação do conhecimento por parte dos alunos. Porque os erros cometidos pelos alunos são indicadores importantes da compreensão que revelam acerca da tarefa que lhes é solicitada e da forma de pensar relativamente a ela.

Vergnaud (1986) chama a atenção para a importância da análise dos erros, pois estes fornecem indicadores do modo como se está a desenrolar o conhecimento.

Este autor através da sua Teoria dos Campos Conceptuais analisa o processo de conceptualização da realidade com o estudo das continuidades e descontinuidades estruturais, que se encontram presentes nas etapas de aquisição de conhecimentos, tendo sempre em conta a especificidade dos conteúdos.

Dando, por isso, mais importância ao estudo de um campo conceptual do que ao estudo de um conceito isolado, pois um campo conceptual tem em consideração um conjunto de situações e requer uma variedade de conceitos, procedimentos e de representações simbólicas que se encontram em conexão, levando a uma interdisciplinariedade do conhecimento.

Vergnaud (1990) defende, também, que é importante estudar as concepções das crianças, identificando as dificuldades e descontinuidades dos processos de raciocínio, enquanto vão progredindo. Para determinar de que modo as concepções prévias das crianças podem ser usadas para gerar novas concepções, é necessário recorrer à análise dos conteúdos conceptuais dos problemas e ao estudo do seu processo complexo de desenvolvimento.

A aprendizagem é, segundo Bickhard (1992), um processo construtivo de tentativa e erro de novos sistemas de organização, e de exclusão dos novos ensaios que não produzem interacções e diferenciações com êxito. O que implica cometer erros e depois corrigi-los através de um processo de reflexão, abstracção reflexiva, daí a pertinência de envolver os alunos no processo das suas próprias concepções.

Este autor considera os erros uma fonte de diversidade e criatividade de elevada importância durante o processo de desenvolvimento, uma vez que eles dão indicações sobre possibilidades de funcionamento favorecendo a construção de suportes, para que outros conhecimentos possam ser alcançados.

Como Trabalhar os Erros e as Dificuldades dos Alunos

Booker (1988) afirma que as crianças não erram deliberadamente: ou estão convencidos que aquilo que estão a fazer é correcto, ou não sabem de todo o que fazer. Assim sendo, os seus erros são sempre reveladores de uma dificuldade, especificamente ligada ao conteúdo matemático ou ao processo de aprendizagem.

Segundo este autor, os erros dos alunos podem ser sistemáticos, casuais ou devido a falta de cuidado. Estes últimos, ocorrem ocasionalmente e tendem a não ser repetidos. Os erros casuais, são difíceis de explicar, pois não exibem um padrão. Booker considera que, provavelmente, são devido mais a factores próprios da criança ou da situação, do que à matemática ou ao processo de aprendizagem. Quanto aos erros sistemáticos, este autor caracteriza-os como sendo aqueles que mostram um padrão consistente e uniforme, indicando que o aluno estabeleceu uma forma especifica de pensar.

São estes erros que nos podem ajudar na detecção de dificuldades e na tomada de medidas preventivas e/ou correctoras.

Booker (1988), defende que a análise do erro deve ser feita seguindo estes passos:

- identificar a estratégia da criança;

- determinar a origem da dificuldade da criança;
- fazer com que a criança veja que a estratégia é inadequada;
- mostrar à criança a estratégia apropriada;
- proporcionar à criança a prática necessária à generalização desta estratégia a situações mais complicadas.

Para termos consciência dos erros dos alunos, e entendermos ou penetrarmos na "lógica do aluno", é necessário fazer uma análise conceptual à priori. Esta análise deve ter como fim último, a produção de modelos e situações pedagógicas, nas quais determinado conteúdo pedagógico adquira um valor científico adequado ao aluno. O que é necessário saber é quais as situações que favorecem a aquisição dos conceitos científicos por parte dos alunos, e que papel têm os erros nesta passagem de apropriação de conceitos, para a reconstrução dos conhecimentos.

Segundo Bachelard (1983, cit. por Garnier, Bednarz & Ulanovskaya, 1996), a análise dos procedimentos dos alunos serve para identificar os eventuais pontos de ruptura no desenvolvimento do conhecimento – os obstáculos epistemológicos.

Nas actividades de ensino-aprendizagem, o professor não deve ignorar os obstáculos que se colocam aos alunos, quando estes são confrontados com novos conceitos científicos. Deve pedir-lhes que expliquem os seus modelos intuitivos, para os ficar a conhecer e arranjar a melhor maneira para "destruir" as concepções erradas ou incorrectas.

Para tentar ultrapassar as concepções incorrectas ou as dificuldades sentidas, o professor pode através das interacções sociais:

- criar um conflito sócio-cognitivo permitindo-lhe obter e sustentar as posições mais adequadas, com a finalidade de aproximar os conceitos espontâneos dos alunos, dos conceitos cientìficos (Perret – Clermont, Doise & Mugny, cit. por Garnier, Berdnarz & Ulanovskaya, 1996);

- criar uma forma para que o aluno tome consciência de um conflito interior, provocando uma contradição empírica, de modo a substituir as ideias erradas e espontâneas dos alunos por modelos científicos adequados (Lvovski, 1996).

Esta forma de ultrapassar os obstáculos tem por base o conflito. Fala-se de conflito cognitivo quando duas ideias contraditórias produzem um desequilíbrio e podem provocar dúvida, e conduzir ou superar erros. Mas, para isso, é necessário haver interacções sociais benéficas, que ajudem a criança a reflectir sobre as suas acções e sobre a situação em que se encontra.

A Teoria do Conflito Sociocognitivo

A Teoria do Conflito Sociocognitivo é uma teoria psicossocial do desenvolvimento da inteligência, que tem por objectivo o estudo do papel dos mecanismos das interacções sociais na aquisição de novas competências cognitivas.

Esta teoria partilha alguns pressupostos da perspectiva piagetiana, nomeadamente, no que diz respeito ao seu ponto de vista estruturalista, construtivista, interaccionista e quanto à importância que atribui ao conflito no desenvolvimento da inteligência (Gilly, 1991).

Mas, entre estas duas teorias existem diferenças no que respeita à influência das variáveis sociais nos mecanismos interactivos responsáveis pelo desenvolvimento. Na teoria piagetiana, o modelo explicativo é um modelo binário, em que a interacção ocorre entre um sujeito e um objecto. Na teoria do conflito sociocognitivo, propõe-se um modelo ternário, em que a relação com o objecto é mediatizada pela relação do sujeito com outros indivíduos. Existindo uma mudança de paradigma, em que se passa de um modelo bipolar (sujeito - objecto), para um modelo tripolar (sujeito – objecto – contexto social).

Para que exista conflito sociocognitivo é necessário que o ponto de vista da criança seja confrontado com um outro não coincidente, de modo a permitir o desequilíbrio que conduzirá a novas equilibrações (Matta, 2001).

Matta (2001) também refere que o conflito é sociointeractivo, porque ocorre, simultaneamente, a dois níveis: no plano social, porque se trata da confrontação entre sujeitos, e no plano cognitivo, porque se trata de confrontação de diferentes hipóteses de resolução.

O conflito gerado resulta de um duplo desequilíbrio, a nível inter e intra-individual. O primeiro decorre das diferentes respostas dadas pelos sujeitos e o segundo resulta do facto do sujeito tomar consciência da existência de uma resposta diferente da sua e que põe em causa a sua própria (Gilly, 1989). É a tentativa de ultrapassar o desequilíbrio interindividual que pode provocar um ultrapassar do desequilíbrio intraindividual e, consequentemente, originar ganhos individuais na aprendizagem.

Borasi (1987) considera os erros como meios poderosos de diagnóstico das dificuldades de aprendizagem, podendo serem utilizados como instrumentos educacionais no ensino da matemática.

Segundo esta autora para se estudar os erros é necessário analisá-los; determinando e classificando as suas causas; classificando e agrupando os seus erros; verificando a frequência e persistência de um erro, desenvolvendo apoios didácticos para as dificuldades de aprendizagem e para os erros em particular.

Para se conseguir mudar as concepções erradas dos alunos, não basta mostrar e explicar como se faz, é necessário confrontá-los com situações novas (situações favoráveis à actividade espontânea, à exploração livre e à interacção), que ponham à prova as suas competências e as suas concepções.

Obstáculos Epistemológicos ao Saber Matemático
As Dificuldades e os Erros

Desde o início do século XX, vários autores têm-se dedicado ao estudo dos erros no contexto da educação matemática, tendo-se chegado à conclusão de que os erros cometidos pelos estudantes devem-se essencialmente a dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos e/ou à existência de um ensino deficitário.

Nos seus estudos, ao nível da Psicologia, Piaget (1970) considera os erros como "instrumentos para observar o funcionamento da mente humana", sendo muito importantes no processo de desenvolvimento.

Na génese do número na criança, Piaget (1941) explorou a relação existente entre o desenvolvimento das capacidades lógicas e das competências numéricas na criança, através de estudos efectuados que integravam provas de conservação, de seriação e de inclusão. O sucesso numa prova estava associado ao sucesso nas restantes, devendo existir uma sincronia resultante da manifestação das estruturas lógicas subjacentes, directamente relacionadas com os denominados estádios de desenvolvimento. As investigações que se fizeram na sequência das de Piaget realçaram que as crianças apresentam várias dificuldades na identificação dos invariantes, presentes em diversas situações, e que os desfasamentos horizontais são frequentes.

Segundo Borasi (1990), é importante fomentar a criação de actividades-problemas que levem os alunos a reflectir e a produzir sozinhos questões matemáticas. É necessário proporcionar-lhes na sala de aula momentos de discussão e de partilha de procedimentos utilizados, na realização de uma tarefa matemática, de forma a que os alunos se apercebam da existência de alternativas à resolução daquele problema.

Para Vergnaud (1986), o processo de construção dos conceitos, não é um processo linear, pois podem surgir desfasamentos entre as concepções que se vão construindo e os próprios conceitos matemáticos. Ou seja, quando as concepções dos alunos entram em conflito com os conceitos científicos surgem algumas dificuldades. Por exemplo, para os alunos que consideram os números como representantes de quantidades, os números negativos acabam por não ter qualquer sentido para eles.

Este autor, salienta a importância dos <u>campos conceptuais</u>, pois o tratamento dos problemas numéricos requer a existência de correlações e hierarquias, assim como de inúmeras situações metafóricas.

De acordo com Vergnaud (1986), para que os alunos tenham a oportunidade de encontrar todas os constituintes de um conceito, é necessário ter em conta as várias classes de problemas. Por exemplo, um problema de adição ou de subtracção pode implicar uma grande variedade de conceitos, tais como: conceitos de medida; de transformação; de comparação; de diferença; de inversão; de operação binária, etc. Daí a necessidade de se utilizar como objectos de estudo, campos conceptuais bastante largos, ou seja, um conjunto de situações que impliquem vários conceitos, vários procedimentos e várias representações simbólicas.

Por isso, é necessário haver, por parte do professor, a utilização de uma pedagogia diferenciada e diversificadora, onde todos estes campos conceptuais estejam presentes e sejam contemplados no processo ensino–aprendizagem para que os alunos construam o seu conhecimento da melhor maneira possível.

Vygotsky (1977), ao falar em zona de desenvolvimento potencial – que tem a ver com aquilo que a criança é capaz de fazer com a ajuda de adultos – propõe o conceito de "scaffolding", que em português se pode traduzir por "suportes", defendendo que os conhecimentos disponibilizados pelos outros indivíduos funcionam como suporte, possibilitando à criança a resolução de tarefas que seria incapaz de resolver sozinha.

Bickhard (1992) pegou no conceito e criou uma nova versão, designada por "self-scaffolding", que engloba também os suportes construídos pela própria criança nas suas interacções com o meio ambiente.

Este autor, considera a linguagem como um "self-scaffolding", porque possui funções de comunicação, de representação, de regulação do comportamento e favorece a descoberta de novas relações.

A linguagem possui um papel importante na designação e identificação dos invariantes (objectos, propriedades, relações, teoremas), podendo desencadear a utilização de esquemas disponíveis.

Durante a resolução de problemas, a linguagem tem também um papel relevante como organizador das sequências temporais necessárias, tendo também um papel importante ao nível da antecipação, planificação e controlo da acção.

Para Vergnaud (1986), as representações simbólicas facilitam a identificação dos objectos matemáticos e tornam-se decisivas no processo de conceptualização. Inicialmente a representação simbólica de um problema é uma tarefa difícil para o aluno e a sua aprendizagem só é possível com a ajuda do adulto.

Vygotsky e Vergnaud referem o importante papel do professor na escola, como aquele que propõe aos alunos situações de aprendizagem significativas quer a nível motivacional quer a nível desenvolvimental, e também como "mediador" entre aquilo que o aluno é capaz de fazer, face a um problema e aquilo que se espera que o aluno consiga fazer.

Pode-se afirmar que os obstáculos na matemática são múltiplos e variados e por isso as dificuldades e os erros devem ser identificados e trabalhados.

As dificuldades e os erros podem ser de vários tipos: erros de estratégia, erros de raciocínio, erros de cálculo e também se podem dar a nível semântico e a nível sintáctico.

Segundo Matta (2001), para a resolução de um problema é preciso que o sujeito consiga representar a situação descrita, o objectivo a alcançar e, a elaboração de um procedimento de resolução.

Passar da representação verbal para a representação da situação evocada é difícil. Para além das regras implícitas do contrato didáctico que podem levar as crianças a resolver problemas que não entendem, frequentemente as crianças encaram a resolução de problemas como adivinhas, apresentando muitas dificuldades em relacionar a informação do enunciado do problema com os seus conhecimentos quotidianos. Esta fase da construção/integração é a que parece levantar mais dificuldades (Barrouillet & Fayol, 1995; De Corte & Verschaffel, 1985; Hegarty, Mayer & Green, 1992; Reusser & Stebler, 1997; Vergnaud, 1994; cit. por Matta, 2001).

Para Bermejo & Rodriguez, (1987, cit. por Matta, 2001), o estudo de crianças dos 6 aos 9 anos mostra que mais de 75% dos erros das crianças são erros de representação.

Esta autora, citando vários investigadores, refere que há dificuldades por parte das crianças no entendimento dos objectivos do problema, ou seja, em perceber o que se pretende; nas crianças até aos 10 anos, na resolução de problemas de aritmética o grau de dificuldade está estreitamente ligado à organização semântica do enunciado e aos dados numéricos devido ao seu valor ser relativo (números inteiros ou decimais). Os termos utilizados podem induzir transformações positivas ou negativas e algumas dificuldades advêm de uma interpretação incorrecta dos enunciados. Chama, também, a atenção para a importância da ajuda do adulto na representação e planificação dos procedimentos de resolução, para a importância do recurso a material concreto e a diferentes formas de representação dos problemas porque um problema pode ter representações variadas, implicar o recurso a sistemas simbólicos diferentes e a diferentes graus de abstracção.

Podemos, por isso, afirmar que aprender matemática não é fácil, é um processo complexo que gera dificuldades e erros que têm de ser trabalhados para que haja compreensão e lhe seja dada uma significação adequada.

Números e Cálculo

A Importância do Desenvolvimento Cognitivo

Segundo Sequeira (1982), o desenvolvimento conceptual na criança ajuda-a a usar algumas estratégias de organização de diferentes tarefas como sejam, por exemplo, a diferenciação, a procura de relações, a categorização por características exteriores ao objecto. À medida que este desenvolvimento se vai dando, a criança vai percebendo o que está a fazer e a reflectir sobre como e porque faz as coisas. Vai tomar decisões, resolver problemas, firmar conceitos, generalizar regras de aplicação em diferentes situações.

Neste evoluir qualitativo, as estruturas cognitivas do indivíduo vão-se reorganizando e controlando as experiências perceptivas. A reorganização dos esquemas cognitivos é gradual, tem como base esquemas anteriores e evolui através da maturação do indivíduo e da sua actividade e experiência (Ginsburg & Opper; Piaget, 1975).

Através da sua vivência do mundo e de acordo com a idade e a cultura, o indivíduo possui conceitos e maneiras de pensar presentes em esquemas/ estruturas cognitivas próprias.

Os estímulos a que constantemente é exposto poderão, pelas suas características salientes e perturbadoras, constituir um obstáculo, um conflito na resolução de qualquer problema. Neste caso, os esquemas cognitivos anteriores são responsáveis pela transformação desse problema, ajudando a resolvê-lo e adaptá-lo aos seus próprios parâmetros. Aqui o papel da atenção e da memória têm uma acção preponderante porque toda a informação prévia se serviu da memória operante do indivíduo para se reorganizar e para influenciar a detecção e selecção de estímulos através da atenção (Sequeira, 1989).

O indivíduo tem neste exercício da sua própria cognição uma acção que ele próprio controla através dos mecanismos inerentes à sua capacidade humana. Levando-o a um estado de equilíbrio das estruturas cognitivas que se tornaram mais enriquecidas por novos conceitos. O equilíbrio é temporário pois novas operações lógicas serão determinadas pelo aparecimento de novos problemas.

Em todo este ciclo existe um processamento de informação que é controlado pelas estruturas cognitivas do indivíduo através de uma acção construtiva da parte deste. As estratégias de controle e acção têm a ver, como já dissemos, com o estado de maturação e a experiência do indivíduo.

Os Números

A aprendizagem do sistema numérico pela criança começa desde muito cedo e vai-se desenvolvendo à medida que a criança vai progredindo no seu percurso escolar, é um processo longo e complexo.

Antes de 1970, a Escola Pública dava prioridade ao estudo das quatro operações desde a pré-primária ao ensino médio. Era um ensino de carácter repetitivo a fim de poder "gravar" bem na memória dos alunos os conteúdos a aprender.

Após 1980, "os reformadores de 1970 condenavam os métodos que levavam o professor a aplicar um certo número de regras que os alunos não compreendiam"

(Brissiaud, 1989). E começaram a defender outro tipo de ensino baseado na construção pessoal através de situações problemáticas.

A obra de Piaget (1941) sobre a génese do número na criança, vem mostrar que há actividades que os alunos devem realizar antes de adquirirem o conceito de número, são as chamadas actividades pré-numéricas.

Segundo este autor o desenvolvimento das competências numéricas está essencialmente ligado ao desenvolvimento das suas capacidades lógicas e as crianças devem passar pelo sucesso em três provas: a prova da conservação numérica, a prova da seriação de comprimentos e a prova de inclusão de classes.

Número, de acordo com Piaget, é uma síntese de dois tipos de relações que a criança cria entre objectos (por abstracção reflexiva). Uma delas é a ordem e a outra é a inclusão hierárquica. A criança constrói assim esta noção pela sua própria acção mental ao colocar objectos em relação.

Para Piaget (1941), a criança acede ao número de elementos de uma colecção quando é capaz de coordenar a enumeração e a totalização das unidades dessa colecção. Antes de o conseguir utiliza apenas o equivalente a uma cópia figural.

Piaget faz uma diferença entre números perceptuais e números. Os números perceptuais são números pequenos, até quatro ou cinco, que podem ser distinguidos pela percepção, sem requerer uma estruturação lógico-matemática. Os outros números pequenos a partir de cinco são chamados números elementares e já requerem conhecimento lógico-matemático (Kamii, 1986).

Depois, quando a criança se aproxima do período operatório concreto (segundo a nomenclatura de Piaget), torna-se cada vez mais capaz de conhecer bastantes números. Não tem, portanto, justificação trabalhar com esses números, um a um, demoradamente. Não se quer com isto dizer que esse estudo não deva ser feito com cuidado até para detectar as crianças que, neste domínio, têm dificuldades. Pretende-se apenas chamar a atenção para o facto de se desmotivar as crianças, que já os adquiriram, demorando meses com um estudo deste tipo (Pires,1980).

Piaget nos seus trabalhos deu relevo ao desenvolvimento do conhecimento lógico e defendeu que todo o conhecimento é uma construção pessoal.

Presentemente, "a validade da descrição que Piaget fez sobre a génese do número é fortemente colocada em causa pelos próprios psicólogos e o emprego pedagógico de uma definição de conjunto do número continua a ser objecto de numerosas críticas" (Brissiaud, 1989)

Gelman (1983) também desenvolveu trabalhos de investigação, tendo "colocado em evidência numerosos sucessos precoces nas tarefas numéricas". Avança a ideia que a criança nasce com um conhecimento implícito dos princípios de contagem e nomeadamente dos princípios do como estudar. Defende também, que se as crianças fracassam é porque elas estão submersas pelas exigências que requer a tarefa que elas precisam fazer e pela sobrecarga mental que decorre das dificuldades de gestão e de controle da execução da tarefa.

Esta autora desenvolveu os seus trabalhos com base na natureza inata do conhecimento através da articulação das tarefas.

Para Gelman & Gallistel (1978), a contagem é demasiado complexa para ser apenas resultado de um treino e para que as crianças consigam fazê-lo é necessário articularem uma série de princípios e de procedimentos:

- Princípio da sequência estável – saber a sequência numérica convencional - um, dois, três, ...

- Princípio da correspondência termo-a-termo – cada elemento da colecção só pertence a uma palavra-número,
- Princípio da cardinalidade –compreender que o último número da cadeia numérica emitido corresponde ao cardinal do conjunto.
- Princípio da abstracção – podem-se reagrupar elementos de natureza diferente numa colecção para serem contados,
- Princípio da não-pertinência da ordem – compreender que a ordem da enumeração não afecta o resultado da contagem.

Fuson (1991) com os seus trabalhos, chama a atenção para os contextos em que as crianças utilizam as palavras-número. E assim diferencia o uso das palavras-número durante uma contagem, daquelas mesmas palavras-número quando a criança quer designar uma quantidade.

De acordo com Fuson (1991), as crianças vão compreendendo e utilizando as palavras número de forma progressiva, em sete contextos diferentes.

Os três primeiros contextos que se seguem são contextos matemáticos:

- Contexto cardinal: neste contexto a palavra número faz referência à totalidade de um conjunto inteiro discreto, indicando o número de elementos que o compõe.

- Contexto ordinal: a palavra número faz referência a um elemento pertencente a uma colecção de elementos ordenados e descreve a posição de cada elemento.

- Contexto de medida: a palavra número refere uma quantidade contínua e indica o número de unidades a que corresponde.

Os seguintes contextos têm a ver com instrumentos culturais que garantem a precisão da palavra número a utilizar nos contextos cardinal, ordinal e medida:

- Contexto sequência: tem a ver com a recitação ordenada das palavras número. Estas, na ausência de outros elementos, não referem nada (por ex: enunciar o alfabeto).

- Contexto contagem: as palavras número colocam os elementos termo a termo, em correspondência. Cada palavra número apenas refere um elemento, mas não dá informação sobre esse elemento (designação numérica).

- Contexto simbólico: leitura da palavra número, sem outra informação adicional. Mais tarde os números adquirem uma significação de cardinal, ordinal, de medida ou enumeração sequencial.

- Contexto numérico: utilização das palavras número na designação de números de telefone, canais de televisão, códigos postais, etc.

Para as crianças pequenas as diferentes significações de uma palavra número, são independentes umas das outras. O processo de aprendizagem de todas as relações é um processo lento e gradual, que, para a maioria das crianças, ocorre entre os 2 e os 8 anos. Ao longo deste período, as crianças vão aprendendo que uma única palavra número pode receber mais do que uma aplicação.

Esta autora chama a atenção para a importância dos contextos onde se desenrola a aprendizagem.

Segundo Matta (2001), "a noção de número é uma das noções matemáticas ensinada no decurso da escolaridade. Longe de ser uma noção simples e elementar é uma noção complexa e que demora anos a consolidar-se". Porque como refere esta autora, "... se apoia sobre outras noções, nomeadamente: de correspondência biunívoca, de relações de equivalência, de relações de inclusão, de ordem, de adição, de subtracção, etc".

Por outro lado, com os alunos que sentem dificuldade nesta aprendizagem, não se deve insistir nesse tipo de trabalho, mas procurar que façam experiências no domínio da propedêutica do número: exercícios de classificação, de seriação, de conservação dos conjuntos, que os vão ajudar a adquirir as duas operações lógicas acima citadas. São também importantes as actividades de estruturação espacial não só por causa da tendência das crianças para desenhar os algarismos em espelho, mas ainda por causa do valor da posição dos algarismos que constituem um numeral.

A numeração escrita é um sistema gráfico culturalmente elaborado. A escrita de números é ideográfica, representa uma ideia. Neste sistema ideográfico o valor dos números depende da sua posição relativa, da sua combinação – têm valor posicional (por ex: não é evidente que 81 seja maior 59 – se não se tiver em conta o valor posicional – 5 é mais que 1 e 9 mais que 8).

Para Cooper (1991) o desenvolvimento do conceito de número pode ser entendido como o "conhecimento do espaço dos números". A criança aprende sobre este espaço "viajando nele", realizando experiências no sentido de adquirir a sua estrutura ordinal que é o primeiro passo para o desenvolvimento do conceito.

Para este autor a organização ordinal das numerosidades é descoberta através da observação das regras de transição entre numerosidades como função de adição e de subtracção.

De acordo com Cooper (1983), para que haja desenvolvimento da representação numérica têm de ter presentes três tipos de capacidades numéricas:

1. Discriminação – capacidade de dizer se duas coisas são a mesma ou são diferentes. Pode–se aplicar a conjuntos múltiplos ou a um conjunto único várias vezes no tempo.
2. Ordenação – se dois conjuntos são diferentes o número pode ser usado para determinar qual tem mais.
3. Determinação do intervalo – se dois conjuntos diferem em numerosidade a determinação do intervalo pode ser usada para determinar quanto um tem mais do que o outro.

Estas capacidades desenvolvem-se segundo esta ordem apresentada.

Cooper (1983) considera desapropriado questionar quando é que as crianças adquirem a representação numérica. A sua aquisição é um processo longo em que o sistema representacional adquire novas características com novos significados.

Por isso, este autor salienta que é muito menos importante quando é que se chama a uma representação "número" do que conhecer o desenvolvimento do sistema no qual a representação existe, e ter um modelo desenvolvimental para quando for necessário mudar.

Segundo Paisana (1980), o conhecimento de cada número é constituído não só pelo conhecimento das suas propriedades e relações com outros números, mas também das suas formas de representação.

Brissiaud (1989), foi um autor que desenvolveu alguns trabalhos sobre esta problemática da aprendizagem do sistema numérico, tentando precisar como as crianças constróem a significação das palavras-número. Fala do número em diversos contextos, como contagem numérica, como representação de uma quantidade, como meio de calcular. Divergindo de Piaget nalgumas concepções.

Para este autor os números servem para comunicar quantidades ou ainda guardar na memória as quantidades e para calcular, isto é, para colocar em relação as quantidades. E isto acontece através das palavras-número e das colecções-testemunho: quando se quer comunicar uma pequena quantidade, sem falar , nem escrever, é frequente que se mostre uma configuração de dados. Defende mesmo que o número não é a única maneira de que dispomos para guardar a memória das quantidades; é igualmente possível representar estas quantidades por colecções-testemunho.

Desde os três anos de idade que se notam procedimentos que mostram um esforço para a aplicação de alguns destes princípios na contagem de conjuntos com poucos elementos, mas nota-se um grande progresso aos cinco/seis anos (Brissiaud, 1989).

Para Brissiaud (1994), a construção da significação elementar das primeiras palavras-número resulta duma pluralidade de processos cognitivos:

- subitizing,
- a construção de um modelo de acção resultante do ensino,
- a descoberta do princípio da cardinalidade.

Por **subitizing** entende-se que é a capacidade de identificar rapidamente e com segurança a quantidade correspondente a uma colecção muito pequena (até 3 / 4 elementos) – considera-se um modo de quantificação diferente da contagem (Cooper, 1984).

A apropriação deste conceito é morosa e, como sublinha Vergnaud (1981), é de toda a conveniência que a criança vá, desde muito cedo, representando quantidades e transformações (tirar, juntar, separar, ...) e utilizando diferentes tipos de notações escritas. Desta forma aprende que as representações são diferentes dos números em si e que, ainda que o cardinal de conjuntos possa ser idêntico, a sua representação pode variar, assim como conjuntos diferentes, mas com cardinais idênticos, podem ser representados do mesmo modo.

De acordo com Vergnaud (1991), o conceito primitivo de número é constituído por duas ideias fundamentais:

- a ideia de cardinal (medida de quantidades discretas)
- a ideia de adição

E é a partir dos 3 / 4 anos de idade, antes da aprendizagem formal da matemática, que as crianças desenvolvem a concepção e representação do número, começam por compreender as propriedades mais elementares deste conceito, e, apesar de não conhecerem formalmente as quatro operações aritméticas, já conseguem operar.

Por volta dos 5 / 6 anos a criança ainda não tem presente a adição e por isso utiliza um procedimento de "counting-all", ou seja une dois conjuntos diferentes.

Por exemplo: Tenho quatro flores amarelas e três flores encarnadas. Quantas flores tenho?

A criança começa a contar do número 1 até ao número 7 e responde 7.

Mais tarde a criança começa a utilizar o procedimento de "counting-on", iniciando a contagem no número referente ao cardinal do primeiro conjunto (por ex: 4,5,6,7).

Só poderemos dizer que o conceito de adição se encontra presente, quando a criança junta o 4 e o 3 para obter o resultado certo.

Segundo Vergnaud (1991), os problemas que têm sentido para as crianças pequenas e a partir dos quais elas podem atribuir um valor funcional ao conceito de número, são os problemas de comparação, combinação e transformação de colecções discretas. São problemas em que se colocam as seguintes perguntas:

- Quem tem mais ? Quem tem menos ? Quantos a mais ? Quantos a menos? Quanto será ao todo quando reunimos duas colecções ?

Estes dois autores, Brissiaud e Vergnaud, têm ideias convergentes nesta área, defendendo que as aprendizagens devem ser contextualizadas através das situações problemáticas e que os números podem ser adquiridos pela diversificação das situações propostas aos alunos.

O Sistema de Numeração Decimal

O nosso sistema de numeração tem dez como base. Mas, como vimos, não é por ser decimal que tem, na realidade, tantas vantagens sobre os outros sistemas. Isso deve-se, essencialmente, ao facto de ser um sistema de posição, que possui o zero e utiliza apenas dez símbolos muito simples e bem distintos. Os nove números naturais inferiores à base representam-se por nove símbolos diferentes, os algarismos. O zero é designado por um décimo símbolo ou algarismo. Para representar números iguais ou superiores à base, formam-se combinações desses símbolos, tomando estes, valores diferentes que consoante a sua posição relativamente aos outros símbolos da mesma combinação (do mesmo numeral).

De acordo com alguns autores (Brousseau, 1992; Bonotto, 1993) o zero provoca erros a vários níveis, sendo mesmo um problema que deve ser bem trabalhado dentro das várias áreas de aprendizagem matemática: leitura de números; na multiplicação (por exemplo, muitos alunos escrevem 0x4 = 4); na divisão quando há zeros intermédios. Na maior parte das vezes os alunos partem da concepção errada de que o zero não vale nada.

O cálculo com números inteiros é uma das principais aprendizagens do primeiro ciclo do Ensino Básico, pela sua extraordinária utilidade na resolução das situações problemáticas da vida quotidiana. Mas, para além destes objectivos de ordem prática, pretende-se atingir um outro, de grande importância para os pequenos alunos: "contribuir para o desenvolvimento global e harmónico da criança" (Pires, 1980).

Na verdade, os alunos neste grau de ensino, encontram-se num período designado por Piaget de operatório concreto. Uma das principais características deste período é a capacidade de realizar, com base na acção, operações lógicas, designadas exactamente por operações concretas. É a primeira forma de lógica. O raciocínio próprio desta idade é "a interpretação inteligente daquilo que se executa" (Piaget, 1971). Normalmente, esse período atinge-se entre os seis anos e meio e os sete anos e permanece-se nele até aproximadamente aos 11 anos, idade em que se começa a ser capaz de executar raciocínios de lógica formal, que já não se apoiam em acções.

Uma questão se pode colocar: O que são, então, essas operações concretas ?

Segundo este autor, são acções interiorizadas, isto é, acções que alguma vez se executaram, mas que, a partir de certa altura, por serem suficientemente conhecidas deixam de se efectuar no concreto e passam a executar-se apenas mentalmente – por isso se dizem interiorizadas.

São reversíveis, isto é, acções cujo efeito se pode mentalmente anular por inversão do processo.

De acordo com Pires (1980), as operações elementares da aritmética – adição, subtracção, multiplicação e divisão – são, para a criança, operações deste tipo. Ao trabalhá-las com os alunos, estamos assim a contribuir para o seu desenvolvimento intelectual, uma das facetas do seu desenvolvimento global.

Segundo Brissiaud (1989) "o ensino da numeração é fundamental: é toda a concepção das grandes quantidades que está em jogo" (p. 185). Conhecer a numeração, é dispor de um sistema de unidades de tamanhos diferentes (dezenas, centenas, milhares, ...) e este emprego de diferentes unidades inscreve-se tanto nas práticas linguísticas, durante uma contagem ou de um cálculo oral, como nas práticas de escrita.

O Cálculo

Calcular é colocar em relação as quantidades a partir das suas únicas representações numéricas (Brissiaud, 1989).

Para este autor o acesso ao cálculo requer ao mesmo tempo a melhoria dos processos de contagem e o uso das colecções-testemunho organizadas.

Defende também que os professores podem ajudar as crianças a progredir fazendo-lhes utilizar colecções-testemunho organizadas e resolver os problemas pelos processos de contagem.

A aprendizagem do cálculo é um processo complexo. Quando o cálculo a efectuar é composto por pequenas quantidades os alunos geralmente utilizam os processos de contagem, não necessitando sequer de empregar os sinais "+", "-" ou "=". Mas quando o tamanho das colecções aumenta há necessidade de recorrer ao "cálculo pensado" através das colecções-testemunho organizadas, para que a criança tenha possibilidade de representar de uma forma rápida essas quantidades maiores, quer seja de uma forma visual ou cinestésica (Brissiaud, 1989).

Concretamente, o cálculo pensado de acordo com Brissiaud (1989) é a utilização do conhecimento de certas relações numéricas no sentido de facilitar o processo de calcular. Ou seja, o emprego de uma estratégia de cálculo pensado corresponde à escolha de uma decomposição, entre muitas outras que são igualmente correctas, mas que para o aluno é a mais significativa.

Quatro processos de cálculo pensado podem ser ensinados no sentido de levar os alunos a saber pensar sobre possíveis representações para um cálculo pretendido, por exemplo:

- o uso dos duplos;

  $8+9 = \underline{8+8}+1$

  $8+9 = 17$

- a passagem à dezena (ou vintena);

  $8+9 = \underline{8+2}+7$ $\qquad$ $17+5 = 10+5+5+2$

  $8+9 = 17$ $\qquad$ $17+5 = 22$

- o retorno à dezena;

13+6= 10+3+6

13+6 = 19

- o retorno ao cinco; (coloca em jogo quantidades pequenas que em geral os resultados são conhecidos no momento)

8+6 = 5+3+5+1 e procede assim "5 e 5, 10 e 4, 14"

8+6 = 14

Segundo este autor o cálculo pensado não é necessariamente um cálculo mental; nada impede de se utilizar a escrita para se efectuar um cálculo pensado.

Por exemplo o cálculo pensado de uma soma necessita de duas fases, uma de decomposição e a outra de recomposição. A decomposição facilita a recomposição, porque ela privilegia o emprego de relações numéricas cuja memorização é mais fácil (cálculo de 5 + x, de 10 + x, de um duplo).

A utilização de colecções-testemunho organizadas tais como os dedos ou as constelações facilitam o cálculo pensado porque favorecem a memorização das relações numéricas utilizadas.

Brissiaud (1989) defende que o cálculo pensado necessita do emprego de uma classe de relações numéricas cuja aprendizagem se deve iniciar com a utilização de colecções-testemunho organizadas: os duplos, as relações que comportam um 5 ou um 10 e, a decomposição em dezenas e unidades.

Este autor refere que, na escola, é preferível ensinar o cálculo pensado do que a sobrecontagem, porque esta não permite uma boa concepção das quantidades. Para que a criança seja capaz de enunciar outras relações númericas além das relações de vizinhança, é necessário que se utilize outras relações como acontece no cálculo pensado.

Construção do Sentido (conceito) de uma Operação

Uma operação binária não é uma "conta", mas um processo mental que faz corresponder a um par ordenado de números, um outro número, que é o seu resultado. A "conta" á apenas uma das formas de representação, aliás muito prática e eficaz de calcular esse resultado.

Quando a criança é capaz de realizar as operações que lhe permitem entender o número, ela está apta também, a trabalhar sobre operações aritméticas.

Neste grau de ensino, segundo Pires (1980), pode dizer-se que, o estudo da cada operação se processa em três etapas:

- Primeira etapa: compreensão do sentido da operação;
- Segunda etapa: desenvolvimento do raciocínio operatório,
  desenvolvimento do cálculo mental,
  estudo de algumas propriedades das operações;
- Terceira etapa: construção do algoritmo (conta).

Indicou-se, para cada etapa, apenas os conteúdos predominantes. Mas, por exemplo, na segunda fase, para além do raciocínio, cálculo mental e propriedades das operações, continua também a desenvolver-se a compreensão do sentido da operação; na primeira fase já se fez o raciocínio dessa operação e algum cálculo mental.

Considera-se como sentido de uma operação, o conjunto das situações concretas na resolução das quais se aplica essa operação. Uma criança terá assim, compreendido o sentido da adição, por exemplo, quando souber distinguir, entre várias situações problemáticas, as que se resolvem através dessa operação.

A compreensão do sentido de uma operação é a mais importante aquisição a fazer pelas crianças em todo o estudo dessa operação. Ela é o pressuposto de que tudo o que se lhe segue se processará com uma facilidade tanto maior, quanto mais sólida for esta compreensão. Porque uma criança pode aprender a fazer mecanicamente um determinado tipo de conta, sem ter compreendido o sentido da operação, o que só irá prejudicar a sua capacidade de raciocínio.

Segundo Wadsworth (2001), a matemática é a área em que os métodos tradicionais não construtivistas produziram os efeitos mais nocivos na aprendizagem escolar infantil. A instrução aritmética mais tradicional é aquela centrada no cálculo e a que encoraja a internalização (memorização) dos algoritmos padrões. Este tipo de instrução obriga o aluno a abandonar o seu pensamento próprio. Como, em geral, o raciocínio por trás dos algoritmos está acima da capacidade de compreensão das crianças e não é produto da sua própria actividade mental, não faz sentido para elas (Kamii, 1994).

As crianças chegam à escola com o seu conhecimento aritmético "informal" bem desenvolvido e construído de forma autónoma (Baroody, 1987; Ginsburg, 1977; Kamii, 1985, 1994). Em geral, já sabem contar e quase sempre têm uma compreensão intuitiva de adição e subtracção, mas o ensino começa com símbolos e cálculos. Com este tipo de ensino da matemática, em vez de iniciarem a aprendizagem como uma "ponte" a partir do conhecimento informal já construído, as crianças enfrentam uma lacuna que não conseguem perceber. A aprendizagem dos conceitos matemáticos consiste em saber pensar, raciocinar e construir. Saber calcular é uma competência importante, mas é melhor adquirida como um produto de construção pessoal (Wadsworth, 2001).

Brissiaud (1989) defende mesmo que os processos de cálculo que são colocados à disposição dos alunos não devem se avaliados somente pela quantidade de capacidades que eles permitem, é preciso igualmente ter em conta os conhecimentos que eles constróem e, deste ponto de vista, defende que a adição natural tem a propriedade essencial de desenvolver o conhecimento da numeração decimal.

Os Números Decimais

Só no século XVI é que alguns matemáticos redescobriram ou compreenderam que se poderia utilizar números inferiores a um, com o mesmo tipo de representação que se utiliza para números maiores que um. Foi em 1585 pela mão de S. Stevin (1548–1620) com a publicação de "Thiende", que os decimais se tornaram parte integrante dos currículos da matemática (Struik, 1995). Outro autor responsável pela introdução do sistema decimal no mundo ocidental foi Viète (1540, cit. por Struik, 1995) que passou a utilizar os números decimais dizendo que se deveria promover a sua utilização, deixando de lado, ou só utilizando esporadicamente, o sistema sexagesimal.

Stevin e Viète pretenderam demonstrar que os cálculos e as medidas podem ser simplificados com a utilização dos decimais. Demonstraram que uma fracção decimal tem no seu denominador uma potência de dez, inteira e positiva, que pode ser escrita de diversas formas, como por exemplo: 25/100; 0,25; 0.25 ou .25, nas notações utilizadas actualmente.

O sistema de numeração decimal após ser utilizado na prática foi transposto para o campo do ensino. E, os decimais, só passaram a ser realmente adoptados quando os diversos países passaram a utilizar o sistema métrico decimal, e desta forma este sistema passou a ter utilização prática. Chevallard (cit. por Pérez, 1988) fala precisamente da "transposição didáctica", o processo que faz com que um elemento de saber científico se converta num conhecimento para ensinar, e isto foi o que sucedeu precisamente com o sistema de numeração decimal, que hoje faz parte dos currículos de todos os países.

Criou-se o sistema métrico decimal com múltiplos e submúltiplos do metro, multiplicando e dividindo a unidade por dez, cem, e mil ... de forma a que no cálculo só se tenha que mudar a vírgula de um lado para o outro dos algarismos, de acordo com a operação em causa e o número de zeros da potência de dez pela qual multiplicamos ou dividimos a unidade.

Este tipo de números está cada vez mais presente nos nossos dias, nomeadamente nas calculadoras, nos computadores e presentemente com a entrada do euro no nosso sistema monetário. Qualquer pessoa relativamente instruída saberá que estes números são signos que permitem expressar, uma vez fixada a unidade, medidas de amplitude menor que a unidade.

Os números decimais (D) foram também introduzidos no contexto de ensino dada a insuficiência dos números naturais (IN). Os números naturais servem para numerar colecções, para contar, permitem dar a medida de uma amplitude discreta. Mas, mostram-se insuficientes quando pretendemos medir amplitudes contínuas como a longitude, área, volume, peso, massa, intensidade da corrente, pressão de ar, intensidade do som, etc (Pérez, 1988). Todas estas amplitudes podem ser medidas com a ajuda de instrumentos adequados, uma vez fixada a unidade.

Diversos estudos (Brousseau; Carpenter; Hart; Brown; Bell; cit. por Pérez, 1988), confirmam que a aquisição e a construção do conceito de número decimal é bastante lenta por parte dos nossos alunos.

Desde os 8, 9 anos de idade, altura em que o sistema decimal geralmente é introduzido nos programas escolares, até por volta dos 14 anos, verifica-se que as dificuldades e os erros dos alunos são bastantes. Por vezes, verifica-se mesmo que aos 17 anos ainda existem dificuldades que persistem relativamente a este conceito (Carpenter, 1981; cit. por Pérez, 1988).

Estas dificuldades podem dever-se não só aos obstáculos que são derivados dos alunos terem enraizados em si os princípios dos números naturais (IN) e inteiros mas, também devido à multiplicidade de significados que estes podem tomar, como os de: medida, razão entre duas amplitudes, quociente de números, operador ou aplicação linear.

Antes de se introduzir no sistema de numeração decimal, os números menores do que a unidade, devemos certificarmo-nos se os alunos dominam este sistema para os números inteiros e se sabem passar da escrita sintética de um número inteiro para a escrita polinómica e vice-versa (Pérez, 1988).

Por exemplo: 8654 = (8x1000) + (6x100) + (5x10) + 4

Assim como, se sabem fazer diversas decomposições de um número.

Por exemplo: 8654 = 8000 + 600 + 50 + 4 = 8600 + 50 + 4 = 8600 + 54 = 8650 + 4, etc.

As Operações Aritméticas com Decimais

Na Adição e na Subtracção

Relativamente à adição e subtracção no conjunto dos decimais, se estes se obtiveram sem passar pelo sistema fraccionário, as regras de adição e subtracção apoiam-se no sistema no sistema de numeração.

Por exemplo:

$5{,}324 + 0{,}62 = 5{,}324 + 0{,}620$ $\qquad$ $72{,}5 - 34{,}691 = 72{,}500 - 34{,}691$

Para adicionar e subtrair decimais os alunos devem respeitar as seguintes regras:

1. Escrever o número decimal de forma a que as vírgulas coincidam na mesma coluna;
2. Juntar os zeros necessários para que todos os números tenham o mesmo número de algarismos depois da vírgula;
3. Adicionar ou subtrair segundo os mesmos princípios utilizados na adição e subtracção com números naturais;
4. Colocar a vírgula no resultado, por baixo da coluna das vírgulas dos números a adicionar ou a subtrair, de forma a que o resultado da soma ou da subtracção tenha o mesmo número de algarismos depois da vírgula do que cada um dos termos da adição ou subtracção.

Em suma, as propriedades da adição e da subtracção de decimais são as mesmas que as da adição ou subtracção com inteiros.

O trabalho de Pochon (1991) mostra que a resolução de cálculos de adição e de subtracção com decimais apresenta algumas dificuldades quando:

- os dois números têm um número diferente de casas decimais;
- não é atribuída nenhuma significação aos números envolvidos;
- a significação atribuída não é familiar às crianças;
- é frequente um mau alinhamento dos dois números (inteiros e decimais) à direita.
- o transporte da parte decimal à parte inteira (9.5 + 4.6 = 13.11).

Na Multiplicação

No que respeita à multiplicação de decimais, o produto de dois decimais já não tem o mesmo número de casas decimais que os factores. A extensão da multiplicação aos decimais não é imediata.

As regras de cálculo da multiplicação de decimais podem ser deduzidas, como no caso da adição e da subtracção:

1. Multiplicar os decimais como se fossem inteiros;
2. Colocar a vírgula no resultado, tendo em conta que tem que existir tantas casas decimais no resultado como na soma das casas decimais dos seus factores.

Por exemplo:

0,8 x 0,4 = 0,32

0,8 (uma casa decimal) x 0,4 (uma casa decimal) = 0,32 (duas casas decimais)

Na Divisão

Relativamente à divisão de números decimais há que destacar que o quociente de dois números decimais nem sempre é um número decimal.

Por exemplo:

½ = 0,5 (é um número decimal)

¾ = 0,75 (é um número decimal)

Contudo a divisão de ½ por ¾ não é um número decimal – ½ : ¾ = 2/3

O procedimento habitual para fazer a divisão com decimais é o seguinte:

1. Desloca-se a vírgula para a direita tantos lugares quantos os necessários para que tenhamos no divisor um número inteiro, e no dividendo, desloca-se a vírgula para a direita tantos lugares como quantos andámos no divisor;
2. Realiza-se a divisão utilizando o algoritmo habitual para os números inteiros, tendo em conta que o quociente deverá ter o mesmo número de casas decimais que o "novo" dividendo.

No cálculo da multiplicação e da divisão com números decimais Pochon (1991) detectou os seguintes problemas:

- na multiplicação – dificuldades com o número de casas decimais do resultado;
- na divisão – com os zeros no quociente (923.1 : 3 = 37.7 em vez de 307.7)

Como se pode constatar realizar operações com decimais não é fácil, há que ter em conta as regras próprias de cada operação, que têm que ser bem interiorizadas, para que a tarefa seja cumprida com sucesso.

Ordenar Decimais

Muitas das dificuldades dos alunos quando lidam com os números decimais residem na compreensão da sua ordenação, porque os decimais (D) possuem características de densidade que os tornam semelhantes aos números reais ®. Desta forma, entre dois decimais é sempre possível encontrar um terceiro e, as crianças têm dificuldade, na passagem do sistema dos números naturais (IN) para os números decimais (D), que possuem características próprias, distintas daquelas que conhecem até então (as de IN) (Bolon, 1996; Bonotto, 1993; Hiebert & Wearne, 1988).

Bonotto (1993) realizou um estudo sobre as concepções dos sujeitos quando é proposto a ordenação de séries de decimais e definiu algumas regras gerais pelas quais se regem os alunos que sistematicamente dão respostas incorrectas (respostas tipo). São elas:

1. O número que tiver maior quantidade de casas decimais é sempre maior, ou simplesmente, o número que possuir mais algarismos é sempre maior.
2. O número que tiver menor quantidade de casas decimais é maior, ou simplesmente, o número com menos algarismos é maior.
3. Quando existe um zero na parte decimal do número, este é menor.
4. os números que têm vírgula (números decimais), são sempre menores que os que não têm vírgula (números inteiros).
5. Os números que não têm vírgula (números inteiros) são sempre menores que os que têm vírgula (números decimais).

De acordo com estas regras encontradas, Bonotto (1993) defende uma posição na qual postula que o erro, ou uma maioria dos erros cometidos pelos alunos ao lidarem com decimais advêm da tentativa destes interpretarem os decimais tendo em conta regras impróprias para os mesmos, regras estas que conhecem bem, fazendo uma acomodação excessiva dos decimais, a regras que já possuem de conhecimentos anteriores.

Esta autora afirma mesmo: "Em particular vê-se perfeitamente que algumas regras incorrectas derivam da tentativa da criança de interpretar os decimais ou como naturais ou como fracções" (1993, p.42).

Alguns Erros Concretos

Como atrás já se referiu os números naturais (IN) constituem um obstáculo à concepção dos decimais (D). Uma das principais razões é a semelhança da sua escrita e estrutura.

O sistema decimal coloca diversos obstáculos aos alunos na sua aprendizagem, porque os alunos já têm enraizadas em si as propriedades e os princípios dos números naturais (IN). Estes obstáculos devem ser considerados conjuntamente, tendo em conta as suas relações, relacionando diversas concepções que são válidas numa situação, mas não noutra, e é de generalizações excessivas que muitas vezes nascem os erros típicos e sistemáticos dos alunos (Bonotto, 1993).

Estas são algumas das dificuldades mais comuns dos alunos relativamente aos números decimais:

- Aceitar que da multiplicação de um inteiro por um decimal pode resultar um número mais pequeno que um dos seus factores (o inteiro) (Brousseau,1989);

Por exemplo:

3 x 0,4 = 0,4 x 3 = 0,4 + 0,4 + 0,4 = 1,2

- Aceitar que da divisão de um inteiro por um decimal se pode obter um número maior (Brousseau, 1989);

Por exemplo:

5 : 0,25 = 20

$$\begin{array}{r|l} 5{,}00 & \underline{0{,}25} \\ 00 & 20 \end{array}$$

- Aceitar que quando se divide um número decimal por outro decimal é possível obter como quociente um número maior que o dividendo.

Por exemplo:

0,7 : 0,2 = 3,5

- Dificuldade em ordenar números decimais, encontrando um terceiro número decimal entre outros dois, ou seja, não compreendem a sucessão dos decimais (Bonotto, 1993);

Por exemplo:

Encontrar um número decimal entre 3,5 e 3,6

(3,51 ... / .... 3,59)

- Dificuldade em perceber que não se consegue encontrar o número decimal imediatamente a seguir a um número dado, ao contrário do que sucede com os números inteiros;

Por exemplo:

Nos números naturais

Em (IN) depois do 4 segue-se o 5

Nos números decimais (D) depois de 3,5 não se pode determinar o número decimal que se lhe segue.

- Dificuldade em perceber que o que se denomina como décimas, centésimas e milésimas depende do que se tenha considerado como unidade;

Por exemplo:

3 l e 5 décimas = 3,5 l = 35 décimas do litro

- Dificuldade em aceitar a dupla escrita dos decimais;

Por exemplo:

2,6 ~ 2,59

- Dificuldade com as operações de multiplicação e divisão que envolvam números decimais;

Por exemplo:

2,5 x 10 = 25 2,5 : 10 = 0,25

- Dificuldade em aceitar o valor do zero na escrita decimal;

Por exemplo:

2,05 muitas vezes é considerado como 2,5 pois os alunos possuem a concepção desde pequenos que "o zero não vale nada" (Bonotto, 1993).

Como se pode verificar através destes exemplos os alunos têm dificuldade em perceber este novo tipo de números, constituídos por uma parte inteira e uma parte fraccionária. Por vezes assumem um decimal como se de um inteiro se tratasse, ignorando simplesmente a vírgula (ex: 1,5 é tomado como 15), outras vezes fazem o arredondamento do decimal ao inteiro mais próximo, ainda que isso não seja o pretendido (ex: 2,3 assumido como 2). Muitas vezes têm a concepção de que é possível saber qual o decimal que se sucede a um outro decimal, tal como acontece nos números inteiros (ex: dizem que 2,27 é o número decimal que sucede a 2,26), em alguns casos não sabem distinguir a ordem dos números decimais (ex: podem dizer que 3,1 é inferior a 3,078 porque este último número tem mais algarismos, portanto é maior) (Bonotto, 1993).

Também Resnick (1987), concluiu que as crianças estabelecem com frequência dois princípios errados:

- os números decimais são vistos como dois números inteiros justapostos, sendo a regra de comparação importada dos números inteiros sem qualquer correcção.
- Se a parte inteira é igual, quantas mais casas decimais o número contém, mais pequeno é o número.

É preciso estarmos atentos a estas e outras concepções erradas dos alunos, para que possam ser adequadas as metodologias de ensino, se pretendemos realmente que os alunos tenham sucesso deste campo.

Na aquisição do conceito de número decimal é preciso encontrar os erros sistemáticos dos alunos (Brow & Burton, 1978, cit. por Riviére, 1995), de modo a não só sabermos quais os seus erros mais comuns, como também tentar identificar os processos de pensamento responsáveis por tais erros. Pode-se conseguir que o erro desempenhe um papel importante se se conseguir que este funcione como motor de acção e reflexão por parte de alunos e professores (Brousseau, 1983, cit. por Pérez, 1988).

Segundo Brissiaud deve-se trabalhar muito bem os números racionais na medida em que a noção de racional é extremamente complexa porque um mesmo número racional permite efectuar operações mentais muito diversas. E sugere mesmo que os investigadores em didáctica da matemática devem analisar os diferentes sentidos dos racionais para que seja possível trabalhá-los na escola com os alunos.

Como já se referenciou as concepções dos alunos sobre os decimais nem sempre são as mais correctas; há por isso necessidade de modificar as práticas e as estratégias para que seja possível aos alunos construírem concepções cognitivas correctas.

E devemos ter em conta que:

> A compreensão global do número e das operações, a par da capacidade de usar essa compreensão de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis na sua manipulação, constitui uma referência central do trabalho a desenvolver com os alunos desde os primeiros anos, neste domínio. Assim, o ensino dos números e das operações não deve visar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras mas sim uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações (Resultados das Provas de Aferição do Ensino Básico, 4° Ano – 2000, DEB, 2000).

Grandezas e Medidas

Medidas

Os alunos devem compreender os conceitos fundamentais de medida através de experiências concretas, para serem capazes de medir a distância, a massa (peso), o tempo, a capacidade, a temperatura e os ângulos.

A opinião dos pedagogos diverge quanto ao momento oportuno em que convém introduzir as grandezas contínuas, e nomeadamente a medida dos comprimentos. Enquanto os pedagogos soviéticos recomendam uma introdução precoce destas actividades, nos programas franceses, após 1970, a representação numérica dos comprimentos só aparece no segundo e terceiro anos do 1º Ciclo do Ensino Básico, e em Portugal só aparece no terceiro e quartos anos. Quando se analisa os programas, as crianças do primeiro ano, em França, e as do primeiro e do segundos anos em Portugal devem somente classificar e ordenar os objectos segundo os seus comprimentos por simples justaposição dos mesmos, isto é, sem utilização do número.

Piaget (1949) no seu volume sobre pensamento matemático da Introdução à Epistemologia Genética, faz um interessante paralelo entre operações lógico-aritméticas de classes e de relações assimétricas (seriação), que geram a noção de número, e as operações espaciais de participação e de deslocamento, que geram a possibilidade de medição (quantitativa) do espaço.

Segundo Piaget há que esperar pela idade que vai dos 6, 7 anos aos 11,12 anos – período das operações concretas – para que os alunos adquiram a noção de grandeza. Para este autor há um período de inteligência pré-operatória em que a quantificação das grandezas está ligada a esquemas perceptivos, ainda não têm a noção de conservação, tanto de quantidades contínuas como de descontínuas.

Para se adquirir a noção de medida há que previamente trabalhar a conservação das quantidades e a seriação, tal como acontece para o caso do número, porque ambas pressupõem a reversibilidade. Aliás, a contagem e a medição seguem um mesmo caminho no espírito da criança. O que, sob o ponto de vista matemático é muito compreensível, uma vez que ambos os casos é o número que está em causa (Pires, 1983).

Para Plaza & Gomez (1988) a medida, no espaço, consiste , antes de mais numa primeira fase, num movimento, já que se aplica o que se mede sobre aquilo que queremos medir. Posteriormente, não só, a criança aplicará a unidade de medida sobre o objecto a medir tantas as vezes quantas as necessárias (caso do comprimento ou da capacidade), como relacionará o objecto a medir com a unidade de medida um número conveniente de vezes (caso do peso e do calor), quando o processo de medida não possa ser feito directamente.

De inicio, para medir, a criança utiliza uma medida perceptiva feita a partir de impressões sensoriais, antes de adoptar um utensílio de medida móvel.

Piaget definiu estádios sobre o desenvolvimento evolutivo da ideia de medida:

a) Estádio da comparação perceptiva directa – processa-se a comparação entre dois objectos sem recorrer a medida alguma comum, nem a outro deslocamento; a comparação faz-se perceptivamente.

Neste estádio podem distinguir-se 2 fases:

- Na primeira, a estimativa é completamente directa.

Por exemplo, se se pedir a uma criança para construir uma torre igual a outra, ela costuma fazê-lo de forma sumária e sincrética.

- Na segunda, a estimativa é muito mais analítica, já não se utiliza só o transporte visual, mas também o transporte corporal/manual e, portanto, passa-se de uma forma primitiva de medição a formas mais ligadas àquilo que é realmente medir.

Assim, se perguntarmos a uma criança qual de dois pedaços de papel que tem diante de si é maior, na 1ª fase assinalará um deles utilizando unicamente a vista para o diagnóstico. Na 2ª fase utilizará já certas partes do corpo (mãos, pés,...) para determinar qual é o maior, qual o que tem maior área ... transportando essas partes do corpo de um papel para o outro.

b) Estádio da deslocação de objectos.

Também se podem distinguir 2 fases:

- A do transporte manual, que consiste em aproximar os objectos a comparar.
- A da utilização de um termo intermédio, mas que não é uma medida comum e independente.

Aproveitando o exemplo da comparação das 2 folhas de papel pode verificar-se que na 1ª fase deste estádio, a criança aproxima os 2 papéis e, inclusivamente, os sobrepõe para verificar qual é maior. Na 2ª fase passará a termos intermédios mais independentes como, por exemplo, um pedaço de cartolina que vai deslocando de um papel para outro.

No final desta 2ª fase quando a criança adopta como termo de comparação um objecto simbólico, dá-se um avanço importante para a construção do conceito da unidade de medida.

c) Estádio em que se opera com a propriedade transitiva

Para a relação de igualdade a propriedade transitiva traduz-se por:

$(A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C$ em que se verifica a intervenção de um termo médio operatório B.

A utilização da propriedade transitiva neste estádio tem a ver com o facto de a criança procurar obter um termo de comparação conveniente entre 2 grandezas; progressivamente, a criança irá constatar que a medição será tanto mais exacta quanto menor for a unidade de medida.

No final do 3° estádio desenvolve-se e aperfeiçoa-se na criança a ideia de unidade, que se vai construindo paralelamente à visualização de um espaço cada vez mais amplo.

Distinguem-se 4 etapas:

- Ausência de unidade – a primeira medida infantil é puramente visual e comparativa. A criança pode comparar 2 objectos directamente entre si, mas complicar-se-á a comparação se nela se introduzir um 3° objecto.
- Unidade objectal – ligada apenas a um objecto. Assim, se para se medir a quantidade de líquido que comporta um determinado recipiente, se fornecerem à criança diversos recipientes mais pequenos e de várias formas, é mais fácil que ela utilize para a medição aquele cuja forma for mais aproximada à do que tem de medir.
- Unidade situacional – relacionada ainda fortemente com o objecto a medir. Por exemplo, se se pedir a uma criança que meça a quantidade de líquido de dois recipientes, um quantitativamente muito maior que o outro e, para o efeito, se lhe forem facultadas duas unidades de medida, uma também maior que outra, ele tenderá a medir a quantidade do líquido do recipiente maior com a unidade de medida menor, atendendo mais à ordem de grandeza dos objectos do que à sua forma.
- Unidade propriamente dita – nesta etapa a criança já constrói a ideia de unidade com total independência da figura ou objecto que se propõe

medir, tanto na forma como no tamanho. Isto sucede quando se concebe uma unidade propriamente interfigural, a mesma para todas as figuras ou objectos.

Chegada a esta meta a criança enunciará como resultado de medida um número. Passa de uma unidade em princípio ligada totalmente ao objecto a medir (intraobjecto) a uma unidade que não depende em absoluto do objecto a medir (interobjecto).

Segundo Brissiaud (1989), toda a representação de uma quantidade pressupõe ela também uma escolha prévia de uma unidade, "a medição de um comprimento é bem mais fácil quando as crianças dispões de vários exemplares de padrões e elas os justapõem, do que quando dispõem de apenas um exemplar que devem colocar".

Em alguns casos, a contagem permite medir estas grandezas, por exemplo: para medir o comprimento em centímetros de um segmento de recta, pode-se procurar o número de exemplares de um padrão de 1 cm que é preciso justapor para obter esse comprimento. Esta actividade em que se compara por um processo directo e concreto, chama-se "medição".

De acordo com este autor as actividades de medição constituem situações privilegiadas para que a criança tome consciência do papel fundamental que joga a escolha de uma unidade: "o mesmo comprimento não é representado pelo mesmo número se o medirmos em decímetros ou em polegadas".

Segundo Plaza & Gomez (1988) a medição de grandezas é um acto que as crianças não podem realizar de uma forma fácil e espontânea e só é possível num estado mais avançado do ensino elementar. Isto deve-se a que o acto de medir requer uma grande experiência na prática de estimativas, classificações e seriações, uma vez estabelecido o atributo ou grandeza que se quer medir.

Um outro problema foi detectado por Castelnuovo (1987) há uma tendência natural em confundir o volume com a superfície de um sólido e a área com o perímetro de uma figura plana; encontramo-la ao longo do nosso ensino.

Grandezas

Grandezas Extensivas e Grandezas Intensivas

Há, no entanto que fazer a distinção entre as grandezas extensivas e as grandezas intensivas.

De acordo com Moura (1990) o comprimento, a área, o volume, a massa ... são grandezas do primeiro tipo. Isto significa que no conjunto dos comprimentos, das áreas, dos volumes, ..., está definida a operação "adição", isto é, adicionando dois comprimentos obtém-se ainda um comprimento. Demonstra-se que a adição de grandezas extensivas é associativa, comutativa e admite elemento-neutro, e que o conjunto dos comprimentos, áreas, volumes, ..., é ainda um conjunto totalmente ordenado pela relação "maior que" ou pela sua relação inversa "menos que".

Nas grandezas intensivas não está definida a operação "adição". Está neste caso a temperatura, por exemplo se misturarmos 20 litros de água a 30° centígrados com 10 litros de água a 40° centígrados obtemos 30 litros de água cuja temperatura não é 70° C. A temperatura e a densidade são exemplos de grandezas intensivas. A sua medição requer, em geral, meios muito sofisticados o que não acontece com a medição de grandezas extensivas.

Para esta autora, medir uma grandeza extensiva é fazer corresponder a cada quantidade dessa grandeza um número real não negativo, de tal modo que à quantidade dessa grandeza que é escolhida para unidade de medida corresponde o número 1, e à soma de duas quantidades corresponde a soma das suas medidas. A medida de uma grandeza extensiva é, portanto, um número e esse número depende da unidade escolhida.

A medida de um comprimento é um número e, como tal, esse número varia em função da unidade de medida escolhida. Por conseguinte, a medida de um comprimento não é o mesmo que o comprimento. O comprimento é uma propriedade, a medida de um comprimento é o número que lhe está associado. No conjunto dos comprimentos está definida apenas uma operação – a adição. É pois incorrecto multiplicar comprimentos – no cálculo de áreas devem-se apenas multiplicar as suas medidas.

Grandezas Descontínuas e Contínuas

Os números naturais pertencem ao tipo de grandezas discretas, enquanto que, por exemplo, o comprimento, a massa, a capacidade, são grandezas contínuas, ou seja, o número natural está ligado à contagem de grandezas descontínuas (conjuntos de objectos ou seres) e o número real ligado à medição de grandezas contínuas (comprimentos, pesos, ...).

O que distingue as grandezas contínuas das não contínuas é, pois, o facto de ser sempre possível encontrar entre duas quantidades duma mesma grandeza uma outra quantidade desta grandeza (Moura, 1990).

De acordo com Piaget (1974) há idades próprias para se adquirirem as noções das diferentes grandezas. São as seguintes:

- comprimento, capacidade e massa podem ser compreendidas por crianças de 6 a 8 anos;
- superfície e tempo podem ser compreendidas por crianças entre os 7 a 8 anos;
- volume e amplitude não antes dos 10 aos 12 anos.

Geometria

Área da Matemática que lida com as propriedades do espaço através de um sistema que utiliza pontos, linhas, superfícies e sólidos.

Aprender geometria é construir, representar, visualizar, relacionar, transformar objectos do espaço em que vivemos e também de um espaço imaginário que os matemáticos e todos nós um pouco temos vindo a construir ao longo do tempo.

Com respeito ao espaço, Piaget (1937), mostra que, inicialmente, o sujeito elabora espaços específicos para cada domínio sensório-motor, heterogéneos e não coordenados entre si. Por exemplo, a criança não pode dirigir a sua vista até aos objectos que toca, nem orientar a sua apreensão para os objectos que motivam a sua atenção visual. O espaço está formado por feixes perceptivos, altamente instáveis e incontroláveis pelo sujeito, aos quais acomoda os escassos deslocamentos que pode realizar. Progressivamente a criança vai conseguindo uma maior coordenação das suas actividades no espaço.

Na sua obra, "A representação do espaço na criança, Piaget e outros(1947), estudam a intuição como factor na construção da geometria objectiva do espaço. Para isso, recorrem à sua exteriorização através de representações gráficas (desenhos). A intuição geométrica é considerada como de natureza operatória, segundo uma distinção entre elementos figurativos (imagens) e operativos (acções internalizadas) no curso do pensamento. São os aspectos operativos que, progressivamente, vão dando mobilidade às imagens, permitindo a representação das suas transformações.

A tese fundamental de Piaget nesta obra é que, no domínio da geometria, a ordem genética de aquisição das noções espaciais é inversa à ordem histórica do progresso da ciência. A criança considera primeiro as relações topológicas de uma figura, e só posteriormente as projectivas e euclidianas, que são construídas quase de maneira simultânea. As relações topológicas permitem a constituição de uma geometria do objecto, em singular. O domínio das relações projectivas permite a constituição de uma geometria do espaço exterior ao sujeito, que o contempla a uma certa distância. Na construção do espaço euclidiano o espaço contém tantos objectos móveis como o sujeito.

As Capacidades Espaciais e a Aprendizagem da Geometria

Tanto na Matemática como na Psicologia são utilizados diversos termos para referir as capacidades espaciais. Muitos investigadores partem do pressuposto de que existe uma relação entre a aprendizagem da Geometria e as capacidades espaciais do indivíduo.

Vários autores, como refere Gordo (1993), sugerem que "as capacidades espaciais não são capacidades mentais simples, envolvem processos mentais complexos e, como tal, existem várias tentativas de as agrupar segundo características específicas".

Para Tartre (1990) capacidades espaciais são "as capacidades mentais relacionadas com a compreensão, manipulação, reconhecimento ou interpretação de relações visualmente" (p.216).

Van Hiele (1959) desenvolveu uma teoria do desenvolvimento espacial que é composta por cinco níveis:

Nível 1 – As figuras são distinguidas em relação às suas formas individuais como um todo. A criança não é capaz de ver relações entre formas diferentes, identifica as formas individualmente.

Por exemplo: Uma criança de seis anos de idade pode reproduzir um quadrado, um triângulo, um rectângulo num quadro geométrico com bandas de borracha e memorizar os seus nomes, mas ainda não consegue dizer o que é diferente entre essas figuras.

Nível 2 – Neste nível começa a haver um desenvolvimento do conhecimento das partes das figuras. A criança vai analisar as propriedades das figuras, as suas diversas partes. Estas propriedades são verificadas através de observações a partir de um trabalho prático feito pela criança, através de medições, desenhos, construções de modelos, etc.

Por instantes, a criança vê que um rectângulo tem quatro ângulos rectos, que as diagonais são do mesmo comprimento, como são os pares contrários / opostos dos lados. Os pares opostos dos lados do paralelogramo genérico são também reconhecidos como sendo do mesmo comprimento. Mas a criança continua a não ver o rectângulo como um paralelogramo particular.

Nível 3 – As parecenças e as definições começam a ser clarificadas para a criança, mas apenas como orientação. Com ajuda, a criança, pode ver certas relações.

O quadrado é visto como um caso especial de um rectângulo que é um exemplo particular de um paralelogramo.

As conexões lógicas começam a ficar estabelecidas através de uma mistura de experimentação e de raciocínio práticos.

Nível 4 e 5 – Estes dois níveis referem-se ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo e à construção da teoria, culminando em abstracção completa isenta de interpretação específica. A criança desenvolveu o seu poder dedutivo e já consegue identificar as diversas propriedades de uma figura.

Para ajudar os estudantes a criarem os seus próprios níveis de pensamento, Van Hiele (1973) propõe as seguintes fases de aprendizagem:

Fase 1 – Investigação – O professor conversa com os estudantes sobre os objectos em estudo. O professor aprende como os alunos interpretam as palavras e dá-lhes alguma compreensão do assunto a ser estudado. As questões são levantadas e as observações feitas.

Fase 2 – Orientação Directa – O professor cuidadosamente propõe sequências de actividades para o aluno explorar de acordo com aquilo que o aluno está a estudar e eles vão-se familiarizando com as características dos objectos em estudo. Nesta fase, muitas das actividades são tarefas de um passo que obtém respostas específicas.

Fase 3 – Explicitação – Os estudantes constróem através de experiências anteriores, com uma intervenção mínima por parte do professor, referem o seu vocabulário e expressam as suas opiniões sobre as estruturas do seu objecto de estudo. Nesta fase os estudantes começam a formar um sistema de relações. É essencial que eles façam as suas observações antes de receberem as explicações do professor.

Fase 4 – Orientação Livre – Os estudantes, nesta fase, defrontam-se com tarefas multifunções, ou tarefas que podem ser realizadas de diferentes formas. Eles ganham experiência a encontrar a sua própria maneira de resolver as tarefas. Ao orientarem-se a si próprios na investigação, muitas das relações entre os objectos de estudo tornam-se explícitos para os alunos.

Fase 5 – Integração – Nesta fase, os estudantes revêem os métodos à sua disposição e formam uma perspectiva geral. Os objectos e as relações são unificados e internacionalizados para um novo domínio do pensamento. O professor auxilia este processo prevendo globalmente aquilo que o aluno já sabe, tendo cuidado para não apresentar novas ideias discordantes.

Segundo este autor, quando esta última fase é concluída um novo nível de pensamento é alcançado.

Del Grande (1987), citado por Gordo (1993), usa o termo percepção espacial referindo-se à "capacidade para reconhecer e discriminar estímulos no e do espaço e para interpretar esses estímulos, associando-os com experiências anteriores" (p.126).

Este autor refere que uma das primeiras categorizações é a de Frostig e Horne que, depois de inúmeros estudos e produção de materiais, identificaram cinco capacidades espaciais diferentes:

- coordenação visual motora,
- percepção figura-fundo
- constância perceptual,
- percepção da posição no espaço,
- percepção das relações espaciais.

Passamos a especificar cada uma destas categorias, segundo Del Grande(1990):

- a coordenação visual motora é a "capacidade para coordenar a visão com os movimentos do corpo" (p.14);
- a percepção figura-fundo é o "acto visual de identificar uma figura específica (o foco) num pano de fundo, numa gravura" (Del Grande, 1987, p.128);
- a constância perceptual é a "capacidade de reconhecer figuras geométricas apresentadas numa variedade de tamanhos, tonalidades, texturas e posições no espaço e de discriminar figuras geométricas semelhantes" (p. 15);
- a percepção da posição no espaço é a "capacidade para relacionar um objecto do espaço consigo próprio" (p.17);
- a percepção das relações espaciais é a "capacidade para ver dois ou mais objectos em relação consigo próprio ou com cada uma deles" (p. 17).

A estas capacidades Hoffer (1977) acrescentou mais duas: a discriminação visual e a memória visual. Para este autor a discriminação visual é a "capacidade para identificar semelhanças e diferenças entre objectos" (p.88), e a memória visual é a "capacidade para evocar, de maneira precisa, um objecto que deixa de estar visível e relatar as suas semelhanças e diferenças com outros objectos que estão ou não à vista" (p.89).

Ao conjunto destas sete capacidades Hoffer (1977) deu o nome de capacidades de percepção visual.

McGee, Connor e Serbin citados por Tartre (1990) referem outra categorização diferente, envolvendo dois tipos de capacidades: a visualização e a orientação espaciais.

A visualização espacial envolve a capacidade de imaginar como se apresentará um objecto representado numa gravura se for rodado, torcido, invertido, dobrado ou desdobrado (McGee referido em Tartre, 1990).

A orientação espacial envolve a capacidade para detectar combinações de objectos segundo um padrão e a capacidade para manter precisas as percepções, face à mudança de orientação (Bishop, 1983).

A diferença fundamental, entre elas, relaciona-se com o facto de que a visualização envolve sempre movimento ou alteração mental de um objecto, enquanto que, na orientação espacial, o que se altera é a perspectiva perceptual do observador (Tartre, 1990).

Fennema e Behr (1980) põem a hipótese de que "a visualização espacial é bastante importante na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos de escolaridade, por causa da ênfase dada à concretização e às representações icónicas, que têm componentes espaciais" (p. 329).

Bishop (1980) propõe outra categorização também interessante: a capacidade de interpretar informação figurativa (IFI) e a capacidade de processamento visual (VP).

A capacidade de interpretar informação figurativa (IFI), segundo este autor, "envolve a compreensão de representações visuais e de vocabulário espacial usados no trabalho geométrico, em gráficos, cartas e diagramas de todos os tipos" (p.184). Esta capacidade relaciona-se com a forma do material que funciona como estímulo.

A capacidade de processamento visual (VP) "envolve a visualização e a translação de relações abstractas e informação não figurativa para termos visuais, incluindo também a manipulação e transformação de representações e imagens visuais" (p.184).

Bishop (1983) refere que a capacidade de interpretar informação figurativa é "provavelmente responsável por muitas das relações entre as capacidades espaciais e as geométricas encontradas na literatura", e que aparenta ser mais fácil de treinar e desenvolver que a capacidade de processamento visual.

Bishop (1989) faz uma revisão da literatura sobre a visualização na Educação Matemática, na qual considera três aspectos diferentes. O primeiro aspecto diz respeito ao objecto que é visualizado e às correspondentes imagens visuais. Um segundo aspecto relaciona-se com a actividade de visualizar, tem a ver com processos e capacidades. Como consequência destes dois aspectos, um terceiro aspecto de revisão engloba uma perspectiva educativa, interligando com o ensino específico de procedimentos, com o papel dos materiais e do ambiente social.

Um estudo que pretendia desenvolver algumas capacidades espaciais relacionadas com a capacidade de interpretar informação figurativa (IFI) foi o efectuado por Gaulin (1985) como refere Gordo (1993). Este estudo, deu especial ênfase a materiais que facilitassem tanto o desenvolvimento da visualização espacial como da intuição geométrica, explorando também vários tipos de representações gráficas (a duas dimensões) de sólidos policúbicos. O mesmo autor refere que o conhecimento e a experiência com diferentes tipos de representações de formas tridimensionais favorece o desenvolvimento da capacidade de interpretar informação figurativa (IFI) e, eventualmente, alguns aspectos da capacidade de processamento visual (VP).

Existem alguns estudos que se preocuparam com a relação entre objectos a três dimensões (3D) e suas representações a duas dimensões (2D). A transformação 3D-2D é uma capacidade muito necessária na aprendizagem da Geometria e suas aplicações, atraindo muitos investigadores. Em termos globais, nos estudos sobre este assunto, foram encontradas muitas dificuldades, tanto na transformação de objectos a 3D para a sua representação a 2D, como na operação inversa, independentemente de se ter trabalhado com crianças, adolescentes ou professores do ensino básico (Hershkowitz, 1990 citado por Gordo, 1993).

O Papel da Representação no Ensino da Geometria

As representações dos conceitos geométricos pertencem ao espaço representativo, é nele que trabalhamos e devemos ter em conta as suas propriedades.

Como refere Mesquita (1994) os conceitos geométricos, isolados ou em conjunto, podem ser representados externamente (se essa representação se concretiza materialmente) ou internamente (se essa representação é mental). No primeiro caso falamos de figuras. E o matemático sabe o que é uma figura, conhece os seus poderes e as suas limitações.

As projecções são uma experiência comum na vida da criança. Descobrir a invariância de objectos tridimensionais de diferentes pontos de vista é um objectivo principal. Mas construir imagens de objectos tridimensionais quando nunca poderá vê-los de mais do que um ponto de vista ... até ao momento é uma tarefa árdua e longa.

Como Lappan e Winter (1979) referem, vivemos num mundo tridimensional mas a maioria das experiências matemáticas que proporcionamos aos nossos alunos são bi-dimensionais. Nós usamos livros bi-dimensionais, contendo imagens bi-dimensionais de objectos tridimensionais, para apresentar a matemática às crianças. Este uso das imagens referidas faz com que haja dificuldades no processo de compreensão. Sendo necessário que as crianças aprendam a colocar representações bi-dimensionais no seu mundo.

Frenkel (1973) exprimiu claramente qual a importância duma figura: "as figuras permitem mobilizar simultaneamente múltiplas relações, enquanto que a palavra e a escrita – lineares no tempo – só as conseguem enunciar sucessivamente".

Do ponto de vista didáctico, a situação não é tão clara; para os alunos, contrariamente aos matemáticos, uma confusão pode ser estabelecida, e como resultado, o papel da representação pode ser ambíguo. E essa ambiguidade pode ainda ser agravada, por outra razão, associada à representação externa dos conceitos geométricos: uma figura, que definimos como uma representação externa icónica dum conceito ou duma situação geométrica, pode representar segundo os casos, ou uma situação concreta ou uma situação abstracta (Frenkel, 1973).

Segundo esta autora a representação dos objectos geométricos coloca um problema, comum aliás a outras áreas do conhecimento; se esses objectos geométricos são abstractos, como representá-los, isto é, como passar dos tais objectos ideais a outros, concretos, reproduzindo as sensações resultantes desses objectos geométricos, sem perder o grau de abstracção necessário?

Assim, em relação a uma representação geométrica, é importante considerar o seu grau de abstracção e a sua representatividade. Pode-se ver uma figura como uma representação duma só configuração ou, ao contrário, como uma família de configurações. Para os alunos, pode significar uma ambiguidade, que o registo figurativo contribui para manter: uma representação, como toda a imagem é polisémica.

Segundo Bertin (1985) a representação pode receber interpretações variadas, pois toda a significação é ligada a um conjunto de signos, que são percebidos e interpretados em referência a um repertório de analogias e de hierarquias de cada receptor. Cada um tem direito a interpretar à sua maneira até ao momento em que um simbolismo emerge, ou pelo menos, até que o hábito duma convenção seja adquirida.

Uma dificuldade adicional diz respeito à sua "leitura", ou à "mobilização das múltiplas relações" de que falava Frenkel. O que levanta o problema da percepção.

Uma das questões essenciais é a do "fundo", ou a região sobre a qual a figura está desenhada. Os psicólogos da gestalt mostraram até que ponto a oposição figura/fundo é importante. A percepção é condicionada por este tipo de factores.

Kuchemann (1981) mostrou que a existência ou não dum fundo quadriculado em questões simples de geometria tinha um efeito sobre o sucesso nessas tarefas (a percentagem de sucesso descia de 86% - fundo quadriculado- para 61% - fundo não quadriculado).

Mas a existência dum tal fundo pode também ter um efeito perturbador, como mostra o estudo de Grenier (1985), pois este pode induzir a consideração de pontos particulares da figura, e por vezes, procedimentos de contagem sobre as linhas materializadas do quadriculado, verticais e horizontais, procedimentos errados se o eixo de simetria é oblíquo na folha.

Segundo Mesquita (1994) para resolver um problema em geometria é preciso, na maior parte das vezes, considerar vários tipos de modificações numa representação. Podemos considerar modificações configurais segundo a natureza da relação parte-todo.

Uma outra modificação é do tipo estruturalista (elemento vs. conjunto),as partes são aqui consideradas como um elemento constitutivo do todo (Mesquita,1989).

Para outros problemas, é uma modificação posicional, isto é, aquela que "só se refere à orientação e ao lugar" que tem um papel heurístico na resolução dum problema de geometria (Duval, 1988). Trata-se, em geral, de rotações ou translações de figuras em relação ao referencial do fundo donde elas se destacam.

Como refere Duval (1988) num problema de geometria, vários registos estão em concorrência, ou em confronto: o das figuras, o da linguagem natural e o das notações simbólicas.

As informações resultantes destes três registos podem ser concordantes, caso em que há uma congruência semântica entre os registos, ou não. No caso de congruência, os objectos imediatamente identificáveis por simples apreensão são aqueles que são nomeados no texto do enunciado ou nas hipóteses. As questões de representação são especialmente influenciadas por um tipo de congruência inter-registos, entre os registos figurativo e o registo da língua natural.

Duval (1988) mostrou a importância deste tipo de congruência, semântica, entre os dois registos, figura e texto, verificando que existe uma diferença entre resultados obtidos numa mesma tarefa, apresentada em duas versões, uma congruente, outra não. A tarefa não-congruente apresenta uma maior taxa de insucesso.

Assim podemos afirmar que o papel da representação não é o mesmo em todos os problemas de geometria. Podendo ser **descritivo**, quando se reduz a uma apreensão sinóptica das propriedades em presença, ou **heurístico**, se a representação suscita procedimentos tendentes a uma resolução (correcta ou não).

A representação em geometria pode ser apreendida de diversas formas, que privilegiam um certo tipo de raciocínios, em detrimento de outros.

Brousseau (1984) através dos seus estudos nesta área concluiu mesmo que, os alunos não desenvolvem uma linguagem para descrever as características das figuras, nem têm aprendido a seleccionar um conjunto de características (necessárias e suficientes) para a sua reprodução.

Os alunos devem compreender os conceitos geométricos necessários para trabalharem eficazmente no espaço tridimensional. Devem ter conhecimento de conceitos tais como: paralelismo, perpendicularidade, congruência, semelhança e simetria. As figuras planas e os sólidos geométricos têm de ser explorados para os alunos ficarem a conhecer as suas propriedades. E devem visualizar e verbalizar como os objectos se movem no mundo, usando translações, simetrias e rotações.

Os conceitos geométricos devem ser explorados de modo a envolverem medições e resolução de problemas. Porque:

> A geometria constitui um meio privilegiado de desenvolvimento da intuição e da visualização espacial. É essencialmente um meio para a criança conhecer o espaço em que se move, pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação. Hoje a medida é usada de muitas formas no mundo à nossa volta e é vital para a comunicação. É, ainda, um meio privilegiado para se estabelecerem conexões, quer dentro da própria matemática, quer na ligação a outras disciplinas (Resultados das Provas de Aferição do Ensino Básico, 4º Ano – 2000, DEB, 2000).

Situações Problemáticas

Na sociedade actual todos deparamos com situações complexas que é necessário interpretar e resolver.

Daqui se depreende a necessidade de a Escola criar nos alunos não só a capacidade de formular problemas decorrentes de variadas situações, como também dotá-los de recursos que os ajudem a encontrar soluções e a enfrentar com confiança novas questões e desafios.

Sabe-se também que os alunos portugueses mostram dificuldades em algumas áreas do saber matemático, revelando baixos níveis de desempenho em questões que remetem para a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação (DEB., 1999).

A tarefa principal que se impõe, aos professores, é conseguir que as crianças desde cedo aprendam a gostar de Matemática. Há que organizar os meios e criar o ambiente propício à concretização do programa, de modo que a aprendizagem seja, na sala de aula, o reflexo do dinamismo das crianças e do desafio que a própria Matemática constitui para elas. Só assim esta área se tornará aliciante e motivadora, gerando alunos activos, questionadores e interessados em saberem mais e melhor Matemática.

O que é um Problema ?

A palavra problema tem conotações diferentes de indivíduo para indivíduo e, por isso, torna-se necessário caracterizar o sentido do que é um problema matemático.

Das várias definições de problema, referenciamos algumas no sentido de clarificar o conceito.

Segundo Polya (1980), resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum caminho é conhecido de imediato, é encontrar um caminho para sair de uma dificuldade, é encontrar um caminho em torno de um obstáculo, é atingir um objectivo desejado que não é imediatamente acessível, e fazê-lo com os meios apropriados.

Também Booker (1988) refere que "um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão que não pode dar resposta ou com uma situação que não sabe resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis".

Lester (1980) defende que um problema matemático é aquele que envolve conhecimentos, competências e procedimentos matemáticos.

Este autor também diz que um problema é uma tarefa para a qual:

- o indivíduo ou grupo que com ela se confronta quer ou precisa de encontrar uma solução;
- não há procedimento prontamente acessível que garanta ou determine completamente a sua solução;
- o indivíduo ou grupo deve tentar achar uma solução.

Resolver um problema aritmético, como defende Vergnaud (1990), é em primeiro lugar efectuar a boa escolha dos dados a utilizar e das operações a aplicar.

Depois de termos analisado e reflectido sobre as várias posições destes autores podemos afirmar que um problema é matemático quando envolve o conhecimento de conceitos, técnicas, planos, estratégias e algoritmos matemáticos na sua resolução.

A Importância de Resolver Problemas

No Ensino Básico, as grandes finalidades da Matemática são o desenvolvimento da capacidade de raciocínio, de comunicação e de resolver problemas.

A focalização do programa na resolução de problemas deverá constituir a actividade central desta área e estar presente no desenvolvimento de todos os conteúdos. Porque esta actividade é promotora do desenvolvimento do raciocínio e da comunicação, devendo nestas idades ancorar em operações lógicas elementares e apoiar-se em materiais e linguagem gráfica que constituam uma ponte entre o real e as abstracções matemáticas.

Segundo Fernandes (1992), para que os objectivos da reforma curricular do Ensino Básico sejam atingidos, é necessário que os problemas constituam um desafio, que os alunos se envolvam directamente no processo de resolução, na construção da sua própria aprendizagem, que os modos de ensino sejam variados e as actividades de aprendizagem não se esgotem no ouvir as explicações do professor e no resolver individualmente os problemas.

A aprendizagem escolar responderá a um jogo duplo de exploração livre da criança e de interacção com o próximo.

O professor, como moderador, ouvirá as respostas, perguntará "porquê", lançará pistas, aproveitará o erro para formular novas perguntas e pedirá estimativas antes de ser encontrada a solução. Deverá também estimular a partilha das diversas estratégias para a obtenção de um resultado se, na sua busca, foram percorridos caminhos diferentes. Dando lugar à comunicação e à troca de ideias e de conceitos entre os alunos.

Brunner (1983) salienta também o papel do adulto como mediador das interacções sociais; o desenvolvimento resulta, segundo ele, da complementaridade entre a existência de um suporte organizador de natureza sócio-cultural e as vivências que a criança vai acumulando em contextos significativos. A actividade da criança é estimulada e modelada através de reforços que a orientam na realização da tarefa, começa por ser hetero-regulada para se tornar progressivamente auto-regulada.

O ensino da Matemática perspectivado para a resolução de problemas requer mais do que a resolução isolada de problemas não rotineiros ou de problemas típicos dos manuais escolares. Implica a ideia de que a verdadeira essência do estudo da Matemática é precisamente uma actividade de exploração, de formulação, de conjecturas, de observação e de experimentação, isto é, todos os aspectos da resolução de problemas.

Como afirma Vergnaud (1986), "um conceito não pode ser reduzido à sua definição, se se estiver interessado na sua aprendizagem e no seu ensino. É através de situações e de problemas por resolver que um conceito começa a fazer sentido para a criança" (p.198).

A resolução de problemas deve constituir um momento especial de interacção e de diálogo, tendo a comunicação matemática um papel muito importante na construção de elos de ligação entre as noções informais e intuitivas das crianças e a linguagem abstracta e simbólica da matemática, uma vez que os alunos devem aprender a descrever os fenómenos de várias formas escritas, orais e visuais.

A linguagem adquire uma função organizadora do pensamento com um importante papel ao nível da estruturação de conceitos, permitindo a actividade reflexiva.

Como refere Vygotsky (1934/2001), a função primordial da linguagem é a comunicação. A linguagem é antes de mais um meio de partilha social, um meio de conversação e de compreensão. A comunicação baseada na compreensão racional e na transmissão intencional de ideias e sensações, exige forçosamente um determinado sistema de signos, cujo protótipo foi, é e será sempre a linguagem humana, surgida da necessidade de comunicar durante o processo de trabalho.

Este autor também verificou que não é possível comunicação sem recursos a signos e que também não é possível comunicação sem significados. Só é possível transmitir a outra pessoa uma determinada sensação ou determinado conteúdo, se esse conteúdo estiver associado a uma determinada classe ou grupo de fenómenos; isso exige forçosamente a generalização. A comunicação pressupõe obrigatoriamente a generalização e o desenvolvimento da significação verbal.

Como diz Tolstoi (1903, p.143) citado por Vygotsky, "quase sempre a incompreensão não depende da palavra, mas do conceito que se exprime pela palavra". A palavra está quase sempre disponível quando o conceito existe. Por isso há todo o fundamento para ver o significado da palavra não apenas como a unidade do pensamento e da linguagem, mas também como a unidade de generalização e de partilha social, isto é, a unidade do pensamento e da comunicação.

Segundo Vygotsky, o desenvolvimento do pensamento depende da linguagem, dos meios de expressão do pensamento e da experiência sociocultural da criança.

Por isso as crianças devem perceber que é importante ser capaz de explicar e justificar o seu raciocínio e que saber como resolver um problema é tão importante como obter a sua solução. Esta consciência só se adquire quando as crianças têm oportunidade de aplicar as suas capacidades de raciocínio e quando justificar o seu próprio pensamento é uma componente esperada da discussão de problemas. Porque ninguém pode fazer matemática sem raciocinar.

Uma aula que valorize o raciocínio valoriza também a comunicação e a resolução de problemas, componentes dos objectivos gerais de todo o currículo escolar.

A resolução de problemas coloca os alunos em atitude activa de aprendizagem, quer dando-lhe a possibilidade de construir noções como resposta às interrogações levantadas (exploração de novos conceitos), quer incitando-o a utilizar as aquisições já feitas e a testar a sua eficácia. É portanto, um processo pelo qual os alunos têm a possibilidade de verificar a potencialidade e a utilidade da matemática no mundo que os rodeia.

Como processo de aprendizagem proporciona um contexto para construir conceitos; descobrir relações; tomar contacto com o poder e a utilidade da Matemática.

Como actividade, dá oportunidade aos alunos de observar, experimentar, seleccionar dados, organizar dados, relacionar, fazer conjecturas, argumentar, concluir e avaliar.

O desenvolvimento, nos alunos, de capacidades de resolução de problemas é considerado uma das finalidades importantes do ensino da Matemática. Assim deve-se aplicar o que defende Polya (1978), se se aprende a resolver problemas, resolvendo problemas, então é necessário colocar os alunos em situação de resolvedores de problemas.

Processos Cognitivos das Situações Problemáticas

A maioria dos professores de Matemática rapidamente verificam que muitos dos seus alunos não são capazes de resolver problemas, com excepção dos considerados rotineiros, apesar do facto de parecerem ter adquirido a "mestria" de todos os requisitos necessários ao nível do cálculo, do conhecimento de factos e de procedimentos algorítmicos.

Lester (1983), atribui o facto de tantos alunos não serem capazes de resolver problemas, com excepção de problemas rotineiros a três razões principais:

- a resolução de problemas é uma forma de actividade intelectual extremamente complexa;
- há falta de acordo no que respeita a saber o que é que o processo de resolução de problemas envolve;
- são dadas muito poucas oportunidades aos alunos para se envolverem realmente na resolução de problemas.

Assim, iremos focalizar esta parte do trabalho nos processos cognitivos presentes quando os alunos lidam com uma situação problemática, em relação à qual procuram encontrar soluções para uma ou mais questões, envolvendo a construção de um modelo matemático que permita responder a essas questões.

A resolução de problemas é uma actividade que requer que um indivíduo se envolva numa variedade de acções cognitivas, cada uma das quais exigindo algum conhecimento e capacidade. Além disso, estas acções cognitivas são influenciadas por factores não cognitivos. Ou seja, pela sua natureza mais intrínseca, a resolução de problemas é uma forma extremamente complexa de desafio que envolve muito mais do que o simples recordar de factos para a aplicação de procedimentos bem aprendidos (Begle, 1971).

A capacidade para resolver problemas de Matemática desenvolve-se lentamente ao longo de um período muito alargado de tempo porque o seu sucesso depende de muito mais do que os conhecimentos de conteúdos. O desempenho em resolução de problemas parece ser uma função de pelo menos cinco categorias alargadas e interdependentes de factores: (1) aquisição e utilização de conhecimentos; (2) controlo; (3) concepções; (4) factores de domínio afectivo; e (5) contextos sócio-culturais. Estas cinco categorias intersectam-se (não é possível separar completamente factores de domínio afectivo, concepções e contextos sócio-culturais) e relacionam-se numa variedade de formas tão vasta que não é possível descrevê-las em poucas páginas (Lester et al., 1992).

Há ainda dificuldade em identificar claramente os processos envolvidos e/ou utilizados na resolução de problemas e em descobrir quais desses processos são mais facilmente transferíveis e aplicáveis a novas situações e se aplicam a um leque alargado de problemas. Na verdade, podem considerar-se factores relacionados com o sujeito, com a tarefa, com a situação, com o produto, com o processo, com a avaliação e ainda os chamados factores concomitantes (Kilpatrick, 1978; Kulm, 1980).

Um modelo conceptual pode ser definido como "estrutura adaptativa consistindo de (a) redes de relações e operações internas a um dado conceito, as quais o aluno deve ser capaz de coordenar com o objectivo de fazer juízos acerca desse conceito, (b) sistemas inter-conceitos que se ligam ou combinam com redes de conceitos, (c) sistemas de representações ligados a sistemas de tradução e transformação entre aqueles modos, e (d) sistemas dinâmicos que permitem aos alunos a utilização das três componentes anteriores" (Lesh et al, 1983, p.264; citado por Matos, 1994).

Aos modelos matemáticos (externos) correspondem modelos psicológicos (internos) ou modelos conceptuais (Lesh, Landau & Hamilton, 1983; Lesh, 1990). Assim face a uma dada situação problemática os alunos criam ou adaptam os seus modelos internos com os quais percepcionam ou lêem a situação.

Um modelo matemático de uma situação problemática real constitui uma representação matemática de uma porção da realidade. Esta representação é realizada através de objectos, relações e estruturas da Matemática, tais como tabelas, relações funcionais, gráficos, figuras geométricas, etc.

Transversalmente à interpretação da aprendizagem como construção de modelos, surge o conceito de representação. Dufour-Janvier, Bednarz e Bélanger (citados por Carreira, 1993), distinguem representações internas e externas. As primeiras dizem respeito às imagens mentais que são construídas pelos alunos e em geral pelas pessoas ao interpretar e codificar um dado fenómeno, isto é, uma porção da realidade.

Para Carreira (1993) as representações externas serão "organizações simbólicas materializáveis que têm por objectivo traduzir uma determinada situação" (p.1).

Assim, sempre que os objectos formais utilizados para construir representações externas façam parte de uma colecção de estruturas matemáticas ou façam apelo a um universo conceptual de natureza matemática, trata-se já de representações matemáticas.

Parece poder concluir-se que as representações internas (ou representações mentais) são de facto os modelos conceptuais.

O desenvolvimento da aprendizagem é feito através da construção e aperfeiçoamento de modelos. A capacidade dos alunos para utilizarem um dado modelo conceptual varia com a situação presente, dependendo de factores contextuais e das características dos alunos.

Assim, os alunos desenvolvem modelos em ligação com situações concretas o que mostra que modelos associados a certas situações podem ser mais sofisticados e perfeitos do que os relativos a outras situações (Lesh, 1990 & Ponte, 1992). Esta ideia constitui uma visão distinta da teoria de Piaget que postula a existência de operações mentais independentes dos conteúdos concretos.

Da Situação ao Modelo

Segundo Matos (1994), na fase inicial da construção do modelo, o processo a seguir deverá ter em conta: a identificação dos elementos relevantes da situação que se pretende estudar, a selecção dos objectos e relações relevantes nessa situação, a idealização apropriada desses elementos para elaboração de uma representação matemática, a escolha dos objectos e relações matemáticas adequadas e do respectivo universo matemático para servir de base ao modelo e a definição de uma correspondência entre a situação e o universo do modelo.

Neste processo prevalece uma dominância de processos lógicos, dedutivos e organizados.

A compreensão da situação por parte dos alunos deve constituir um processo centrado na formulação de questões. As questões formuladas constituem uma linha de orientação para o desenvolvimentos da fase inicial do modelo e vão dar corpo à estruturação da argumentação a desenvolver nas etapas seguintes (Skovsmose, 1989, p.113). Traduzem em linguagem os objectivos que vão sendo seguidos durante o processo. A formulação de questões relevantes por parte dos alunos pode constituir um elemento que conduza à motivação intrínseca que é o motor de um investimento mais forte e duradoiro no desenvolvimento do modelo.

Na fase inicial da modelação, os alunos tendem a fazer em geral uma abordagem ingénua da situação. Estes modelos iniciais tendem a ser imperfeitos e distorcidos, adquirindo progressivamente mais estabilidade e flexibilidade. Estas características, segundo Matos (1992), fazem parte da natureza da actividade de construção de modelos e não das pessoas ou dos alunos.

Na fase de exploração das relações estabelecidas entre os objectos que foram definidos (do ponto de vista matemático), há formulação de hipóteses e conjecturas, realização de operações, etc. Estas actividades geram grandes dificuldades na articulação das ideias matemáticas com a situação problemática. Neste processo a situação real e o modelo matemático não são isomorfos.

O processo de avaliação de um modelo consiste na identificação de discrepâncias entre o significado traduzido dos resultados obtidos sobre o modelo e as características (identificadas ou previstas) da situação real.

Se o modelo conceptual interno do aluno é instável, mais dificilmente poderão ser identificados as inconsistências internas nesse modelo e as discrepâncias entre modelo e realidade poderão não ser detectadas.

Segundo Lesh (1992), os alunos tendem a construir modelos conceptuais por justaposição, integração e diferenciação de modelos conceptuais que qualitativamente adquirem progressiva estabilidade.

Ponte (1992) salienta, os problemas não podem ser resolvidos simplesmente ligando em conjunto modelos estáveis. Indivíduos que são considerados como especialistas numa determinada área serão aqueles que têm modelos conceptuais acessíveis e estáveis para interpretar, transformar e manipular informação de diversa natureza dessa área.

Skovsmose (1989), identifica três tipos de conhecimento presentes no processo de modelação:

- o conhecimento matemático;
- o conhecimento tecnológico (como construir um modelo);
- o conhecimento reflexivo (constituído por esquemas conceptuais elaborados acerca da natureza dos modelos matemáticos).

Para este autor, existem duas perspectivas fundamentais na análise de modelos matemáticos: uma primeira relativa às relações estruturais do modelo com outros elementos da situação e uma segunda relativa às relações de desenvolvimento entre aquelas duas. Da análise destas relações poderá resultar o conhecimento reflexivo.

Outros autores, Lambert, Steward, Manklelow e Robson (1989), sugerem um esquema conceptual envolvendo quatro conceitos:

- domínio matemático,
- domínio do problema,
- metacognição
- e crenças (beliefs).

Estes conceitos são organizados em três níveis distintos. Os elementos mais pertinentes deste modelo residem no facto de: considerarem uma estrutura hierárquica, tomarem como central o papel da actividade metacognitiva e reconhecerem as influências dos factores afectivos nesta actividade, nomeadamente através de crenças e concepções.

Portanto, aos alunos deve ser dada a oportunidade para desenvolverem a capacidade de reflectir sobre como é feita a sua aprendizagem. O papel da metacognição está assim ligado a todo o ensino, na medida que envolve vários conhecimentos que o aluno tem de dispor quando aprende.

Garafalo, citado por Fernandes (1994), defende que é necessário desenvolver, as capacidades metacognitivas dos alunos, para os ajudar a participar mais activamente na aprendizagem da matemática. Isto é, os alunos devem fazer matemática, em vez de se limitarem a memorizar factos e procedimentos. Isto só é possível se se procurar que os estudantes reflictam sobre os seus conhecimentos, desenvolvam um sistema de convicções que possam contribuir para um melhor desempenho, encorajando sempre o aluno a controlar e a regular os seus conhecimentos matemáticos.

Segundo Efklides, citado por Almeida (1991), "metacognição inclui os mecanismos de significação e de controlo, das funções que permitem à pessoa o uso eficiente das suas capacidades de processamento".

Portanto, a metacognição pode ser considerada como o que a criança sabe sobre a sua própria performance cognitiva, e a capacidade que ela tem para controlar esse desempenho. Ou seja, o conhecimento que cada um tem dos seus próprios processos e produtos cognitivos, ou de qualquer outro aspecto com eles relacionado.

Nas palavras de Schoenfeld (1992), "metacognição é a nossa capacidade para produzir a informação necessária, de sermos conscientes dos próprios passos e estratégias no acto de resolver problemas, bem como de reflectir e avaliar a produtividade do próprio pensamento".

Como se pode constatar nesta revisão teórica através da perspectiva dos vários autores, aprendizagem sem dificuldades não é possível, pode-se mesmo afirmar que uma é consequência da outra. Por isso delineou-se este estudo que tem como objectivo o estudo das dificuldades dos alunos, do 1º Ciclo do Ensino Básico, na prestação de uma prova de aferição de Matemática em 2000. Como foi realizada no final do 4º ano de escolaridade incidia sobre toda a matéria do programa de Matemática nas suas diversas áreas, assim apresentamos uma abordagem teórica das diversas áreas matemáticas apresentando os pontos de vista de vários autores investigadores destas temáticas.

Achámos pertinente realizar esta investigação para ficarmos mais conhecedores das dificuldades dos alunos, identificando as estratégias utilizadas, e compreendendo o porquê dessas dificuldades, contrastando os resultados obtidos com as expectativas que os modelos teóricos e os dados empíricos revistos nos permitiam desenhar.

CAPÍTULO 2

METODOLOGIA

Com esta investigação, essencialmente descritiva, pretendemos averiguar quais foram as dificuldades encontradas pelos alunos do 4º ano de escolaridade na resolução de alguns itens da prova de aferição de Matemática em 2000, identificando as estratégias utilizadas na resolução dos itens e compreendendo as dificuldades sentidas pelos alunos durante essa resolução.

Amostra

A prova de aferição foi administrada em Maio de 2000. Os dados para este estudo foram recolhidos no princípio do ano lectivo seguinte, entre Setembro e Outubro do mesmo ano.

Foram seleccionadas sete escolas do 1º ciclo da zona interior centro do país, sendo que três estão situadas em meio urbano e as restantes quatro em meio rural. Procurou-se, desta forma, equilibrar a amostra tendo em conta a localização geográfica da escola.

A amostragem das escolas foi de conveniência. A selecção das classes dentro de cada escola obedeceu ao critério de ser o mesmo docente a acompanhar os alunos ao longo de vários anos de escolaridade. Todos os alunos de cada uma das classes seleccionadas foram entrevistados.

No total foram abrangidos 118 alunos assim distribuídos por escola:

- Tabela 1 – Distribuição dos alunos da amostra por escola.

	Frequência	Percentagem
Escola 1	18	15.3
Escola 2	21	17.8
Escola 3	19	16.1
Escola 4	20	16.9
Escola 5	21	17.8
Escola 6	14	11.9
Escola 7	5	4.2
TOTAL	118	100.0

No conjunto destes alunos, 50% frequentavam escolas em meio urbano e 50% escolas em meio rural. As idades variaram entre nove e 12 anos, sendo que perto de 80% dos jovens tinham 10 anos. A média das idades deste grupo foi de 10,08 anos.

Instrumentos

A cada um dos sujeitos da amostra foi entregue em primeiro lugar um pedido de colaboração (Anexo A).

Seguidamente foi pedido a cada um dos jovens que respondessem a um pequeno questionário, constituído por 10 questões, que visava apreender a percepção dos alunos sobre a dificuldade da prova realizada (Anexo B).

Foram seleccionadas 14 questões de entre as 22 constantes da prova de aferição de Matemática de 2000, em que tinha sido manifesto, a nível nacional, um grau de dificuldade mais elevado (Anexo C).

A cada um dos alunos envolvidos foi feita uma entrevista de tipo piagetiano que foi audiogravada e a que se juntaram os registos dos alunos realizados durante a entrevista.

As entrevistas gravadas foram transcritas para papel. A análise dos resultados foi realizada tendo em conta simultaneamente as produções escritas e os protocolos resultantes das entrevistas. Oito dos catorze itens foram sujeitos a uma análise de conteúdo. As respostas dos alunos aos questionários foram também objecto de uma análise de conteúdo.

Materiais Utilizados

Os exercícios foram feitos nas próprias provas dadas aos alunos. Disponibilizaram-se lápis, borracha e régua. Um gravador audio permitiu a recolha das interacções verbais entre os alunos e o investigador (entrevistas).

Procedimentos

No princípio de Setembro de 2000 foram abordados os Conselhos Executivos das escolas em que tinham sido colocados os estudantes das escolas do 1° Ciclo seleccionadas, no sentido de indagar da sua disponibilidade para participar neste estudo. Após manifestarem o seu anuimento foi então concertada a logística necessária para a boa realização desta recolha da informação.

A abordagem ao aluno iniciava-se com o pedido de colaboração no preenchimento do questionário. Em seguida era-lhe pedido que respondesse às questões que lhe eram apresentadas. Depois de ter resolvido os diversos exercícios, o aluno era convidado a dizer à entrevistadora como tinha pensado para a sua resolução ("porque fizeste assim?").

A entrevista prosseguia com maior ou menor duração consoante a resposta dada a esta questão: Se o aluno respondia correctamente, passava-se à questão seguinte. Se o aluno mostrava sinais de hesitação ou de dúvida a entrevistadora iniciava uma interacção tendente a levá-lo a explicitar o raciocínio envolvido na resolução da questão.

Quando era notório que o aluno, embora tendo compreendido o problema e tendo-o resolvido correctamente, não conseguia explicitar o que tinha pensado, a entrevistadora insistia com ele para revelar como tinha procedido. Nos casos em que os alunos diziam que não conseguiam resolver, a entrevistadora procurava explicitar de uma forma simplificada o que se pretendia com a tarefa proposta. Em qualquer dos casos, se se verificava que, apesar desta interacção, o aluno não conseguia ir mais além, passava-se à questão seguinte.

Tanto a realização das entrevistas como a resposta ao questionário tiveram lugar numa sala de cada uma das escolas envolvidas.

Análise dos dados

Os dados obtidos nas provas, entrevistas e questionários foram tratados através da análise de conteúdo e segundo os critérios de avaliação disponibilizados pelo Gabinete de Avaliação Educacional. Perante uma amostra de dimensão relativamente grande decidiu-se recorrer a uma análise estatística descritiva realizada no programa SPSS.

Deste modo, identificaram-se e compararam-se as frequências das respostas aos diversos itens dadas pelos alunos da amostra, tendo em conta as estratégias utilizadas e as justificações apresentadas nas entrevistas.

CAPÍTULO 3

APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo pretendemos dar a conhecer os resultados obtidos nesta investigação.

Tal como se referiu anteriormente, antes de terem resolvido os diversos exercícios propostos, os alunos foram convidados a preencher um questionário sobre aquilo que se lembravam das provas de aferição que tinham realizado no final do mês de Maio. Depois de terem resolvido os diversos exercícios propostos, foram convidados a dizer oralmente como tinham pensado e como tinham feito para os resolverem. Essa entrevista foi gravada e as respostas foram transcritas e analisadas segundo os critérios de classificação que serviram para correcção a nível nacional. Foi feita uma análise de conteúdo a 8 itens que não eram de resposta directa e que envolviam um raciocínio mais complexo.

Os resultados dos exercícios serão apresentados numa primeira secção, item a item. Numa segunda secção são ilustrados os resultados dos questionários. Começamos com a apresentação da análise dos itens segundo os critérios de avaliação que compararemos com os resultados obtidos a nível nacional. Depois apresentaremos a análise das frequências correspondentes à análise de conteúdo dos 8 itens. As análises serão feitas do ponto de vista quantitativo (em termos de respostas correctas e incorrectas) e do ponto de vista qualitativo (tipo de respostas).

Análise dos itens segundo os critérios de classificação das Provas de Aferição

De uma forma geral, e segundo os critérios de classificação estabelecidos, a distribuição polarizou-se entre o nível baixo e o nível mais alto atribuído a cada item e foram pouco preenchidos os níveis intermédios.

O corpus para esta análise foi o conjunto das respostas dadas pelos alunos independentemente de ter havido ou não interacção com a entrevistadora.

De uma forma geral, houve poucos casos de não-resposta. Eles serão identificados nos itens em que tenham ocorrido.

Para uma melhor compreensão dos resultados, estes são apresentados item a item, antecipados da sua imagem reduzida.

1. A expressão "dez mil e cinquenta e quatro unidades" representa a leitura de qual dos seguintes números?

☐ 10540

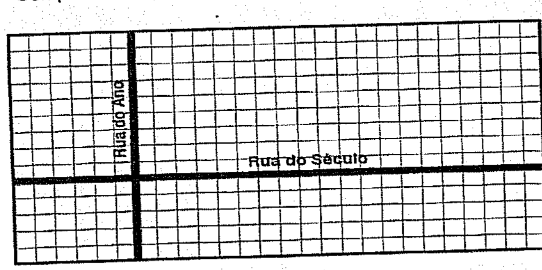
☐ 10054

☐ 1540

☐ 1054

Item 1 – Houve 65,3% de respostas correctas. Entre as erradas, a representação " 1054 " foi a mais frequente – 39 em 41 respostas erradas.

2. Completa o mapa da figura, de acordo com as instruções.



Desenha no mapa a **Rua do Tempo**, paralela à **Rua do Ano**. Escreve o seu nome.

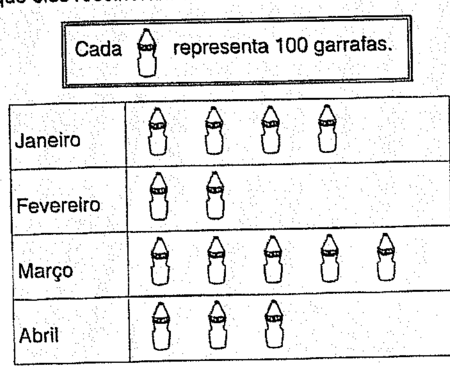
Desenha a **Rua da Hora**, que não pode ser paralela à **Rua do Século** e também não pode ser perpendicular à **Rua do Século**. Escreve o seu nome.

Item 2.1 – Houve 71,2% que tiveram o nível máximo; 26,3% erraram e, destes, seis alunos não desenharam a rua paralela.

Item 2.2 – Houve 66,9% de respostas correctas e 31,4% de respostas incorrectas: 13 alunos não conseguiram desenhar a rua oblíqua sujeita a várias condições.

Nota-se uma maior facilidade, embora de pouca expressão, do pedido da linha paralela relativamente à oblíqua, nas circunstâncias em que foi pedida.

3. Os meninos da escola do Ricardo andaram a recolher garrafas de plástico, para serem recicladas.
Repara na tabela onde está registado o número de garrafas que eles recolheram até ao mês de Abril.



Os itens 3.1 e 3.2 foram de fácil resolução.

3.1. Em que mês os meninos da escola do Ricardo recolheram mais garrafas?
Recorda que cada representa 100 garrafas.

Item 3.1 – 99,2% dos alunos acertaram, apenas um errou.

3.2. Quantas garrafas recolheram no mês de Janeiro?

Item 3.2 – 98,3% dos alunos acertaram, apenas dois alunos erraram.

3.3. Quantas garrafas precisam de recolher no mês de Maio para recolherem um total de 2000 garrafas, entre Janeiro e Maio?

Item 3.3 – 83,9% fizeram bem e 11,9% erraram e seis alunos não fizeram.

4. O João contou três quadrados na figura A.

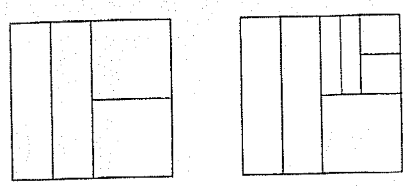


Figura A Figura B

Quantos quadrados consegues contar na figura B?

Item 4 - 43,2% responderam correctamente, isto é tiveram nível máximo (nível três), 34,7% responderam quatro quadrados (nível dois) e 21,2% responderam três quadrados (nível um); apenas um aluno não respondeu.

5. A Joana é muito vaidosa.
Um dia foi a uma loja e comprou:

- uma saia vermelha e outra azul;
- uma camisola amarela, uma verde e outra preta.

Depois pensou: – Que bom! Agora já posso vestir-me de muitas maneiras diferentes.

De quantas maneiras diferentes se poderá vestir a Joana?

Explica como encontraste a resposta. Para o fazeres, podes usar desenhos, palavras ou contas.

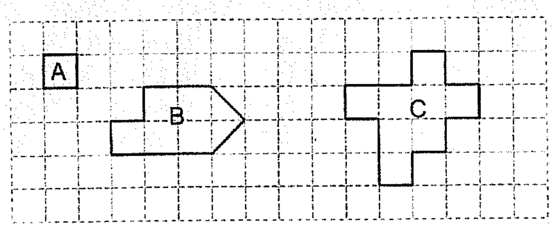
Item 5 – 26,3% dos alunos tiveram nível máximo (nível cinco) e 44,9% tiveram nível quatro, correspondendo este código a uma resolução com utilização de desenho. Os que erraram totalmente foram 3,4% e 16,9% tiveram nível dois ou seja responderam de duas ou três maneiras diferentes, apenas tendo em conta ou o número de blusas ou o número de saias.

6. Escreve um número que:

- esteja entre 3960 e 4000;
- tenha como algarismo das dezenas o 8;
- seja par;
- tenha os algarismos todos diferentes.

Item 6 – Houve 83,1% de alunos que resolveram bem (nível quatro), não havendo níveis intermédios; 12,7% dos alunos não escreveram um número de acordo com as condições dadas, e destes, sete não responderam.

7. Toma, como unidade de área, a área do quadrado A.
Qual é a área de cada uma das figuras (B e C)?



Item 7B – Houve 78,8% de respostas correctas e 16,1% com cotação zero e destes nove alunos não responderam. Apenas 5,1% teve o nível intermédio.

Item 7C – Houve 86,4% de respostas correctas e 9,3% de respostas de nível zero sendo que nove destes alunos não responderam. Apenas 3,4% tiveram nível intermédio.

8. Pai e filho mediram, em passos, o comprimento do jardim.
O pai contou 18 passos.
Quantos passos te parece que o filho terá contado?

Explica como descobriste o número de passos que o filho contou.

Item 8 – De nível quatro temos 64,4% de respostas e de nível três, 10,2%. Houve 21,2% que não raciocinaram correctamente e, destes, seis não responderam.

9. Para a sua festa de anos, a Teresa vai encher 15 copos com sumo de laranja.

Todos os copos levam a mesma quantidade de sumo.

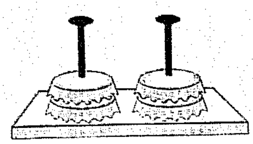
Para saber quantos litros de sumo vai ter de preparar, consultou a seguinte tabela:

1 copo	2 copos	3 copos	4 copos	5 copos
2,5 dl	5 dl	7,5 dl	10 dl	12,5 dl

Quantos litros de sumo precisa a Teresa de preparar, para encher os 15 copos?

Item 9 – 63,6% têm o nível máximo e 24,6% têm nível zero e, destes, sete alunos não deram resposta. Os níveis intermédios obtiveram uma baixa percentagem.

10. O grupo da Joana vai construir instrumentos musicais como o da figura.



Para construírem este instrumento musical, eles precisam do seguinte material:

4 caricas 2 pregos 1 tábua

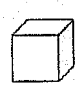
Descobre quantos instrumentos musicais o grupo da Joana consegue construir se tiver:

25 caricas
15 pregos
8 tábuas

Mostra como chegaste à tua resposta, usando palavras, desenhos ou contas.

Item 10 –Houve 77,1% de alunos que tiveram o nível máximo (nível cinco). 9,3% dos alunos tiveram nível zero e 8,5% teve nível um.

11. Na figura está representado um cubo.



Imagina que estás ao telefone com um amigo.
Descreve-lhe este sólido de modo a que ele descubra o seu nome.
Não podes utilizar a palavra "cubo".

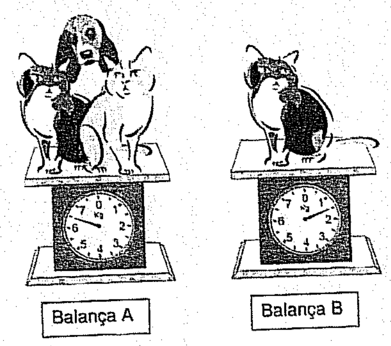
Item 11 – Apenas 16,9% tiveram nível quatro, ou seja, fizeram uma descrição que caracteriza completamente o cubo; 11,9% utilizaram uma linguagem não completamente correcta do ponto de vista matemático; 39,8% não o definiu por completo e 29,6% dos alunos tiveram nível zero, sendo que, entre estes, apenas dois alunos não responderam.

12. O Pedro pesou, na **balança A**, os seus dois gatos, o Cinza e o Malhado, e o seu cão Faísca.

Depois pesou só o gato Malhado na **balança B**.

Os dois gatos têm o mesmo peso.

Quanto pesa o cão do Pedro?

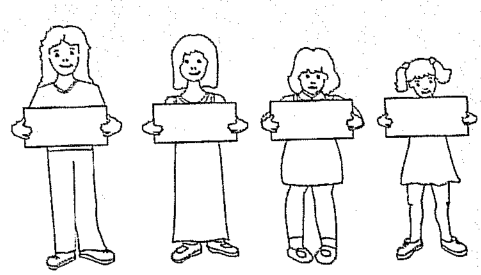


Item 12 – 77,1% dos alunos obtiveram nível máximo (nível quatro); 10,2% dos alunos tiveram nível zero, e destes, seis alunos não responderam.

13. No quadro estão indicadas as alturas das quatro meninas da figura.

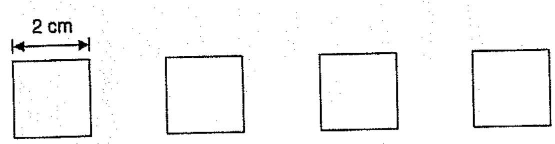
Nomes	Alturas
Joana	1,28 m
Laura	13,9 dm
Marta	123 cm
Rita	1,34 m

Escreve, em cada placa, o **nome** da menina, de acordo com a sua altura.

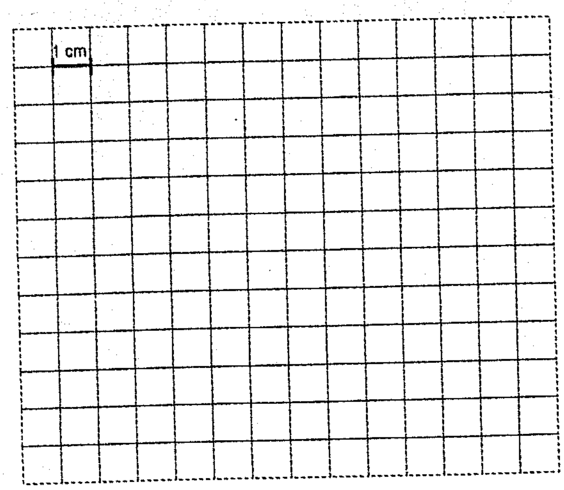


Item 13 – 63,6% dos alunos responderam correctamente (nível dois); 36,5% não responderam certo. Não houve nível intermédio.

14.



Juntando os quatro quadrados é possível formar figuras com **20 cm de perímetro.** Descobre pelo menos duas dessas figuras e desenha-as no quadriculado.



Item 14 – 58,5 % dos alunos fizeram as duas figuras correctamente;12,7% teve nível zero sendo que apenas três alunos não resolveram; 19,5% apenas fizeram uma figura certa (nível dois). Os restantes níveis intermédios foram pouco preenchidos.

Comparação com os Resultados Nacionais

Em seguida apresentar-se-á, para cada item, o cotejo dos resultados obtidos a nível nacional com os registados neste estudo (zona urbana e zona rural), de acordo com os critérios de classificação, sendo em seguida apresentado em tabelas as respectivas distribuições das respostas correctas e incorrectas e dos níveis intermédios quando existentes.

- Tabela 2 – Percentagens de respostas correctas e incorrectas na amostra e a nível nacional – Item1.

Item 1	Respostas correctas			Respostas Incorrectas		
Nível Nacional	62%			38%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	55,9%	74,5%	65%	44%	25,4%	35%

No nosso estudo registaram-se mais respostas correctas do que a nível nacional.

No contraste entre o rural e o urbano verificou-se que os alunos do meio rural obtiveram uma percentagem maior de respostas incorrectas do que os alunos do meio urbano.

- Tabela 3 – Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item2.

Item 2	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	30%			40%			30%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	59,3%	84%	67%	40,6%	12%	31%	0%	3,3%	2%

Neste item, os alunos da amostra, obtiveram o dobro das respostas correctas das registadas a nível nacional e as respostas incorrectas ficaram na casa dos 30%, enquanto que a nível nacional ficaram nos 40%. A registar 30% de respostas de nível intermédio pelos alunos a nível nacional, percentagem muito mais elevada do que a obtida no nosso estudo.

Há também a salientar que no contraste entre o rural e o urbano, os alunos do meio urbano atingiram percentagens mais elevadas nas respostas correctas e em ambos os grupos os níveis intermédios foram pouco preenchidos.

- Tabela 4 - Percentagens de respostas correctas e incorrectas na amostra e a nível nacional – Item 3.1.

Item 3.1	Respostas correctas			Respostas Incorrectas		
Nível Nacional	92%			8%		
Amostra do Estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	100%	98,3%	99%	0%	1,6%	1%

- Tabela 5 - Percentagens de respostas correctas e incorrectas na amostra e a nível nacional – Item 3.2.

Item 3.2	Respostas correctas			Respostas Incorrectas		
Nível Nacional	79%			21%		
Amostra do Estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	96,6%	100%	98%	3,3%	0%	2%

- Tabela 6 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 3.3.

Item 3.3	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	44%			51%			5%		
Amostra do Estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	76,2%	91,5%	84%	16,9%	6,7%	12%	6,7%	1,6%	4%

Nestes 3 itens, que de alguma maneira estavam interligados, a amostra dos alunos do estudo revelou melhores resultados, atingindo níveis bastante satisfatórios. No item 3.3 os alunos a nível nacional tiveram uma prestação bastante mais fraca do que a obtida na presente investigação.

Aqui verificou-se que tanto os alunos do meio rural como os do meio urbano tiveram boas prestações. Apenas no item 3.3 os alunos do meio rural obtiveram cerca de 17% de respostas incorrectas e nos níveis intermédios cerca de 7%.

- Tabela 7 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 4.

Item 4	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	17%			12%			70%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	25,4%	61%	43%	1,6%	0%	1%	72,8%	38,9%	56%

Também aqui os alunos da amostra tiveram um melhor desempenho apresentando percentagens mais elevadas nas respostas correctas. Há a registar que os níveis intermédios foram muito preenchidos pelos alunos a nível nacional, e também os alunos da amostra preencheram com alguma incidência os níveis intermédios, embora com percentagens mais baixas.

Podemos também afirmar que foram os alunos do meio rural da amostra que mais preencheram os níveis intermédios. E que as respostas correctas foram mais preenchidas pelos alunos do meio urbano da amostra.

- Tabela 8 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 5.

Item 5	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	33%			36%			31%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	28,8%	23,7%	26%	3,3%	3,3%	3%	67,7%	72,8%	70%

Neste item, comparativamente aos resultados da amostra, houve uma percentagem maior de respostas erradas a nível nacional. Uma percentagem elevada dos alunos da amostra situaram-se nos níveis intermédios. Nos dois grupos as respostas correctas tiveram percentagens baixas.

Os alunos, do meio rural, da amostra obtiveram uma percentagem ligeiramente maior nas respostas correctas do que os do meio urbano. Nas respostas incorrectas obtiveram o mesmo resultado, mas nos níveis intermédios foram os alunos do meio urbano quem obteve maiores percentagens.

- Tabela 9 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 6.

Item 6	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	56%			32%			12%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	79,6%	86,4%	83%	16,9%	8,4%	13%	3,3%	5%	4%

Na nossa amostra as respostas correctas foram em maior número do que as dos alunos a nível nacional. Nos dois grupos registaram-se níveis intermédios baixos.

Nas respostas incorrectas foram os alunos do meio rural que tiveram percentagens mais elevadas.

- Tabela 10 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 7B.

Item 7B	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	38%			52%			10%		
Amostra do Estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	76,2%	81,3%	79%	23,7%	8,4%	16%	0%	10,1%	5%

Os resultados dos alunos da amostra, neste item, foram muito superiores aos obtidos a nível nacional.

As percentagens obtidas nas respostas correctas nos dois grupos (rural e urbano) foram altas. Mas nas respostas incorrectas, os alunos do meio rural tiveram os piores resultados. Foram os alunos do meio urbano que preencheram os níveis intermédios

- Tabela 11 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 7C.

Item 7C	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	51%			37%			13%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	84,7%	89,8%	86%	15,2%	3,3%	9%	0%	6,7%	4%

Aqui também se pode afirmar que os resultados nacionais ficaram abaixo dos resultados obtidos pelos alunos intervenientes neste estudo. Ambos os grupos (rural e urbano) tiveram uma boa prestação. Mas quem errou mais foram os alunos do meio rural e quem preencheu os níveis intermédios foram os alunos do meio urbano.

- Tabela 12 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 8.

Item 8	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	25%			38%			37%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	55,9%	74,5%	64%	30,5%	11,8%	21%	13,5%	13,5%	14%

A percentagem de respostas correctas neste item foram em maior número nos alunos da amostra. Relativamente às respostas incorrectas registou-se um número maior a nível nacional. O nível intermédio também foi muito preenchido pelos alunos a nível nacional.

No contraste rural/urbano dos alunos da amostra podemos verificar que os alunos do meio urbano tiveram uma percentagem maior de respostas correctas e os níveis intermédios foram preenchidos pelos dois grupos com percentagens iguais.

- Tabela 13 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 9.

Item 9	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional			30%			40%			30%
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	45,7%	83%	64%	37,2%	11,8%	25%	16,9%	5%	10%

Neste item podemos afirmar que, nos resultados nacionais, as respostas erradas foram em maior número que as respostas correctas. Os alunos deste estudo continuam a alcançar melhores resultados do que os alunos a nível nacional. Foram os alunos do meio rural que mais erraram e preencheram os níveis intermédios dos critérios de classificação.

- Tabela 14 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 10.

Item 10	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional			37%			41%			23%
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	66,1%	88,1%	81%	15,2%	5%	10%	18,6%	6,7%	9%

Também aqui os alunos da amostra tiveram uma prestação bastante melhor, apresentando percentagens mais altas nas respostas correctas. E destes foram os do meio urbano que tiveram uma melhor prestação. Ao alunos do meio rural foram os que mais preencheram as respostas incorrectas e os níveis intermédios.

- Tabela 15 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 11.

Item 11	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	17%			34%			49%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	10,1%	18,6%	17%	33,8%	25,4%	30%	55,9%	55,9%	53%

Comparando os dois resultados há a registar que neste item os resultados obtidos são praticamente iguais. Até nos níveis intermédios, se obteve resultados homogéneos: estes níveis foram muito preenchidos nos dois grupos.

No contraste rural/urbano os dois grupos tiveram a mesma percentagem nos níveis intermédios; nas respostas incorrectas foram os alunos do meio rural que tiveram uma maior percentagem; nas respostas correctas os dois grupos tiveram percentagens baixas.

- Tabela 16 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 12.

Item 12	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	37%			49%			14%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	72,8%	86,4%	77%	15,2%	5%	10%	11,8%	8,4%	13%

Analisando os dois grupos podemos afirmar que os alunos a nível nacional tiveram mais dificuldades a resolver este item do que os alunos da amostra.

Há a registar que dos alunos da amostra foram os do meio urbano que conseguiram melhores resultados.

- Tabela 17 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 13.

Item 13	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	44%			50%			6%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	50,8%	76,2%	64%	49,1%	23,7%	36%	0%	0%	0%

Neste item, a nível nacional as respostas incorrectas foram em maior número do que as correctas, o que não sucedeu nos alunos da amostra.

Os alunos do meio rural da amostra obtiveram piores resultados, preenchendo cerca de 49% as respostas incorrectas. Nenhum dos grupos preencheu os níveis intermédios.

- Tabela 18 - Percentagens de respostas correctas, incorrectas e dos níveis intermédios na amostra e a nível nacional – Item 14.

Item 14	Respostas correctas			Respostas Incorrectas			Níveis Intermédios		
Nível Nacional	10%			46%			44%		
Amostra do estudo	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total	Rural	Urbano	Total
	47,4%	79,6%	57%	23,7%	1,6%	13%	28,8%	18,6%	30%

Podemos concluir que nos resultados nacionais este foi o item que obteve os piores resultados, porque a percentagem de respostas certas foi muito baixa. Comparativamente aos resultados dos alunos da amostra podemos afirmar, que estes obtiveram melhores resultados registando-se menos respostas incorrectas.

Neste item, no contraste rural/urbano dos alunos da amostra foram os do meio urbano que obtiveram mais respostas correctas, preenchendo muito pouco as respostas incorrectas.

Assim, de acordo com os resultados obtidos pelos alunos da amostra, podemos afirmar que os quatro itens que se revelaram **mais difíceis** para os alunos envolviam conceitos de geometria (item 2.1. e 2.2., item 4, item 11 e item 14) e pertenciam à área espaço e forma do programa.

Nestes itens a descrição de um cubo (item 11) foi o mais penalizado. Foi mais relevante a referência ao número de faces, e/ou de arestas e/ou de vértices do que às características essenciais do sólido.

A identificação de quadrados numa figura algo complexa (item 4) revelou também dificuldade porque eles não estavam representados de uma forma tradicional.

Na representação de linhas paralelas e oblíquas (item 2.1. e 2.2.), os alunos traçaram mais facilmente a paralela e tiveram mais dificuldade em desenhar a oblíqua, possivelmente por esta estar sujeita a várias condições.

O desenho de figuras com um determinado perímetro (item 14), foi realizado com correcção apenas por 58,5%. Muitos alunos respeitaram o número de quadrados mas não respeitaram a sua dimensão e apresentaram dificuldades na medição do perímetro.

Com **dificuldade intermédia** registaram-se alguns itens da área dos números e da área das grandezas e medidas.

Com percentagens de correcção na ordem dos **60%** temos quatro itens: item 1, item 8, item 9 e item 13.

Na identificação de um número (item 1), mais de um terço dos alunos identificou o "1054" como sendo 10054. Quando se tratou de escrever um número com determinado conjunto de características (item 6) a percentagem de respostas correctas foi mais elevada (83,1%). Aparentemente torna-se mais fácil responder a este tipo de pedidos do que representar correctamente números onde os zeros ocupem lugares intermédios.

Quando os alunos foram confrontados com situações problemáticas de medição, quer através da contagem dos passos (item 8) quer utilizando as medidas de comprimento (item 13), quer ainda utilizando as medidas de capacidade (item 9), todos eles envolvendo mais do que uma operação, também se registou alguma dificuldade, sendo esta menos notória no item referente à contagem dos passos.

Com percentagens de correcção na casa do **70%** há a salientar quatro itens: item 5, item 7B, item 10 e item 12. Houve uma dificuldade menor em situações que envolviam: i) a combinação de duas peças, ii) o cálculo da área através da contagem de quadrados, iii) a descoberta do número de instrumentos que se poderiam fazer a partir de uma determinada quantidade de material, iv) e o cálculo do peso de um animal. Mas também se verificou que no item que envolvia a combinação de blusas e de saias houve alunos que apenas tiveram em conta ou o número de blusas ou o número de saias; no item para calcularem a área responderam considerando outra unidade de medida e não a estabelecida; quando se tratou da descoberta dos instrumentos musicais a partir de um número de constituintes os alunos revelaram não ter compreendido o que era pedido; finalmente no cálculo do peso do animal apenas deram uma resposta incorrecta os alunos que não sabiam ver o peso nas balanças ou não sabiam o que fazer com os dados do problema.

Na casa dos **80%** de correcção registaram-se três itens: item 3.3, item 6 e item 7C: os alunos tiveram menos dificuldade em resolver situações problemáticas que envolviam a adição e a subtracção e a escrita de números a partir de um conjunto de características dadas.

Apenas se notou que praticamente **não houve dificuldades** em dois itens: item 3.1 e 3.2, porque os alunos iam buscar a informação necessária directamente ao enunciado e resolviam apenas por contagem. Quando a pergunta requeria mais do que uma etapa de raciocínio e duas operações (item 3.3) a percentagem das respostas incorrectas foi mais elevada.

No contraste entre os alunos do meio rural e os do meio urbano há a registar que na maioria dos itens foram os alunos do meio urbano que tiveram os melhores resultados, alcançando percentagens mais elevadas.

Os alunos do meio rural apenas conseguiram obter melhores resultados dos que os do meio urbano no item 5, onde era pedido para fazerem uma operação combinatória com duas saias e três blusas e assim descobrirem de quantas maneiras a menina se podia vestir. No exercício do item 11, apresentava-se o desenho de um cubo e era pedido que imaginassem que estavam ao telefone e que descrevessem esse sólido sem utilizarem a palavra cubo, foi onde obtiveram o pior resultado tendo alcançado só cerca de 10% de respostas correctas. Os níveis intermédios foram mais preenchidos pelos alunos do meio rural (em seis itens) enquanto que os alunos do meio urbano tiveram maiores percentagens nos níveis intermédios em cinco itens.

Podemos concluir que neste estudo foram os alunos do meio urbano que conseguiram ter uma melhor prestação na resolução dos itens propostos da prova de aferição de Matemática do ano 2000.

De uma maneira geral, podemos afirmar que os resultados obtidos a nível nacional são mais baixos, na maioria dos itens, do que os recolhidos nos alunos da amostra. A maior percentagem de respostas correctas na amostra não é certamente estranha à interacção com o investigador. Apenas no item 11 os resultados foram praticamente iguais, atingindo os dois grupos percentagens muito baixas de respostas correctas.

Análise de conteúdo de 8 itens e respectivas grelhas de frequências

Na elaboração das grelhas de análise de conteúdo separaram-se as categorias em respostas correctas e respostas incorrectas.

Foram consideradas respostas correctas todas as respostas que estavam completamente certas quer tivessem sido feitas com recurso a desenho, por cálculo mental, ou escrito e através de algoritmo. Foram ainda consideradas como correctas as respostas em que os alunos apresentaram correcção de raciocínio apesar de terem errado os cálculos, mas que conseguiram corrigir, por eles próprios, ou através da interacção com a investigadora.

Foram consideradas respostas incorrectas todas as respostas incompletas ou que não respondiam ao que era pedido, aquelas que, estavam erradas com apresentação da justificação errada, as que estavam erradas apesar da explicação estar certa e aquelas em que os alunos, apesar da interacção, não conseguiram responder.

Feita esta divisão foram criadas subcategorias tendo por base processos e estratégias envolvidos na resolução do aluno. Cada uma destas subcategorias é ilustrada com alguns exemplos retirados da interacção com os alunos.

Através da análise de conteúdo tentou-se conhecer as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de 8 itens que não eram de resposta directa. Serão discriminados os casos em que houve interacção.

Na apresentação dos resultados começaremos por efectuar, para cada um dos itens, uma descrição do pedido, apresentando a tabela que presidiu à análise de conteúdo com as diferentes categorias e subcategorias, com indicação de alguns exemplos retirados das resoluções feitas pelos alunos.

Em seguida comentaremos os resultados obtidos apresentando a tabela de frequências resultante da análise de conteúdo realizada, referindo também alguns exemplos das respostas dos alunos. Nesta apresentação referem-se em primeiro lugar as respostas consideradas como correctas; em segundo lugar apresentam-se os resultados das respostas correctas após interacção e finalmente referem-se as respostas incorrectas.

O item 3 era um exercício que exigia mais do que uma etapa de processamento. Era dada uma tabela de Janeiro a Abril e à frente de cada mês tinha um certo número de desenhos estilizados de garrafas desenhadas, cada um dos quais representava 100 garrafas. Perguntava-se quantas garrafas precisavam de recolher em Maio para no total perfazerem 2000 garrafas, entre Janeiro e Maio.

O aluno podia contar os símbolos todos da tabela, multiplicar por 100 ou contar de 100 em 100, e depois subtrair o resultado às 2000 garrafas para ficar a saber as garrafas que tinha de recolher no mês de Maio.

A tabela que se segue mostra as categorias encontradas que serviram para fazer a análise de conteúdo do item 3.3.

- Tabela 19 - Grelha de análise de conteúdo correspondente ao item 3.3.

Respostas correctas					
Imediatamente correcto com apresentação de cálculos	Raciocínio correcto com erro de cálculo corrigido após interacção, com apresentação de cálculos	Imediatamente correcto sem apresentação de cálculos (cálculo mental)	Raciocínio baseado nos símbolos e reconvertido no cálculo das garrafas, após interacção sem apresentação de cálculos.	Raciocínio correcto com erro de cálculo corrigido após interacção, sem apresentação de cálculos	Raciocínio baseado nos símbolos e reconvertido no cálculo das garrafas, após interacção com apresentação de cálculos.
400+200+500+300= 1400 2000 – 1400= 600 1400+600= 2000	2000-1400= 600	600 garrafas	600 garrafas	600 garrafas	14x100=1400 100x6=600 1400+600=2000
"Somei as garrafas todas e depois vi quantas é que faltavam" "Contei as garrafas que aqui estavam no mês de Abril. Dá-me 1400. E depois fui contar quantas garrafas é que seriam para chegar no mês de Maio"	"Contei e deu 1400 e fiz 2000 menos 1400 e deu 600"	"Juntei primeiro as garrafas todas e depois contei de 1400 até 2000 e deu-me 600"	"Contei estas e depois juntei até dar 2000" "De Janeiro a Abril recolheram 1400. Quantas é que eles têm de recolher para ficar com 2000 ? 5 . Sim, não me parece. De 1400 ... 6	"Fiz a conta de cabeça, 2000-1400 é 800. É ? Não é 600."	"Contei as garrafas e deu 14 e assim faltam 6. Porquê 6 ? 600"

Respostas Incorrectas				
Resposta errada com erro de cálculo e explicação certa	Resposta errada com erro de cálculo e explicação errada	Calculou o total dos meses, até Abril e parou	Calculou o total dos meses até Abril, e ainda apresentou algum resultado errado sem conseguir resolver, tudo mentalmente	Não respondeu apesar da interacção
700	2000-400=1600	1400	1400 x 100	
"De Janeiro até Abril eram 1400, até Maio são 7 ou 700.	"Fiz 2000 menos 400 e deu 1600"	"Juntei os meses e deu 1400"	"É 1400 x 100 I- Vezes 100 ? E quantas vai dar? A – Vai dar ..."	

De acordo com esta tabela foram então analisadas todas as respostas do item 3.3 da prova. Todas as respostas dadas foram categorizadas resultando a tabela 20.

A tabela 20 mostra a frequência e a percentagem obtida em cada categoria, seguindo-se a descrição dos resultados obtidos neste item.

- Tabela 20 – Frequências e percentagens obtidas após a análise de conteúdo do item 3.3.

Categorias	**Frequência**	**Percentagem**
Respostas correctas		
Imediatamente correcto com apresentação de cálculos	52	44,1
Raciocínio correcto com erro de cálculo corrigido após interacção, com apresentação de cálculos	5	4,2
Imediatamente correcto sem apresentação de cálculos	18	15,3
Imediatamente correcto com apresentação de cálculos (mas teve reforço)	1	0,8
Raciocínio baseado nos símbolos e reconvertido no cálculo das garrafas, após interacção sem apresentação de cálculos	4	3,4
Raciocínio correcto com erro de cálculo corrigido após interacção, sem apresentação de cálculos	9	7,6
Raciocínio baseado nos símbolos e reconvertido no cálculo das garrafas, após interacção com apresentação de cálculos	11	9,3
Raciocínio baseado nos símbolos e reconvertido no cálculo das garrafas, após interacção sem apresentação de cálculos (mas teve reforço)	1	0,8
Respostas incorrectas		
Resposta errada com erro de cálculo e explicação certa	4	3,4
Resposta errada com erro de cálculo e explicação errada	5	4,2
Calculou o total dos meses, até Abril e parou	1	0,8
Calculou o total dos meses até Abril, e ainda apresentou algum resultado errado sem conseguir resolver, tudo mentalmente	1	0,8
Não respondeu apesar da interacção	6	5,1
Total	118	100,0

Este exercício foi resolvido com sucesso por 70 alunos (59,4%). Destes, 52 (44,1%) apresentaram cálculos e 18 (15,3%) utilizaram o cálculo mental.

Tal como anteriormente se referiu, quando a primeira resposta apresentada pela criança não era correcta, iniciava-se uma interacção com ela.

Neste exercício foram 31 crianças (26,1%) que necessitaram desse apoio. Concretamente, 16 dessas crianças utilizaram um raciocínio correcto baseado nos símbolos e reconvertido no cálculo das garrafas, sendo que 11 fizeram com apresentação de cálculos (*"Contei as garrafas e deu 14 e assim faltam 6. Porquê 6 ? 600"*); cinco não apresentaram cálculos. Catorze alunos (11,8%) usaram um raciocínio correcto mas cometeram erro de cálculo que eles próprios corrigiram logo a seguir. Destes, nove não apresentaram cálculos *("Fiz a conta de cabeça, 2000-1400 é 800. É ? Não é 600")* e cinco ilustraram os seus cálculos. Houve ainda dois alunos que apesar da interacção necessitaram de uma maior ajuda na compreensão do problema

Houve nove respostas (7,6%) com erros de cálculo que não foram corrigidos pelos alunos (*"De Janeiro até Abril eram 1400, até Maio são 7 ou 700"). Dois alunos resolveram a primeira etapa mas não conseguiram finalizar *("Juntei os meses e deu 1400")* e seis alunos não responderam apesar da interacção com a entrevistadora.

3.3. Quantas garrafas precisam de recolher no mês de Maio para recolherem um total de 2000 garrafas, entre Janeiro e Maio?

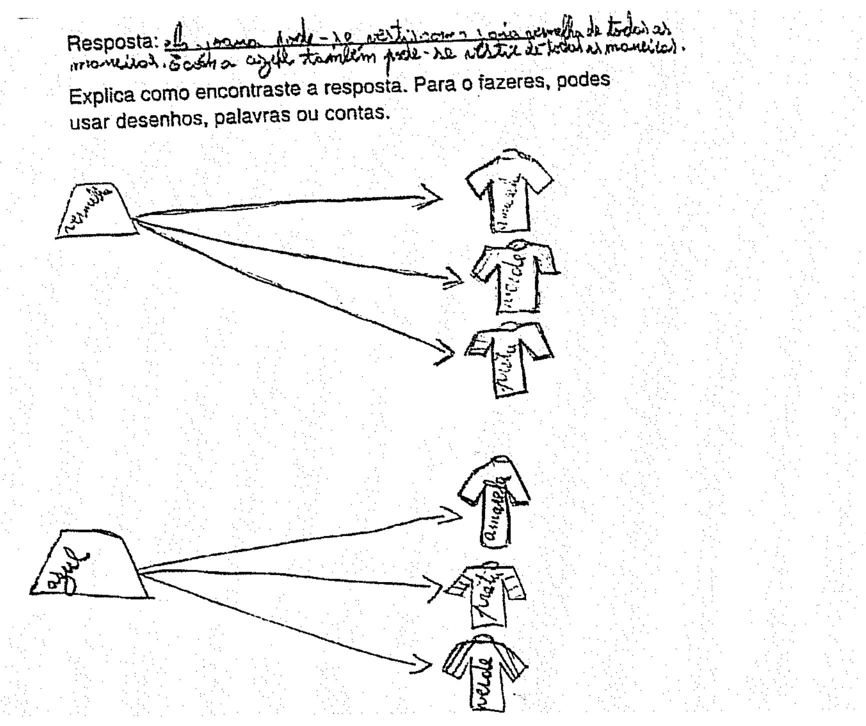
$$\begin{array}{r} 400 \\ 200 \\ 500 \\ +\ 300 \\ \hline 1400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1400 \\ +\ 400 \\ \hline 1800 \end{array}$$

Resposta: ______________________

No item 5 havia uma menina que tinha comprado uma saia vermelha e outra azul, uma camisola amarela, uma verde e outra preta. E pedia-se para se descobrir de quantas maneiras diferentes se poderia vestir esta menina com aquelas peças.

O aluno tinha que fazer uma operação combinatória, a saia vermelha com todas as camisolas e a saia azul igualmente com todas as camisolas, depois contar de quantas maneiras diferentes tinha combinado as várias peças.

Poderiam usar o desenho ou outro auxiliar na explicitação do seu raciocínio. Apresentamos um exemplo de uma resposta bem sucedida com utilização de desenho.



A tabela 21 ilustra as categorias e as respostas-tipo encontradas.

- Tabela 21 - Grelha de análise de conteúdo correspondente ao item 5.

Respostas Correctas					
Utilizou o cálculo nas combinações (3x2 , 3+3 ...)	Processo sistemático com utilização de desenho	Processo sistemático sem utilização de desenho, por escrito	Identificou todos os pares mas sem processo sistemático	Não usou processo sistemático e identificou todos os pares após interacção	Processo sistemático com utilização de desenho e por escrito
2 saias vezes 3 camisolas, é igual a 6 conjuntos	6 maneiras	6 maneiras	6 maneiras	6 maneiras	6 maneiras
"Com cada saia posso fazer 1 combinação, com cada 1 das camisolas, por isso posso fazer 3 com cada saia. Juntando 2 combinações que posso fazer com as saias, dá 6 combinações."	"Desenhei as camisolas, uma camisola amarela, uma verde e outra preta e fiz com uma saia vermelha, depois fiz outras camisolas e fiz com a saia azul"	"Saia vermelha mais camisola amarela, saia vermelha mais camisola verde, saia vermelha mais camisola preta mais saia azul mais camisola amarela saia azul mais camisola verde, saia azul mais camisola preta"	"A saia azul dá para vestir com a camisola preta, a saia vermelha dá para vestir com a verde, a saia azul dá para vestir com a verde, a saia azul e a camisa amarela, a saia vermelha e a camisa preta, a saia vermelha e a camisa amarela."	"De 4, a saia vermelha com a camisola preta, a saia azul com a camisola verde, a saia azul com a camisola amarela, a saia vermelha com a camisola amarela. - Vê bem. Descobri mais duas maneiras, a saia azul com a camisola preta e a saia vermelha com a camisola amarela."	"Com a saia vermelha a Joana pode vestir todas as camisolas que comprou e com a saia azul também pode vestir todas as camisolas"

Respostas Incorrectas				
Fez pares sem processo sistemático e ficou aquém	Fez pares sem processo sistemático e foi além	Só admitiu correspondência termo a termo (1 saia para 1 blusa)	Somou as peças	Não conseguiu resolver
3 / 4 maneiras	7 maneiras / 9 conjuntos	2	5 maneiras	
"Pensei, ela num dia pode vestir este, depois noutro veste este, noutro este e no outro dia já tem esta lavada veste esta outra vez"	" Fui juntando as camisolas com as saias e deu-me 9 conjuntos. Eu pensei que a camisola amarela e a saia vermelha fazia 1 conjunto. Novamente juntei a camisola com a outra saia que me deu 2 conjuntos e fui fazendo assim. Ao fim de tudo somado deu-me 9 conjuntos"	" A saia azul com a camisola preta, a saia vermelha e a camisola verde. I-Uma peça de roupa ficou de fora, qual foi ? A-A camisola amarela. I-Não havia saia para ela ? A-Não."	"Eu contei as blusas e as saias. Fui contar a saia vermelha e a azul e depois contei a camisola amarela, a verde e a preta"	

Na tabela 22 estão representadas as frequências e as percentagem encontradas no item 5 depois de categorizadas todas as respostas dadas.

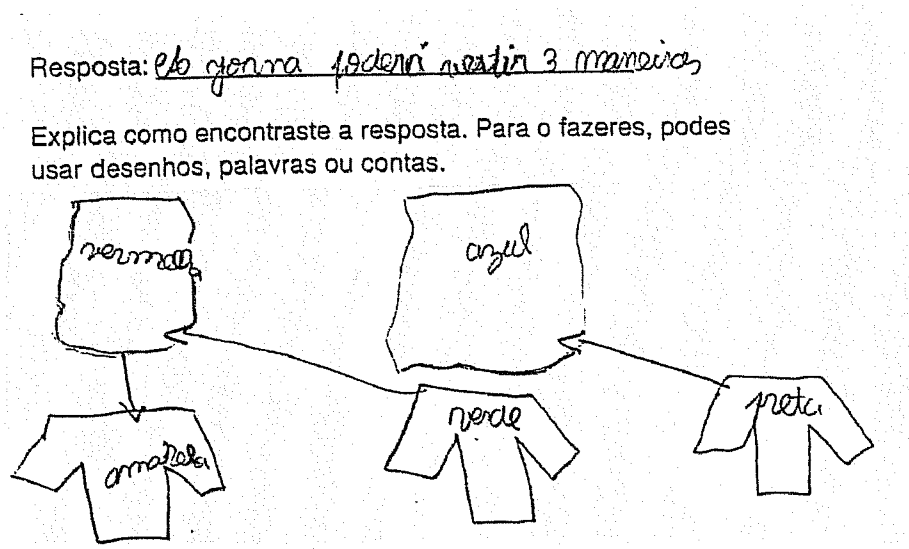
* Tabela 22 - Frequências e percentagens obtidas após a análise de conteúdo do item 5.

Categorias	Frequência	Percentagem
Respostas Correctas		
Utilizou o cálculo nas combinações (3x2, 3+3 ...)	14	11,9
Processo sistemático com utilização de desenho	34	28,8
Processo sistemático sem utilização de desenho, por escrito	14	11,9
Identificou todos os pares mas sem processo sistemático	16	13,6
Não usou processo sistemático e identificou todos os pares após interacção	5	4,2
Processo sistemático com utilização de desenho e por escrito	1	0,8
Não usou processo sistemático e identificou todos os pares após interacção (mas teve reforço)	1	0,8
Respostas Incorrectas		
Fez pares sem processo sistemático e ficou aquém	28	23,7
Fez pares sem processo sistemático e foi além	2	1,7
Só admitiu correspondência termo a termo (1 saia para 1 blusa)	1	0,8
Somou as peças	2	1,7
Total	118	100,0

Começando por analisar as respostas correctas podemos afirmar que, neste exercício, 79 alunos (67%) não necessitaram de interacção identificando todos os pares, 49 alunos utilizaram um processo sistemático, dos quais 28,8% correspondeu a desenho, 11,9% a escrita, e um aluno utilizou o desenho e a escrita. Não utilizaram processo sistemático 25,5% dos alunos.

Foi necessário avançar com interacção no caso de seis alunos (5%). Estes alunos não utilizaram processo sistemático, mas identificaram todos os pares (*"De 4, a saia vermelha com a camisola preta, a saia azul com a camisola verde, a saia azul com a camisola amarela, a saia vermelha com a camisola amarela". "Vê bem". "Descobri mais duas maneiras, a saia azul com a camisola preta e a saia vermelha com a camisola amarela")*.

Nas respostas incorrectas constatou-se que 30 alunos (25,4%) compreenderam que havia necessidade de utilização de uma operação combinatória, mas não recorrem a processo sistemático, fazem pares, usando ou não o desenho, mas ou ficam aquém ou vão além das possibilidades (*"Pensei, ela num dia pode vestir este, depois noutro veste este, noutro este e no outro dia já tem esta lavada veste esta outra vez").*



Um aluno fez correspondência termo a termo (uma saia para uma blusa) e dois alunos (1,7%) somaram as peças todas *("Eu contei as blusas e as saias. Fui contar a saia vermelha e a azul e depois contei a camisola amarela, a verde e a preta").* Todos os alunos responderam a este item..

<u>No item 8</u> falava-se sobre um pai e um filho que mediram em passos o comprimento do jardim. O pai contou 18 passos. Pedia-se quantos passos teria dado o filho. Acompanhava o enunciado um desenho que mostrava que cada passo do pai era o dobro do passo do filho.

Passamos agora à tabela 23 que mostra as diferentes categorias e as respostas tipo dadas pelos alunos no item 8.

- Tabela 23 - Grelha de análise de conteúdo correspondente ao item 8.

Respostas Correctas						
Igual a 36 imediatamente					Igual a 36 depois da interacção	
Com multiplicação	Com adição	Com correspondência	Invocando a relação entre os passos do pai e os do filho e fez mentalmente	Sem explicação	Primeiro fez a divisão por 2 e depois reformulou	Primeiro enganou-se e depois reformulou
18x2=36	18+18= 36	1 2 3 4 5 6 7 8 ... 2 4 6 8 10 12 ...	18 + 18 = 36	36	18:2=9 2 x 18 = 36	2 x 18 =36 18 + 18 = 36
"Enquanto o pai dá 1 passo o filho tem que dar 2 (ou o dobro) e 2x18 dá 36"	"Como os passos do filho são mais pequenos, são metade, então fiz o dobro"	"Contando de 2 em 2 até 18 "	"Porque o passo do menino é mais pequeno do que o do pai"	"Então fiz 18 a dividir por 3. I-18:3? Então o que é que dá, 18:3? A-Não, fiz vezes, vezes, 18x3. I-18x3 e deu 36 ? A-18:3 deu 36. I-18 a dividir por 3 dá 36? Mostra-me lá. Como é que tu chegaste ao resultado 36? A-Foi 18... I-18. Como vais resolver? Estás baralhado, é? Queres passar à frente? A- Sim."	"Faço assim se o pai dá 18 o filho tem de dar metade, faço 18 a dividir por 2. I-Então quando o pai dá 1 o filho dá quantos? A – Metade do que o pai dá. I-Um passo do filho é metade do passo do pai. Quando o pai dá 1 passo, quantos dá o filho? A- 2 x 18. Ele dá mais passos que o pai."	"Metade I-Terá dado mais ou menos? A-Menos I-Então quando o pai dá 1 passo o filho dá quantos? A-Ah! Terá dado mais. É 2 x 18. I-São quantos passos? A-36 I-Porque é que são 36 ? A – Porque o filho dá mais 18 passos que o pai."

Respostas Incorrectas						
Reconheceu a relação entre os passos do pai e os do filho				Não explicitou relação		Não resolveu após interacção
Com correspondência mas ficou aquém Contou de 2 em 2 até 8 e parou	Somou a relação com o número de passos do pai	Fez ao acaso	Usou o inverso da relação estabelecida	Fez uma soma	Apenas apresentou um número	
18+ 8 =26	18+2 = 20	27, 28, 48 18 + 19 = 37	18:2=9	18+2=20 12 + 6 = 18	9, 17, ou 30 passos	
"Fiz 18 + 8. Quando o pai dá 2 o filho dá 4, depois 6 e depois 8 ..."	"Porque o pai dá 1 e o filho dá 2. Pus o 18 e depois pus mais 2 e deu 20."	"Porque o filho contava metade e deu mais 10 passos que o pai." "Eu pensei que se calhar ele media metade e chegava aos 28." "E veio-me à cabeça, era para dizer 20 e depois pensei 48"	"Enquanto o pai deu 18 o filho dá só metade. I-Quem é que dá mais passos ? A-É o pai. Fiz 18:2 deu 9."	"Porque o filho mediu 12 passos e o pai outros 6"	"O filho dá metade dos passos do pai"	

Na tabela 24 apresentamos as frequências e as percentagens encontradas no item 8.

- Tabela 24 – Frequências e percentagens obtidas após a análise de conteúdo do item 8.

Categorias	Frequência	Percentagem
Respostas Correctas		
Igual a 36 imediatamente		
Com multiplicação	55	46,6
Com adição	8	6,8
Com correspondência	2	1,7
Invocando a relação entre os passos do pai e os do filho e fez mentalmente	8	6,8
Sem explicação	1	0,8
Igual a 36 depois da interacção		
Primeiro fez a divisão por 2 e depois reformulou	8	6,8
Primeiro enganou-se e depois reformulou	7	5,9
Igual a 36 com multiplicação (mas teve reforço)	1	0,8
Respostas Incorrectas		
Reconheceu a relação entre os passos do pai e os do filho		
Com correspondência mas ficou aquém. Contou de 2 em 2 até 8 e parou	1	0,8
Somou a relação com o número de passos do pai	3	2,5
Fez ao acaso	6	5,1
Usou o inverso da relação estabelecida	4	3,4
Não explicitou relação		
Fez uma soma	4	3,4
Apenas apresentou um número	4	3,4
Não resolveu após interacção	6	5,1
Total	118	100,0

Neste exercício, 73 alunos (61,9%) responderam 36 imediatamente. Destes, 55 (46,6%) usaram a multiplicação, 8 jovens (6,8%) utilizaram a adição e outros 8 invocaram a relação entre os passos do pai e os do filho e resolveram mentalmente; dois alunos utilizaram a correspondência.

Aqui, houve também 17 alunos que necessitaram de um prolongamento da entrevista no sentido de alguma explicitação.

Concretamente, 15 alunos (12,7%) responderam 36, embora em primeiro lugar tivessem raciocinado com a operação inversa *("A- Faço assim se o pai dá 18 o filho tem de dar metade, faço 18 a dividir por 2. I - Então quando o pai dá 1 o filho dá quantos ? A – Metade do que o pai dá. I- Um passo do filho é metade do passo do pai. Quando o pai dá 1 passo, quantos dá o filho ? A- 2 x 18. Ele dá mais passos que o pai.")*. Um aluno deu a resposta correcta mas não conseguiu explicar como pensou e outro necessitou de reforço para conseguir fazer através da multiplicação *("I- Então como é que vais fazer ? Quando o pai dá 1 passo, quantos dá o filho ? Não há ai nada que te mostre quantos passos dá o filho ? Repara bem no desenho .... A- Já sei, dá 2 passos ... I – Então se o filho dá 2 passos e o pai dá 1 ... A- Vou fazer ... I – O pai dá 18, quantos dará o filho ? A – Faço 2x18 ... I – Então vá faz.")*.

Houve 14 alunos (11,8%) que, apesar de reconhecerem a existência de uma relação entre os passos do pai e do filho não conseguiram dar uma resposta adequada. Quatro desses alunos concretizaram a relação de forma inversa *("Enquanto o pai deu 18 o filho dá só metade. I- Quem é que dá mais passos ? A-É o pai. Fiz 18:2 deu 9.")*. Seis alunos (5,1%) responderam ao acaso, utilizaram uma operação que não traduz a relação ou operaram sem critério

8. Pai e filho mediram, em passos, o comprimento do jardim.
O pai contou 18 passos.
Quantos passos te parece que o filho terá contado?

Explica como descobriste o número de passos que o filho contou.

Resposta: Ele contou 2.3 passos.

Explica como descobriste o número de passos que o filho contou.

Porque o filho contou metade e deu mais dez passos que o pai.

("Porque o filho contava metade e deu mais 10 passos que o pai." "Eu pensei que se calhar ele media metade e chegava aos 28." "E veio-me à cabeça, era para dizer 20 e depois pensei 48"). Um dos alunos, reconhecendo embora a relação existente, utilizou uma contagem dupla – passos do pai, passos do filho – ficando aquém do valor total que se pretendia: 18 passos do pai *("Fiz 18 + 8. Quando o pai dá 2 o filho dá 4, depois 6 e depois 8 ... ")*. Três alunos somaram a relação com o número de passos do pai *("Porque o pai dá 1 e o filho dá 2. Pus o 18 e depois pus mais 2 e deu 20.")*. E ainda oito alunos (6,8%) não explicitaram relação e não resolveram. Quatro fizeram uma soma (*"Porque o filho mediu 12 passos e o pai outros 6")* e os outros quatro apenas apresentaram um número completamente ao acaso. Seis alunos (5,1%) não resolveram, mesmo depois de terem acesso a uma maior explicitação do problema.

No item 9 a Teresa tinha que encher 15 copos com a mesma quantidade de sumo de laranja. Para saber quantos litros de sumo tinha de preparar, recorria a uma tabela que mostrava quantos decilitros levava 1 copo, 2 copos, 3 copos, 4 copos e 5 copos.

A tabela 25 mostra as categorias em que foram classificadas as respostas dadas ao item 9. Como se pode verificar, este foi um item onde as estratégias foram muito diversificadas.

- Tabela 25 – Grelha de análise de conteúdo correspondente ao item 9.

Respostas Correctas										
Com multiplicação			Com adição				Fez com reforço mas não reduziu as unidades	Incompleto mas explicação certa	Reduziu mal	Continuou a tabela e reduziu
12,5dl x 3 = 37,5dl e reduziu a litros	2x7 copos + 1 copo e reduziu	2,5 dl x 15 = 37,5 dl e reduziu	Juntou 5 copos+ 5 copos+ 5 copos e reduziu	Adicionou 15 vezes o 2,5 dl deu 37,5 dl e reduziu	Juntou os copos todos e depois reduziu	5+5+5+5+5+5+5+2,5 = 37,5 e reduziu	2,5 x 15 = 37,5 dl	37,5 dl = 3,75 l	12,5dl+12,5dl+12,5dl= 37,5dl = 375l	6 copos – 15 dl 7 copos – 17,5 dl .8 copos ...
3,75 l	3,75 l	3,75 l	3,75 l	3,75 l	3,75 l	3,75 l		3,75 l		3,75 l
Fiz os 5 copos vezes 3, 3x5 dá 15 depois reduzi dl a l. Se 5 copos levam 12,5dl, vezes 3 porque 5+5+5 dá 15. Multipliquei essa quantia por 3 e deu-me 37dl e meio e depois fiz uma redução para l"	"Pensei 2 copos levam 5dl para ir para 15 precisava de 7 copos, que dá 14 copos mas como faltam copos somei + 1 copo que deu os 15, depois aos 5 dl multipliquei por 7, deu 35, depois somei + 1 copo que é 2,5 dl que deu 37,5dl e depois reduzi a l que deu 3,75 l."	"Se 1 copo leva 2,5 dl, multipliquei os 15 copos por 2,5 dl. E depois pedia em l e tive reduzir"	"Pensei que 5 copos dava 12dl e 5cl e depois fiz 12dl e 5 cl +12dl e 5 cl + 12dl e 5 cl e reduzi"	"Fiz uma conta de 1 copo. I- Somaste quantos copos ? A – 15 " I-E somaste quantos copos ?	"Somei os dl todos. E depois dos 37 dl e meio reduzi a l"	" I-Como é que podes fazer ? A-De vezes. I-Vais multiplicar o quê pelo quê ? A-(A aluna soma 2 copos 7 vezes e + 1) I-Isto é o quê ? 37,5 ... A-37,5 dl ... vou transformar."	"Fiz 2,5l vezes 15. I-E deu-te o quê ? A-37,5 I-Quê ? A-Litros.	"Aqui a diferença de 2,5dl a 5 é de 2,5 depois fui sempre acrescentando 2,5, 2,5, 2,5, 2,5 ... Somei todos e deu-me isto depois como isto é dl avancei para l e deu-me isto. "	"Multipliquei 1 copo por 15. I-E deu-te o quê ? A-37,5 ... ah! Tenho que ir reduzir. I-Reduziste a quê ? A- .. Deu-me 0,375."	"Continuei a tabela e a seguir mudei para litros."

Respostas Incorrectas								
Só reduziu	Apresentou algum resultado sem explicação lógica	Não soube colocar a parte inteira dos números debaixo das unidades	Soube colocar a parte inteira dos números debaixo das unidades, mas errou no cálculo e não reduziu apenas mudou os dl para l	Indicação de multiplicação sem cálculo	Indicação de multiplicação com cálculo, sem conseguir explicar porque fez assim	Continuou a tabela mas enganou-se na conta	Não conseguiu resolver após interacção	Não respondeu
12,5 dl = 1,25 l	15x5= 75 l	24,0 dl	5+10+2,5+7,5+12,5 = 27,5	12,5dlx10	25lx15 = 45 l	30 dl = 31		
"12,5dl ... se calhar sai a vírgula ... Ah! Fica 1,25l. I-Tu queres saber quanto é que leva 15 copos. A-5 para ... 5 para ... 15. I-Passamos à frente ? A- Está.	"Primeiro fui pôr os dl para l e deu 1,25 e pus lá mas isso é o que tem 5 copos, eu quero saber 15 copos. Tenho que fazer 5x15. I-Explica lá o que é que fizeste ? A –Eu fui multiplicar 5 por 15. I-Porquê ? A-Porque ... veio-me à cabeça de repente. "	"Pensei que podia fazer ... juntar os copos que aqui estão todos para ver quantos é que eram 15 copos. I-Achas que isso é quanto levam os 15 copos ? A-Eu acho que sim. "	"Juntei todos. I-E deu-te 27,5 l ? A-Foi."	"Faço uma conta de menos e vou ter de pôr 12,5x10. Porque se eu fizer 2,5 x 10 já dá os 15 copos. I-Dá quanto ? A-Dá 50. I-Então quanto é que levam os 15 copos ? Não consegues fazer ? A-Não.	"Eu primeiro reduzi de dl para l, deu-me 25 l e depois fiz a conta 25l x 15 copos deu-me 45 l. I-Achas que está bem ? A-Acho. I-Porquê ? A-Não sei bem."	"1 copo leva 2,5dl,5 leva … Assim é 2 vezes, tenho que somar isto tudo. I-O que é que tu não sabes ? A-Dl, litros I-Estás a reduzir ? A-30 dl."	"Vou aumentando mais meio. I-Então é sempre mais meio que se aumenta ? A-Ai, não. I-Sabes fazer ? A-Talvez. I-Faz.	"I-Não sabes ? Passamos à frente ? A-Sim."

A tabela seguinte apresenta as frequências e as percentagens das categorias correspondentes ao item 9.

- Tabela 26 – Frequências e percentagens obtidas após a análise de conteúdo do item 9.

Categorias	**Frequência**	**Percentagem**
Respostas Correctas		
Utilizou multiplicação		
12,5dlx3=37,5dl e reduziu a litros	19	16,1
2x7copos + 1 copo e reduziu	1	0,8
2,5dlx15=37,5dl e reduziu	18	15,3
Utilizou adição		
Juntou 5 copos + 5 copos + 5 copos e reduziu	15	12,7
Juntou os copos todos e depois reduziu	12	10,2
Adicionou o 5+5+5+5+5+5+5+2,5=37,5 e reduziu	1	0,8
Fez, com reforço, mas não reduziu	1	0,8
Deixou incompleto mas deu explicação certa	2	1,7
Reduziu mal	2	1,7
Continuou a tabela e reduziu	1	0,8
Multiplicou 12,5dlx3=37,5dl e reduziu a litros (mas teve reforço)	1	0,8
Multiplicou 2,5dlx15=37,5dl e reduziu a litros (mas teve reforço)	1	0,8
Juntou 5 copos + 5 copos + 5 copos e reduziu (mas teve reforço)	3	2,5
Adicionou 15x o 2,5dl deu 37,5dl e reduziu (mas teve reforço)	6	5,1
Juntou os copos todos e depois reduziu (mas teve reforço)	2	1,7
Respostas Incorrectas		
Só reduziu	2	1,7
Apresentou algum resultado sem explicação lógica	7	5,9
Não soube colocar a parte inteira dos números debaixo das unidades	5	4,2
Soube colocar a parte inteira dos números debaixo das unidades, mas errou no cálculo e não reduziu, apenas mudou os dl para l	1	0,8
Indicou multiplicação não efectuou cálculo	1	0,8
Indicou multiplicação, efectuou cálculo, sem conseguir explicar porque fez assim	8	6,8
Continuou a tabela mas enganou-se no cálculo	2	1,7
Não conseguiu resolver após interacção	1	0,8
Não respondeu	6	5,1
Total	118	100,0

Neste exercício, 66 alunos (55,9%) resolveram correctamente sem necessitarem de interacção com a entrevistadora; destes 38 resolveram através da multiplicação: 19 multiplicaram por três o valor dos cinco copos; 18 multiplicaram os 15 copos por 2,5dl (que era o valor de um copo); e um aluno multiplicou o valor de dois copos por sete e, no fim, somou mais um copo para lhe dar o valor dos 15 copos. Vinte e oito alunos utilizaram a adição. Destes, 15 resolveram através da adição, somando três vezes o valor dos cinco copos; 12 somaram os copos todos e um aluno seguiu outra estratégia de soma como se pode ver na tabela 8.

Aqui também se teve de utilizar o mesmo processo, o de uma maior explicitação, com 19 alunos (15,9%). Destes, 14 acabaram por resolver correctamente. Seis alunos (5,1%) somaram 15 vezes 2,5 dl *("Fiz uma conta de 1 copo. I.- Somaste quantos copos ? A – 15")*, três alunos (2,5%) juntaram 5 copos + 5 copos + 5 copos *("Pensei que 5 copos dava 12dl e 5 cl e depois fiz 12dl e 5 cl mais 12dl e 5 cl mais 12 dl e 5 cl e reduzi")*; dois alunos juntaram os copos todos, um aluno multiplicou 12,5dl por três, um outro aluno multiplicou 2,5dl por 15, um outro aluno continuou a tabela. Todos estes alunos fizeram a redução de decilitros para litros. Cinco alunos não conseguiram resolver o exercício proposto, dois alunos explicaram correctamente mas deixaram o exercício incompleto e três alunos não conseguiram reduzir as unidades, mesmo depois da interacção.

Houve 27,8% de respostas incorrectas, dadas por 33 alunos. Oito alunos (6,8%) indicaram a multiplicação, por vezes com erro na redução de decilitros para litros, e no cálculo da operação indicada, e não conseguiram explicar porque assim fizeram ("*Eu primeiro reduzi de dl para l, deu-me 25l e depois fiz a conta 25lx15 copos, deu-me 45l. I- Achas que está bem ? A- Acho. I- Porquê ? A- Não sei bem*").

Resposta: £ 45 l.

Explica como encontraste a resposta.

2,5 dl = 25 l

$$\begin{array}{r} 25\ l \\ \times 15\ l \\ \hline 45\ l \end{array}$$

Outros sete, apresentaram algum resultado sem explicação lógica *(" Primeiro fui pôr os dl para l e deu 1,25 e pus lá mas isso é o que tem 5 copos, eu quero saber 15 copos. Tenho que fazer 5x15. I- Explica lá o que é que fizeste ? A – Eu fui multiplicar 5 por 15. I – Porquê ? A – Porque ... veio-me à cabeça de repente").* Cinco alunos, embora tivessem adoptado uma estratégia correcta de resolução (somando todos os valores existentes do quadro, que totalizavam os 15 copos), indicaram a operação de forma errada, colocando os números em coluna sem respeitar as casas decimais.

Resposta: Precisa de preparar 24,0 dl.

Explica como encontraste a resposta.

$$\begin{array}{r} 2,5\ dl \\ 5\ dl \\ 7,5\ dl \\ 1\ 0\ dl \\ +\ 1\ 2,5\ dl \\ \hline 24,0\ dl \end{array}$$

Dois alunos só reduziram de decilitros para litros, outros dois continuaram a tabela mas enganaram-se no cálculo *(6 copos- 14dl, 7 copos- 16,5dl, 8 copos- 18dl, 9 copos- 20,5dl, 10 copos- 22dl, 12 copos- 24,5dl, 13 copos- 26dl, 14 copos- 28,5dl, 15 copos- 30dl / 30dl = 31).*

Resposta: A Teresa para encher os 15 copos precisa 3 l.

Explica como encontraste a resposta.

6 copos 14 dl	7 copos 16,5 dl	8 copos 18 dl	9 copos 20,5 dl	10 copos 22 dl	12 copos 24,5 dl
13 copos 26 dl	14 copos 28,5 dl	15 copos 30 dl			

30 dl = 3 l

Um aluno errou os cálculos e não soube reduzir as unidades, outro fez só a indicação da multiplicação sem cálculo. Finalmente, sete alunos não conseguiram resolver após uma maior explicitação do problema.

No item 10 os alunos tinham 25 caricas, 15 pregos e 8 tábuas para construírem instrumentos musicais e era mostrado através de desenho 1 instrumento musical já construído e as peças que levava. Era pedido para descobrirem quantos instrumentos musicais se conseguiam construir.

A tabela 27 apresenta as diversas categorias das respostas dadas ao item 10.

- Tabela 27 - Grelha de análise de conteúdo correspondente ao item 10.

Respostas Correctas											
Por cálculo mental c/ explicação	Só com desenho					Só com operações			Com desenho e operações	Por escrito	Com reforço orientado
	Dos instrumentos			Com conjuntos		Com adição	Com divisão	Com multiplicação	Com subtracções sucessivas	4 caricas, 2 pregos, 1 tábua (6 vezes)	Por desenho
6 completos	6 tábuas completas	7 tábuas e 1 incompleta	8 tábuas e 2 incompletas	Com reforço 6 tábuas	Sem reforço 6 tábuas	6 instru-mentos	25 : 4 = 6 15: 2 = 14 8:1 = 8	4 x 6 = 24 2 x 7 = 14	6 instru-mentos	6 instru-mentos	6 instru-mentos
"Fiz as con-tas de cabeça e vi que 8 tábuas dava para fazer 7 instrumentos e ainda so-brava 1, 25 caricas dava para fazer 6 instrumentos e sobrava 1 também. ... Assim posso fazer 6 ins-trumentos	"Fiz dese-nhos até darem as caricas, os pregos e as tá buas, as caricas eram 24 e depois vi que não podia construir mais."	"Fiz as 25 caricas, os 15 pregos e as 8 tábuas. I-E depois? A-E depois nestas tábuas pus os pregos e as caricas, fui sempre pondo até dar 4 caricas em cada uma, 2 pregos em cada tábua e 1 tábua"	"Desenhei as 25 caricas, os 15 pregos e as 8 tábuas. Depois fiz os instrumentos e deu 6 e depois sobra-ram 2 tábuas, 1 carica e 3 pregos."	"A-4 cari-cas, 2 pre-gos, 1 tábua ... I-Isso é 1 instru-mento. Mas tu tens mais mate-rial. Então vá faz. Ainda tens material, conta lá. A-Ah ! 7, posso fazer 7, ai não,6"	"Fiz as 25 cari-cas, 15 pregos e 8 tábuas por gru-pos. Sobrou 1 carica, 3 pregos e 2 tá-buas."	"Pensei 4+2+1=7 e depois fui fazendo, depois somei 7+7 até chegar ao nº que dá 25,+ 15 + 8 que dá 48. Aqui 7 + 7 são 14, 21,28 e 35, depois + 7 outra vez e já deu mais. "	"Dividi as 25 caricas que eles tinham por 4 para ver quantos instru-mentos podiam fazer e vi que eram 6 ... "	"4 x 7 não dava porque tinha de ha-ver 28 caricas mas está lá 25 e então experimentei o 4 x 6 que já é mais pe-queno e já dá porque só preciso de 24 caricas e 12 pregos e eu tenho 25 caricas e 15 pregos."	"Fui fa-zendo os instrumen-tos e ia diminuindo o número e quando cheguei a um certo ponto já não dava para fazer mais instrumen-tos."	"Fiz con-juntos e contei-os." (por es-crito)	"Eu fiz os desenhos para ver."

Respostas Incorrectas				
Por desenho c/ explicação errada	Não ligou ao material 8 instrumentos / 6x4=24	Somou tudo 47 / 48 ...	Usou todo o material só em 3 tábuas	Não respondeu apesar da interacção
"Fiz as tábuas, fiz os pregos mas não chegou para todos"	"Pensei em desenhar aqui as tá buas, os pregos e as caricas e deu 8 instrumentos	"Eu fiz uma conta de mais"	"Então tinha que fazer 4 caricas, 2 pregos e 1 tábua. Está mal fiz 2 pregos, era 1. Ah, estava a pensar meter 4 caricas em cada 1 e depois deu-me 25 caricas. I-Quantos instrumentos é que eles podem fazer ? A – 3"	

Na tabela 28 apresentamos as frequências e as percentagem encontradas no item 10, seguindo-se a descrição dos resultados encontrados.

- Tabela 28 - Frequências e percentagens obtidas após a análise de conteúdo do item 10.

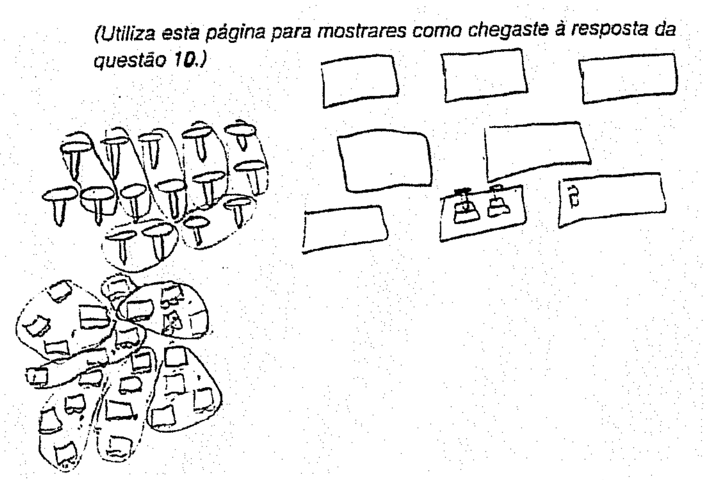
Categorias	**Frequência**	**Percentagem**
Respostas Correctas		
Por cálculo mental com explicação	2	1,7
Só com desenho, dos instrumentos		
6 tábuas completas	24	20,3
7 tábuas e 1 incompleta	8	6,8
8 tábuas mas 2 incompletas	27	22,9
Só com desenho, com conjuntos		
Com reforço, 6 tábuas	4	3,3
Sem reforço, 6 tábuas	6	5,1
Só com operações		
Com adição	1	0,8
Com divisão	14	11,9
Com multiplicação	1	0,8
Com desenho e operações	5	4,2
Por escrito	1	0,8
Com reforço orientado	7	5,9
Respostas Incorrectas		
Por desenho com explicação errada	1	0,8
Não ligou aos dados	10	8,5
Somou tudo	2	1,7
Usou todo o material só em 3 tábuas	1	0,8
Não respondeu apesar da interacção	4	3,4
Total	118	100,0

Neste exercício 89 alunos (75,3%) responderam correctamente, sem necessidade de interacção. Destes, 65 (55,1%) utilizaram o desenho; 27 desenharam oito tábuas mas duas estavam incompletas; oito desenharam sete tábuas mas uma estava incompleta; 24 desenharam seis tábuas completas; seis utilizaram o desenho de conjuntos. Cinco alunos utilizaram desenho e operações. Dezasseis alunos

(13,5%) resolveram só com uma operação. E um aluno apenas utilizou a escrita para resolver o exercício proposto.

Também neste exercício foi muitas vezes necessário estabelecer uma interacção, no sentido de tornar mais compreensível o problema. Onze alunos (9,2%), resolveram correctamente através de desenho *("Eu fiz os desenhos para ver")*. Entre estes, quatro alunos (3,3%) desenharam conjuntos *("A- 4 caricas, 2 pregos, 1 tábua ... I – Isso é 1 instrumento. Mas tu tens mais material. Então vá faz.... Ainda tens material... Então vá faz. Ainda tens material, conta lá. A – Ah! 7, posso fazer 7, ai não, 6.")*

Dez alunos (8,5%) não tiveram em conta os dados apresentados, limitando-se a construir instrumentos arbitrariamente *("Pensei em desenhar aqui as tábuas, os pregos e as caricas e deu 8 instrumentos".)*. Dois alunos somaram todas as peças que eram referidas *("Eu fiz uma conta de mais".)*. Um aluno tentou resolver utilizando o desenho com explicação errada *("O que é que fizeste para chegar ao resultado? A- Fiz as tábuas com os 15 pregos I- Cada tábua tem quantos pregos? A- 12 I– Cada uma tem quantos? A- 2 I- E depois? A- Depois as tábuas sobraram-me 6 I- O quê? A- Tábuas ...I- Sobraram-te, não. Conseguiste fazer? A – Foi")*



Um outro usou todo o material só em três tábuas. Quatro alunos tiveram uma interacção mais prolongada mas não conseguiram resolver.

No item 11 apresentava-se o desenho de um cubo e era pedido que os alunos imaginassem que estavam ao telefone com um amigo e que descrevessem esse sólido geométrico sem utilizarem a palavra cubo.

Passando ao item 11 apresentamos a tabela com as diversas categorias e exemplos de respostas dadas pelos alunos. Ao contrário do que sucedeu nos itens anteriormente considerados, no contraste entre as respostas correctas e incorrectas registou-se uma predominância das respostas incorrectas.

- Tabela 29 - Grelha de análise de conteúdo correspondente ao item 11.

<table>
<tr><td colspan="4">Respostas Correctas</td></tr>
<tr><td>Enumerou todas as características do cubo, sem dizer a palavra cubo</td><td>Enumerou algumas características do cubo, sem dizer a palavra cubo</td><td>Enumerou apenas 1 característica do cubo</td><td>Enumerou algumas características e fez alusão a objectos que têm a forma do cubo</td></tr>
<tr><td>“Olá amigo, olha eu vou-te falar sobre um sólido geométrico, ele têm 6 faces quadradas e três dimensões, apoia-se com todos os seus lados quadrados, ele têm 8 vértices e 12 arestas”</td><td>“Têm as faces quadradas, têm 6 lados, têm 8 vértices, as faces são planas e lisas e é um sólido geométrico”</td><td>“Primeiro digo que têm 6 lados, digo que é um sólido geométrico. Digo que têm as faces quadradas”</td><td>“Têm 6 faces que são quadradas, só têm ângulos rectos e parece-se com um dado”</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="5">Respostas Incorrectas</td></tr>
<tr><td colspan="3">Tinham a noção das diferentes partes do cubo</td><td colspan="2">Não tinham a noção das diferentes partes do cubo</td></tr>
<tr><td>Enumerou alguns elementos certos e outros errados</td><td>Enumerou os elementos do sólido geométrico com número errado</td><td>Enumerou duas ou mais características do cubo mas não o definiram por completo</td><td>Descreveu um sólido mas nada tem a ver com o cubo</td><td>Não fez nada</td></tr>
<tr><td>“Ele têm 6 faces laterais, 12 vértices e 12 arestas”</td><td>“Têm 7 vértices, têm 4 faces, têm 9 arestas”</td><td>“8 vértices, 12 arestas e 6 faces”.</td><td>“Uma caixinha e têm 4 faces iguais, e um sólido geométrico, desenha-se no quadro ou numa folha”</td><td></td></tr>
</table>

A tabela que se segue mostra as frequências e as percentagens referentes ao item 11 depois de categorizadas todas as respostas dos alunos envolvidos nesta investigação.

- Tabela 30 - Frequências e percentagens obtidas após a análise de conteúdo do item 11.

Categorias	**Frequência**	**Percentagem**
Respostas Correctas		
Enumerou todas as características do cubo, sem dizer a palavra cubo	21	17,8
Enumerou algumas características do cubo, sem dizer a palavra cubo	15	12,7
Enumerou apenas 1 característica do cubo	1	0,8
Enumerou algumas características e fez alusão a objectos que têm a forma do cubo	14	11,9
Respostas Incorrectas		
Tinham a noção das diferentes partes do cubo		
Enumerou alguns elementos certos e outros errados	15	12,7
Enumerou os elementos do sólido geométrico com número errado	7	5,9
Enumerou duas ou mais características do cubo mas não o definiram por completo	22	18,6
Não tinham a noção das diferentes partes do cubo		
Descreveu um sólido mas nada tem a ver com o cubo	21	17,8
Não fez nada	2	1,7
Total	118	100,0

Neste exercício houve 51 alunos que deram respostas correctas mas apenas 21 alunos (17,8%) enumeraram todas as características do cubo (arestas, vértices e faces) sem dizer a palavra cubo; 29 alunos (24,6%) enumeraram algumas características do cubo, sem dizer a palavra cubo; 14 alunos (11,9%) fizeram alusão a objectos que têm a forma do cubo e um aluno apenas enumerou uma característica.

Apesar de ter havido uma procura de explicitação do que o problema equacionava houve um número considerável de respostas incorrectas dadas por 67 alunos (56,5%). Quarenta e quatro alunos manifestaram ter a noção das diferentes partes do cubo. No entanto 22 enumeraram duas ou mais características do cubo mas não o definiram por completo *("8 vértices, 12 arestas e 6 faces")*; 15 alunos enumeraram alguns elementos certos e outros errados *("Ele têm 6 faces laterais, 12 vértices e 12 arestas")* e sete enumeraram os elementos do sólido geométrico com número errado *("Têm 7 vértices, têm 4 faces, têm 9 arestas").* Vinte e três dos alunos (19,3%) da amostra revelaram não ter a noção das diferentes partes do cubo.

Não podes utilizar a palavra "cubo".

É quadrado.

É seis fases.

É Parecido com um dado

Dos alunos que não tinham a noção, 21 descreveram um sólido que nada tinha a ver com o cubo *("Uma caixinha e têm 4 faces iguais, é um sólido geométrico, desenha-se no quadro ou numa folha")* e apenas dois alunos não fizeram nada.

<u>No item 12</u> havia 2 balanças desenhadas. Na balança A, estavam 2 gatos e 1 cão. O valor indicado para o peso dos 3 era de 6,5kg. Na balança B estava um dos gatos que pesava 1,5kg. No enunciado dizia que os 2 gatos tinham o mesmo peso. E o que se queria saber era o peso do cão.

Segue-se a tabela que diz respeito ao item 12, tendo-se verificado também um número bastante diversificado de estratégias de resolução, como se pode observar.

• Tabela 31 - Grelha de análise de conteúdo correspondente ao item 12.

Respostas Correctas

Com 2 operações e explicação certa				Com 1 operação		Sem operações só cálculo mental	Raciocínio correcto com erro de cálculo corrigido após interacção
1,5+1,5=3,0Kg 6,5kg-3kg=3,5k	1,5+1,5=3 3+3,5kg=6,5kg	1,5kgx2=3,0kg 6,5kg- 3,0kg=3,5	6,5kg-1,5=5,0 5,0-1,5= 3,5	6,5kg- 3=3,5kg	1,5+1,5=3 e o resto calculou mentalmente de 3 até 6,5kg na balança		2,5 1,5+1,5=3,5 6,5-3,0= 3,5 ou 6,5 – 3 = 2,5
“Fiz o peso dos gatos que dava 3kg e fiz 6,5kg menos 3 kg e deu 3,5 kg.”	“Primeiro fiz a conta para ver quanto é que pesavam os 2 gatos. I-E depois? A-Depois fiz o peso dos gatos mais o peso do cão e depois deu-me ... I-E deu-te o quê ? A-6,5 I-E ficaste a saber que o cão pesava quanto ‘ A- 3,5.”	“Os 2 gatos e o cão pesam 6,5kg.E 1 gato pesa 1,5, vou fazer 2 vezes o peso do gato que eles são iguais e depois vou tirar o peso dos gatos aos 6,5 kg.”	“Os 3 pesam 6,5 e 1 gato pesa 1,5 e assim os 6,5- 1,5 deu-me 5kg. ... Mais outra conta ... Como o gato pesa o mesmo que o outro, tiro 1,5 e dá-me 3,5kg	“Se 1 gato pesa 1,5kg, os 2 gatos pesam 3kg. O cão ao todo e os 2 gatos pesavam 6,5. Tirei 3kg e ficaram 3,5kg.	“Se cada gato pesa 1,5kg. 1,5kg + 1,5kg é 3kg ... 1,2,3 e meio ... Este tem de pesar 3,5kg.”	“Os 2 gatos pesam 3 kg. Se somar 1,5 + 1,5 dá 3 kg e se o cão com os 2 gatos pesavam 6,5 kg e tirarmos 3kg dá 3 quilos e meio.”	“Um gato pesa 1,5. E os 2 gatos pesam 2,5 ... fui juntando ... I-Então junta lá, faz lá a continha. A-Dá 3. 1,2,3. I-Quanto é que pesa só o cão ? A-O cão pesa 3,5 kg.”

Respostas Incorrectas

Raciocínio correcto mas cálculo errado por má colocação das unidades	Só tirou o peso de 1 gato	Calculou o peso dos 2 gatos e utilizou a adição nos 6,5 Kg	Só juntou o peso dos 2 gatos	Cálculos errados	Não avançou
1,5+1,5=3 6,5-3=6,2 6,2+3=6,5	6,5-1,5=5	1,5+1,5=3 3+6,5=9,5 6,5+3=6,8	1,5+1,5=3Kg	2,5-7=38	
“Primeiro fui ver quanto é que pesavam os 2 gatos, depois fui ver para fazer a conta quanto é que pesava o cão e depois fui ver se a conta dava certa.”	“Uma conta de menos. Os 2 gatos pesavam 6 kg ... 6,5 kg. O gato pesava 1,5 kg. Depois fiz 6,5kg – 1,5 kg que me deu 5kg.”	“Todos pesam 6,5. I-Se tirares de lá os 2 gatos, quanto pesa o cão ? A- 9,5 “	“Somei. I-Sim e soubeste o peso dos gatos? (abanou afirmativamente a cabeça) E não consegues saber o peso do cão ? A- Não. “	“Então fiz a conta de cabeça, vi quanto é que pesava os 2 gatos, depois fiz 1,5 + 1,5, dá 2,5 e depois fiz menos 7.”	

A tabela 32 mostra-nos as frequências e as percentagens encontradas no item 12 depois de analisadas todas as respostas.

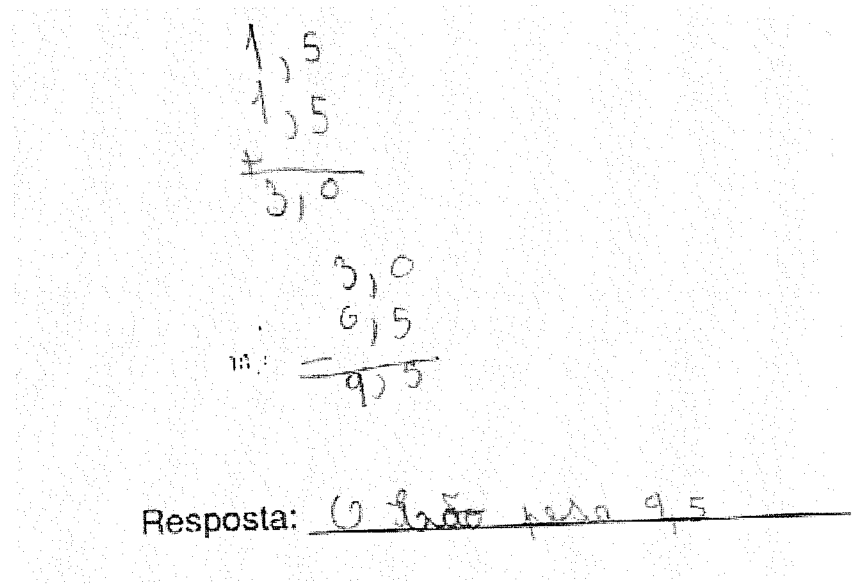
- Tabela 32 - Frequências e percentagens obtidas após a análise de conteúdo do item 12.

Categorias		Frequência	Percentagem
Respostas Correctas			
Com 2 operações e explicação certa			
1,5+1,5=3,0Kg	6,5kg-3kg=3,5kg	41	34,7
1,5+1,5=3kg	3+3,5kg=6,5kg	3	2,5
1,5kgx2=3,0kg	6,5kg-3,0kg=3,5	10	8,5
6,5kg-1,5=5,0	5,0-1,5=3,5	1	0,8
Com 1 operação			
6,5kg-3=3,5kg		3	2,5
1,5+1,5=3 e o resto calculou mentalmente de 3 até 6,5kg, na balança		7	5,9
Sem operações, só cálculo mental		11	9,3
Raciocínio correcto com erro de cálculo corrigido após interacção		18	15,3
Com 1 operação - 6,5kg-3=3,5kg (mas teve reforço)		3	2,5
Com 1 operação - 1,5+1,5=3 e o resto calculou mentalmente de 3 até 6,5kg, na balança (mas teve reforço)		1	0,8
Com 2 operações e explicação certa (mas teve reforço)		2	1,7
Respostas Incorrectas			
Raciocínio correcto mas cálculo errado por má colocação das unidades		3	2,5
Só tirou o peso de 1 gato		2	1,7
Calculou o peso dos 2 gatos e utilizou a adição nos 6,5kg		2	1,7
Só juntou o peso dos 2 gatos		2	1,7
Cálculos errados		3	2,5
Não avançou		6	5,1
Total		118	100,0

Neste exercício, registaram-se 100 (64,2%) respostas correctas sem necessidade de interacção: 55 alunos recorreram a duas operações e deram uma explicação certa; destes, 41 primeiro juntaram o peso dos gatos e depois subtraíram ao peso total o peso dos gatos e 10 multiplicaram o peso de um gato por dois e depois subtraíram o resultado ao peso total. Três alunos juntaram o peso dos gatos e depois somaram o peso dos gatos e o peso do cão e um aluno subtraiu ao peso total o peso de um gato e ao resultado o peso do outro gato.

Sete alunos utilizaram só uma operação e calcularam mentalmente contando de três até 6,5 Kg na balança; houve ainda 11 alunos que recorreram apenas a cálculo mental. Dezoito alunos (15,3%) raciocinaram bem, com erro de cálculo que foi corrigido por eles próprios *("Um gato pesa 1,5. E os 2 gatos pesam 2,5 ... fui juntando ... I- Então junta lá, faz lá a continha. A- Dá 3. 1,2,3. I- Quanto é que pesa só o cão ? A-O cão pesa 3,5 kg.")* e seis alunos além de uma primeira explicitação do problema necessitaram de uma intervenção adicional para o resolverem *("I- Como é que tens de pensar para saber o peso do cão? A- Tenho que pensar que os 2 gatos pesam os dois o mesmo e que pesam 2,5kg e ... I- Como é que é ? A- Os 2 gatos pesam o mesmo peso, 1 pesa 1,5kg e o outro também e depois os dois... 2,5kg. I- Faz lá. A- Ai não... 3 quilos. I- Os 2 gatos pesam 3 quilos, quanto é que pesa o cão ? A- O cão pesa .. I- Olha para a balança e vê se consegues. A- Aqui fui tirar 3 quilos no quadro e depois o cão pesa o resto. I- Quanto pesa o cão ? A- 3,5. I- Dá lá a resposta.")*

Três alunos raciocinaram correctamente mas erraram o cálculo por má colocação das unidades; outros três erraram o cálculo da adição e utilizaram informação incorrecta *("Então fiz a conta de cabeça, vi quanto é que pesava os 2 gatos, depois fiz 1,5+1,5, dá 2,5 e depois fiz menos 7")*. Houve também dois alunos que tiraram só o peso de um gato *("Uma conta de menos. Os 2 gatos pesavam 6kg ... 6,5Kg. O gato pesava 1,5kg. Depois fiz 6,5kg – 1,5kg que me deu 5kg")*, e dois alunos que calcularam o peso dos dois gatos e adicionaram este valor ao peso total dos animais *("1,5+1,5=3 / 3+6,5=9,5")*.



Outras duas crianças só juntaram o peso dos dois gatos. Finalmente seis alunos apesar de terem uma intervenção mais prolongada não conseguiram resolver

<u>No item 14</u> estavam desenhados 4 quadrados com 2 cm de lado e os alunos tinham que juntar esses 4 quadrados, num quadriculado de 1 cm, de modo que juntos formassem, pelo menos duas figuras, com 20 cm de perímetro.

Na tabela 33 pode-se observar as categorias e as respostas tipo dos alunos sobre o item 14.

- Tabela 33 - Grelha de análise de conteúdo correspondente ao item 14.

Respostas Correctas			
Desenhou 2 figuras diferentes certas			Desenhou 2 figuras certas após interacção
Tinha a noção de perímetro e mediu	Tinha a noção de perímetro mas não mediu	Não tinha a noção de perímetro e resolveu com ajuda	
"I-Sabes o que é o perímetro? A - Sim. É tudo à volta. É a medida da linha de fronteira. I-Mostra-me lá que essas figuras têm 20 cm de perímetro. A-Têm. 2,4,6,8,10,12,14,16, 18,20. E aqui 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20."	"I-Sabes o que é o perímetro ? A-O perímetro é tudo o que está à volta. I-É o quê ? É a medida dos lados todos à volta, não é ? A – Sim. I-Consegues mostrar que cada figura têm 20 cm de perímetro ? A – Não. I-Então era contando os lados."	"I-Sabes o que é o perímetro ? A-É a ... Eu já soube mas esqueci-me. I-Mostra-me lá que essas 2 figuras têm 20 cm de perímetro. A-2,4,6,8,10,12,14,16,18,20. Têm."	"Na 1ª figura contei os quadrados. I-E deu-te 20? A- Sim I-E na segunda ? Conta lá para eu ver. A – 1,2,3,4,5,6,7,8 está mal ! I-Pois, vê lá bem, têm de ter 20 cm de perímetro. A-Então tenho de mudar este quadrado. I – Pois é melhor. Conta lá agora. A- Agora já têm."

Respostas Incorrectas									
Desenhou 2 figuras exactamente iguais			Desenhou 1 figura certa e outra errada		Desenhou 1 figura com 4 quadrados	Desenhou figuras erradas		Não fez nada	
Tinha a noção de perímetro e soube contar	Tinha a noção de perímetro e não soube contar	Não tinha a noção de perímetro	Tinha a noção de perímetro e errou na contagem	Acertou na 1ª reconheceu que a 2ª estava errada mas não reformulou	Não tinha a noção de perímetro nem soube contar	Mas tinha a noção de perímetro	Não tinha a noção de perímetro	Mas tinha a noção de perímetro	Não tinha a noção de perímetro
"I-Sabes o que é o perímetro ? A-Sei é tudo à volta. I-Achas que essas figuras têm 20 cm de perímetro ? A-Acho que sim.2,4,6,8,10,12,14,16, 18, 20 "	"I-Sabes o que é o perímetro ? A-Sei, é a medida toda à volta. I-Mostra-me lá que têm 20 cm de perímetro. A-1cm, este tem 4 cm I-Achas que têm ? A-1,8,16 ..."	"É o comprimento vezes a largura"	"É a medida à volta. Tenho de medir. I-Então vá mede. Já sabes que cada tracinho destes mede 1 cm. A-1,2,3,4,5,6,7,8 I-E deste lado não se mede ? A-9,10,11,12,13,14, 15"	"Tenho de fazer 2 figuras. I-O que é que entendes por perímetro ? A-É a medida tudo à volta. I-Mostra-me lá onde é que estão os 20 cm de perímetro. A-Aqui dá ... esta não."	"I-Sabes o que é o perímetro ? A-Já não me lembro. I-Consegues mostrar que o perímetro dessas figuras é 20 ? A-Não."	"Sei é por fora à volta da área. Não, consigo!"	"É o que mede de lado. I-Só de lado ? A-Sim. I-O que será o perímetro ? A-É lá dentro. .. Tenho de separá-los I-Não queres fazer de outra maneira ? A-Não "	"Tenho que ... medir ... I-O quê ? A- O quadrado à volta. ..."	"Esta aqui não sou capaz de fazer. I-Sabes o que é o perímetro de uma figura ? A-Sei. É aqui esta parte. I-Vê lá se consegues fazer. A-Não sei fazer."

Na tabela que se segue podemos analisar as frequências e as percentagens obtidas no item 14 da prova.

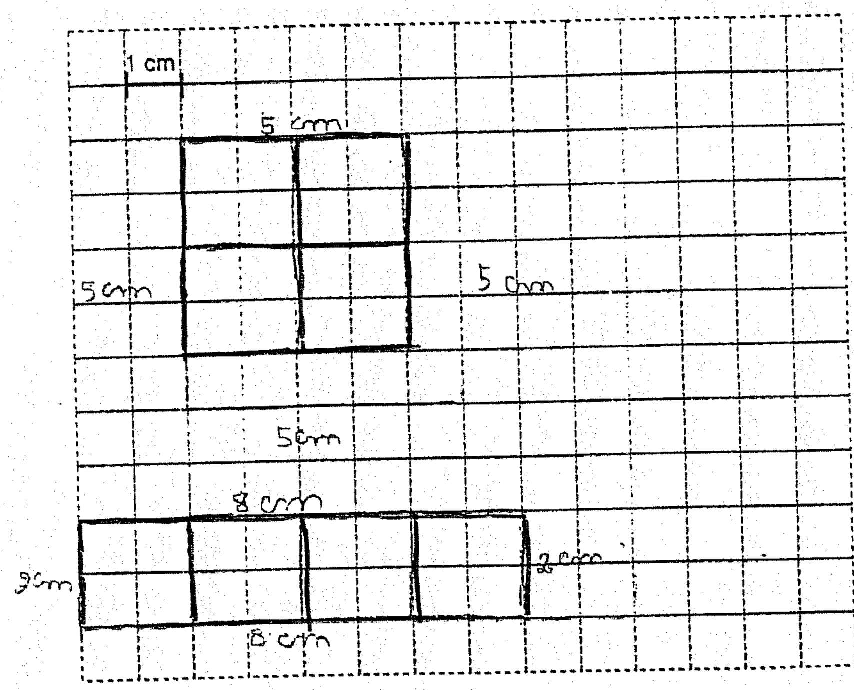
- Tabela 34 - Frequências e percentagens obtidas após a análise de conteúdo do item 14.

Categorias	**Frequência**	**Percentagem**
Respostas Correctas		
Desenhou 2 figuras diferentes certas		
Tinha a noção de perímetro e mediu	41	34,7
Tinha a noção de perímetro mas não mediu	2	1,7
Não tinha a noção de perímetro e resolveu com ajuda	8	6,8
Desenhou 2 figuras certas após interacção	21	17,8
Desenhou 2 figuras certas após interacção com reforço	4	3,4
Respostas Incorrectas		
Desenhou 2 figuras exactamente iguais		
Tinha a noção de perímetro e soube contar	6	5,1
Tinha a noção de perímetro e não soube contar	1	0,8
Não tinha a noção de perímetro	4	3,4
Desenhou 1 figura certa e outra errada		
Tinha a noção de perímetro e errou na contagem	5	4,2
Acertou na 1ª, reconhece que a 2ª estava errada mas não reformulou	6	5,1
Desenhou 1 figura com 4 quadrados, não tinha a noção de perímetro nem soube contar	4	3,4
Desenhou figuras erradas		
Mas tinha a noção de perímetro	5	4,2
Não tinha a noção de perímetro	6	5,1
Não fez nada		
Mas tinha a noção de perímetro	3	2,5
Não tinha a noção de perímetro	2	1,7
Total	118	100,0

Neste último exercício, 41 alunos (34,7%) desenharam duas figuras diferentes certas sem necessidade de interacção, tinham a noção de perímetro e mediram-no. Por outro lado, dois alunos desenharam duas figuras diferentes certas, revelaram ter a noção de perímetro mas não o conseguiram medir.

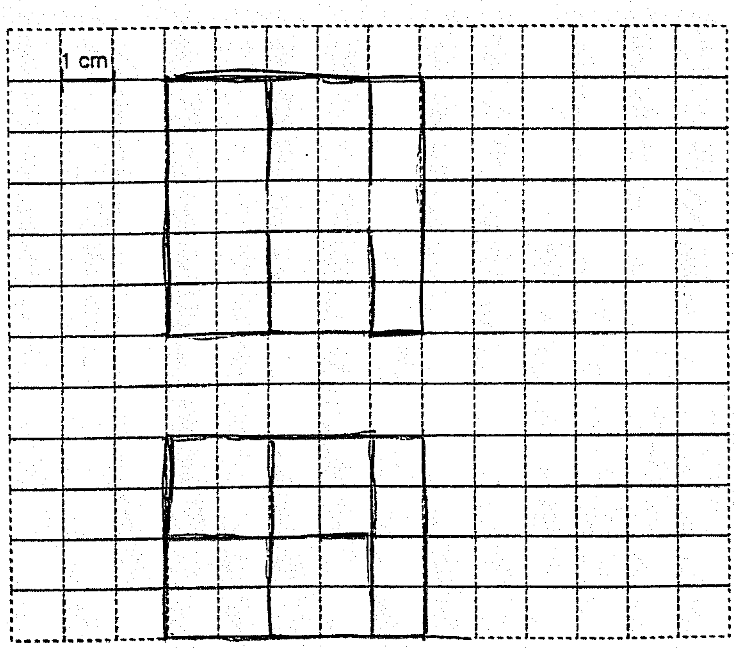
Com necessidade de uma maior ajuda houve 33 alunos (28%) que acabaram por desenhar correctamente duas figuras diferentes *("Na 1ª figura contei os quadrados. I-E deu-te 20? A- Sim I-E na segunda ? Conta lá para eu ver. A – 1,2,3,4,5,6,7,8 está mal ! I- Pois, vê lá bem, têm de ter 20 cm de perímetro. A- Então tenho de mudar este quadrado. I – Pois é melhor. Conta lá agora. A- Agora já têm.")*. Destes, oito alunos não conseguiram explicitar o que é o perímetro *("I-Sabes o que é o perímetro ? A-É a ... Eu já soube mas esqueci-me. I- Mostra-me lá que essas 2 figuras têm 20 cm de perímetro. A- 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20. Têm.")* e quatro alunos necessitaram de um reforço adicional *("I- Consegues mostrar que essas figuras têm 20 cm de perímetro? A- Sim. I- Como é que vais fazer ? A- Conto o nº dos lados. I- Então vá conta lá. A- 1 I- 1 não, esse é 2. A – 2,4,6,8,11. I- Ai 8 com 2 são 11? A – 10,12,14,16,18 e 20. I – Então esse tem e o debaixo... A – 2,4,6,8,10,12,14,16. I- Essa não tem. Então o que é que tens de fazer ? A- Tenho de meter mais. I- Tens de modificá-lo, só podes fazer com os 4 quadrados. Vê lá se consegues... E agora mostra-me lá se assim já tem os 20 cm. A- 2,4,6,8,10,12,14,16,18,19 e 20. I- Muito bem. Obrigado.")*

Verificou-se que 42 alunos (35,5%) deram respostas incorrectas. Onze alunos desenharam duas figuras exactamente iguais, sendo que seis deles tinham a noção de perímetro e souberam medi-lo, quatro não revelaram ter a noção de perímetro e um não soube medir. Quinze alunos desenharam uma figura certa e outra errada; destes, seis reconheceram que a segunda estava errada mas não reformularam.



("Tenho de fazer 2 figuras. I-O que é que entendes por perímetro ? A-É a medida tudo à volta. I-Mostra-me lá onde é que estão os 20 cm de perímetro. A-Aqui dá ... esta não.").

Cinco alunos não souberam medir *("É a medida à volta. Tenho de medir. I-Então vá mede. Já sabes que cada tracinho destes mede 1 cm. A-1,2,3,4,5,6,7,8 I-E deste lado não se mede ? A-9,10,11,12,13,14,15")*, e quatro alunos não tinham a noção de perímetro, nem souberam medir. Onze alunos desenharam figuras erradas, destes seis não tinham a noção de perímetro e cinco percebiam esta noção *("Sei, é por fora à volta da área. Não consigo!")*. Cinco alunos nem sequer tentaram resolver.



Comentário

Depois de se ter analisado as respostas dos alunos ao resolverem estes oito itens que envolviam estratégias mais pensadas e elaboradas, pode-se dizer que há alunos que conseguem resolver directamente os itens, outros há que necessitam de interacção com o investigador para uma melhor compreensão daquilo que é pedido e que há outros que apesar da interacção não conseguem mesmo compreender o problema e resolvê-lo.

Assim podemos concluir que:

- Quando é proposto um exercício onde tenham que aplicar conhecimentos para adicionar e subtrair a partir de um quadro dado (item 3.3), mais de metade dos alunos respondeu correctamente por cálculo mental ou apresentando os cálculos efectuados. Constatou-se que cerca de 14% dos alunos precisou de interacção para conseguir resolver e 13%, apesar da interacção, não conseguiu dar uma resposta correcta.

- No caso em que os alunos tinham que combinar duas saias e três blusas (item 5) dois terços identificaram todos os pares: utilizando desenho (29%), escrita (12%), e cálculo (12%). Mas notou-se que um quarto dos alunos não utilizou um processo sistemático. Alguns alunos (5%) necessitaram de interacção para identificarem todos os pares. E apesar da interacção, perto de um quarto fizeram pares mas não esgotaram as possibilidades.

- Na utilização de uma relação entre comprimentos expressa num desenho (item 8) 60% resolveram correctamente utilizando várias estratégias. A operação mais utilizada foi a multiplicação (47%), seguindo-se a adição (7%). Para cerca de 13% dos alunos teve de haver interacção para conseguirem resolver correctamente porque o raciocínio nestes casos foi do tipo "Se o passo é metade, divido por dois". Mas 23%, apesar da interacção, não conseguiu resolver correctamente; houve quem reconhecesse a relação mas não a soubesse utilizar correctamente.

- Quando o exercício envolveu um enunciado mais complexo e os alunos tinham de extrapolar a capacidade de um determinado número de copos a partir de uma tabela dada (item 9), verificou-se que as estratégias foram diversificadas e que 54% resolveram correctamente, através da multiplicação (31%) e da adição (23%). Mas 8% necessitou de interacção e reforço para o resolverem. Há ainda a registar 23% de alunos que, apesar da interacção, não conseguiu resolver, seguindo processos ao acaso ou mostrando dificuldades de cálculo.

- Quando lhes foi pedido para construírem instrumentos musicais a partir de um determinado número de objectos e lhes foi mostrado o instrumento a construir, as estratégias foram variadas e não se cingiram apenas ao desenho, notando-se mesmo que havia alunos que não sabiam pensar através do desenho. Assim, utilizaram desenho 55% dos alunos, houve quem utilizasse simultaneamente desenho e operações (4%) e quem resolvesse só com uma operação de divisão (12%). Houve também quem necessitasse de interacção e reforço (9%) utilizando o desenho como estratégia. Apesar da interacção 12% dos alunos não ligou ao material e não conseguiu resolver correctamente.

- Na descrição do sólido geométrico cubo (item11) verificou-se que a maior parte dos alunos não soube descrever o sólido de forma matematicamente correcta. Registaram-se neste exercício mais respostas incorrectas do que correctas. Foram poucos os que enumeraram todas as características (18%); a maior parte dos alunos enumerou só algumas características e 12% fizeram alusão a objectos que têm a forma do cubo. Apesar da interacção, a maioria dos alunos (57%) deu respostas incorrectas: alguns deles (37%) tinham a noção das diferentes partes do cubo mas não o conseguiram definir correctamente, outros (18%) não tinham a noção das diferentes partes e descreveram um sólido que nada tinha a ver com o que estava representado na figura. Há a registar que apenas dois alunos não tentaram resolver.

- Quando tiveram de aplicar conhecimentos que implicavam a relação entre várias medidas de peso (item 12), as estratégias utilizadas foram muitas. A maioria utilizou duas operações (43%), seguindo-se o cálculo mental (9%). Houve quem tivesse utilizado apenas uma operação e o cálculo mental (6%). Assim pode-se afirmar que no total 58,4% de alunos responderam correctamente sem necessidade de interacção. Registaram-se alguns erros de cálculo (15%) que foram corrigidos após interacção. Mas apesar da interacção houve respostas incorrectas (10%), e outras com cálculos errados por má colocação das unidades mas em que o raciocínio estava correcto (2,5%).

- Ao terem de juntar quadrados, num quadriculado, para construírem pelo menos duas figuras com um determinado perímetro (item 14) constatou-se a existência de alunos que não tinham a noção de perímetro (16%) e outros que não o souberam medir. O facto da medida dos quatro quadrados que os alunos tinham de juntar ser diferente do quadriculado apresentado foi gerador de dificuldades. Sem dificuldade na resolução registaram-se apenas cerca de 35% de respostas. Mais de um quarto dos alunos (28%) não conseguiu resolver. Os restantes alunos (37%) necessitaram de interacção com o investigador para conseguirem resolver este item.

Análise dos resultados dos questionários

Nesta secção, passamos à apresentação dos resultados da aplicação dos questionários com a exposição das grelhas que serviram para fazer a análise de conteúdo. São ilustradas as frequências e percentagens obtidas e é apresentado um comentário dos resultados obtidos.

Pretendemos com este questionário ficar a saber qual era a opinião dos alunos envolvidos sobre a realização deste tipo de provas, que até à data nunca tinham sido realizadas em Portugal, e como se tinham sentido ao realizá-las.

A primeira questão que se colocou foi a seguinte:

1. Que provas realizaste no final do ano passado, em Maio ?

As várias respostas deram origem a esta tabela que serviu para categorizar as respostas dadas pelos alunos.

- Tabela 35 – Grelha de análise de conteúdo da questão 1.

Falou nas provas aferidas	Referiu só uma das provas	Referiu provas no global	Pensou que era para passar de ano	Identificou provas que não eram de aferição	Não soube
"As provas aferidas"	"Provas de Matemática ou Provas de Português"	"Provas do 4° ano"	"Provas para eu passar o ano lectivo"	"Provas de Estudo do Meio"	"Não me lembro"

Da aplicação da grelha anterior resultou a tabela 36 com as frequências e as percentagens obtidas.

- Tabela 36 – Frequências e percentagens correspondentes à questão 1.

Categorias	Frequência	Percentagem
Falou nas provas de aferição	74	62,7
Referiu provas no global	22	18,6
Não soube	10	8,5
Pensou que era para passar de ano	5	4,2
Referiu só uma das provas	4	3,4
Identificou provas que não eram de aferição	3	2,5
Total	118	100,0

Na questão: "Que provas realizaste no final do ano passado, em Maio ?" a maioria (62,7%) responderam "as provas de aferição", 18,6% referiram "provas" no global", 8,5% não soube ou não se lembrou e 4,2% pensavam que era para passar de ano. As restantes categorias tiveram percentagens mais baixas, na ordem dos 2 e 3 %.

2. Foram provas de quê ?

As respostas obtidas estão explícitas na tabela que se segue.

- Tabela 37 – Grelha de análise de conteúdo da questão 2.

Língua Portuguesa e Matemática	Língua Portuguesa, Matemática e outra	Não especificou	Referiu só uma	Não soube
"Foram de L. Port. e Matemática"	"Foram provas de L. Port., Estudo do M. e Matemática"	"Provas de avaliação"	"De Matemática"	"Não me lembro"

Segue-se a tabela com as frequências e as percentagens que se obtiveram.

- Tabela 38 – Frequências e percentagens da questão 2.

Categorias	Frequência	Percentagem
Língua Portuguesa e Matemática	85	72,0
Não especificou	11	9,3
Não soube	9	7,6
Foram provas de aferição	6	5,1
Referiu só uma	5	4,2
Língua Portuguesa, Matemática e outra	2	1,7
Total	118	100,0

Quando se lhes perguntou de que eram as provas, a maioria dos alunos (72%) soube dizer correctamente (Língua Portuguesa e Matemática), 9,3% não especificaram que provas eram, referiram "provas de avaliação", 7,6% não souberam ou não se lembraram e 5,1% responderam "foram provas de aferição". Os restantes referiram só uma ou juntaram também o Estudo do Meio.

3. De que te lembras dessas provas ?

Das várias respostas dos alunos resultou a tabela que se segue que serviu para realizar a análise de conteúdo.

- Tabela 39 – Grelha de análise de conteúdo da questão 3.

Grau de dificuldade												
Fácil	Difícil	Difíceis e fáceis	Exigiam rapidez	De tudo ou de algumas coisas	Questões de Matemática	Questões de Língua Portuguesa	Questões de L. P. e de Matemática	Trabalho de preparação	Reacção emotiva	Comunicação Social	Falaram de coisas que nada têm a ver com as provas	De nada
"Que eram fáceis e muito grandes e tinham muitas coisas para fazer e bastante divertidas"	"Lembro-me de alguns problemas em que tive dificuldade ... e também de alguns outros exercícios"	"Lembro-me das perguntas difíceis e fáceis, também das situações problemáticas e de algumas contas"	"Tinham muitas perguntas e tinham que ser feitas rápido porque tinham tempo"	"De tudo" "Lembro-me de algumas coisas"	"Do problema dos passos, dos gatos e do cão, do cubo e das garrafas"	"Da composição e das perguntas relativas ao texto"	De Língua Port., uma composição, lemos um texto e interpretámo-lo e de Matemática resolvemos problemas"	"Eu lembro dessas provas que antes de as realizarmos tivemos que fazer muitas fichas"	"De que estava nervoso"	"De aparecer as provas na televisão".	"As contas de dividir e a tabuada e do Estudo do Meio foi do corpo humano"	"Não me lembro de nada"

De seguida apresentamos as frequências e as percentagens relativas à terceira questão.

- Tabela 40 – Frequências e percentagens da questão 3.

Categorias	**Frequência**	**Percentagem**
Questões de Matemática	28	23,7
Questões de L. Portuguesa e de Matemática	22	18,6
De nada	22	18,6
De tudo ou de algumas coisas	17	14,4
Falaram de coisas que nada têm a ver com a prova	8	6,8
Grau de dificuldade - Fácil	7	5,9
Questões de Língua Portuguesa	7	5,9
Reacção emotiva	2	1,7
Grau de dificuldade - Difícil	1	0,8
Grau de dificuldade – Difíceis e fáceis	1	0,8
Exigiam rapidez	1	0,8
Trabalho de preparação	1	0,8
Comunicação Social	1	0,8
Total	118	100,0

Na terceira questão, perto de um quarto dos alunos referiram "questões de Matemática", 18,6% lembravam-se de "questões de Língua Portuguesa e de Matemática", 18,6% não se lembrava de nada e 14,4% lembravam-se de tudo. Outros 6,8% falaram de coisas que nada tinham a ver com a prova, 5,9% lembravam-se que tinha sido fácil e outros 5,9% referiram "questões de Língua Portuguesa". As restantes categorias tiveram percentagens pouco relevantes.

4. O que achaste de ter sido outra professora a dar-te as provas ?

As respostas dadas foram diversificadas como se pode constatar na grelha a seguir.

- Tabela 41 - Grelha de análise de conteúdo da questão 4.

Julgamento				Reacção afectiva							
Achou bem		Achou mal		Gostou / foi agradável / divertido	Não gostou / Ficou assustada	Achou estranho e diferente	Indiferente / Não achou nada / Achou normal	Tristeza	A própria professora deu a prova	A professora explicou	Não soube
Porque a própria professora ajudava	Porque seria uma aula normal	Porque não era simpático com a outra professor a	Porque não podia fazer perguntas								
"Porque se fosse a minha professora, se visse a gente aflitos ajudava-nos e se fosse outra não nos ajudava"	"Achei correcto porque se fosse a nossa professora penso que para nós seria uma aula normal e assim não"	"Que não era simpático com a nossa professor a"	"Achei muito chato porque não podia fazer perguntas"	"Gostei muito desta professora a dar a prova e não estranhei nada, ela foi boa"	"Eu acho que não devia ter sido outra professora, achei mal"	"Achei um bocadinho estranho e um pouco complicado, fiquei um bocado assustada"	"Foi indiferente, não achei nada de especial"	"Achei triste porque já estava habituada à outra professora"	"Como estava com a mesma professora, foi natural"	"Ela era boa explicava tudo"	"Não sei"

Passamos a apresentar na tabela seguinte as frequências e as percentagens da quarta questão.

- Tabela 42 - Frequências e percentagens da questão 4.

Categorias	**Frequência**	**Percentagem**
Reacção afectiva – Gostou, foi agradável, divertido	29	24,6
Julgamento – Achou bem	28	23,7
Reacção afectiva – Indiferente, não achou nada, achou normal	25	21,2
Não soube	12	10,2
Julgamento – Achou bem porque senão seria uma aula normal	7	5,9
Reacção afectiva – Achou estranho, diferente	5	4,2
Julgamento – Achou mal	3	2,5
Reacção afectiva – Não gostou, ficou assustada	3	2,5
A própria professora deu a prova	3	2,5
Julgamento – Achou mal porque não podia fazer perguntas	1	0,8
Reacção afectiva – Tristeza	1	0,8
A professora explicou	1	0,8
Total	118	100.0

Quando se lhes perguntou: "O que achaste de ter sido outra professora a dar-te a prova ?" perto de um quarto de respostas referiram que gostaram e foi agradável; 23,7% acharam bem e referiram várias razões, 21,2% não acharam nada, foi normal, 10,2% não soube, 5,9% acharam bem porque senão seria uma aula normal e 4,2% acharam estranho e diferente. As outras categorias tiveram percentagens pouco relevantes.

5. Que sentiste ao realizar a prova de Matemática ?

As respostas dos alunos foram variadas, resultando a tabela seguinte.

- Tabela 43 - Grelha de análise de conteúdo da questão 5.

Grau de dificuldade		Sentimentos					
Fácil	Difícil	Nervoso, medo, aflição, com curiosidade desespero	Calmo, seguro, tranquilo	Excitação, alegria, prazer	Variação de sentimentos / satisfação, aflição e medo	Evocou Deus	Nada
"Excitação porque eram fáceis e revi várias coisas"	"Senti que não ia passar de classe"	"Um bocado de medo e um bocado nervosa porque era a 1ª vez que fazia uma prova e não sabia se iam ser fáceis ou difíceis"	"Eu senti-me muito seguro calmo e tranquilo"	"Emoção e alegria de lembrar tudo de novo"	"Eu senti nervosismo e também ansiedade a alegria"	"Eu senti que se Deus quisesse ia correr tudo bem"	"Não senti nada"

À semelhança das outras questões, seguem-se, na tabela 44, as frequências e as percentagens obtidas na quinta questão.

- Tabela 44 – Frequências e percentagens da questão 5.

Categorias	**Frequências**	**Percentagem**
Sentimentos – Nervoso, medo, aflição, desespero	49	41,5
Nada	18	15,3
Sentimentos – Excitação, alegria, prazer	17	14,4
Grau de dificuldade - Fácil	12	10,2
Grau de dificuldade - Difícil	6	5,1
Sentimentos – Calmo, seguro, tranquilo	6	5,1
Variação de sentimentos – satisfação, aflição e medo	5	4,2
Sentimentos – Nervoso com curiosidade	4	3,4
Evocou Deus ou um alívio muito grande	1	0,8
Total	118	100,0

Na quinta questão registaram-se as seguintes respostas: uma percentagem apreciável (41,5%) dos alunos referiram que sentiram "medo, nervos e desespero"; 15,3% disseram que não sentiram nada; 14,4% sentiram "emoção, alegria, excitação e prazer"; 10,2% sentiram que foi fácil; apenas 5,1% acharam que foi difícil e o mesmo número de alunos referiu que estava "calmo, seguro e tranquilo"; 7,6% dos alunos referiram que tiveram sentimentos variados "satisfação, aflição e medo" e "nervoso mas com curiosidade".

6. Foi fácil ou difícil?

Segue-se a tabela que mostra os tipos de respostas dadas.

- Tabela 45 – Grelha de análise de conteúdo da questão 6.

Foi fácil	Foi razoável (mais ou menos)	Teve ajuda da professora	Foram fáceis e difíceis	Difícil	Muito difícil.	Não respondeu
"Foi fácil pois tudo o que lá saiu já tínhamos trabalhado na sala"	"Foi mais ou menos porque havia lá umas coisas que eu já não me lembrava muito bem"	"Foi fácil porque a professora dizia-nos o que nós não sabíamos."	Foram fáceis e difíceis, foi um pouco das duas coisas. Havia lá coisas que eu já não me lembrava.	"Achei um bocado difícil, mas gostei"	"Foi muito difícil"	

Na tabela seguinte temos as frequências e as percentagens das respostas dadas pelos alunos à questão número seis do questionário.

- Tabela 46 – Frequências e percentagens correspondentes à questão 6.

Categorias	Frequência	Percentagem
Foi fácil	57	48,3
Difícil	22	18,6
Foram fáceis e difíceis	17	14,4
Foi razoável (mais ou menos)	13	11,0
Não respondeu	6	5,1
Muito difícil	2	1,7
Teve ajuda da professora	1	0,8
Total	118	100,0

Nesta questão, grande parte dos alunos (48,3%) achou fácil; 18,6% achou difícil; 14,4% disse que foram "fáceis e difíceis"; 11% achou razoável; 5,1% não respondeu; 1,7% referiram que acharam muito difícil e um aluno referiu que foi fácil porque "a professora dizia-nos o que nós não sabíamos".

Na sétima, oitava e nona questões, como eram questões mais específicas da prova de Matemática, registaram-se um número maior de categorias.

7. Na prova de Matemática que dificuldades sentiste ?

A tabela seguinte mostra-nos as dificuldades que os alunos da amostra sentiram quando realizaram a prova de Matemática.

- Tabela 47 – Grelha de análise de conteúdo da questão 7.

No item 1	No item 2	No item 3	No item 5	No item 7	No item 8	No item 9	No item 10	No item 12	No item 14	Não teve nenhuma dificuldade	Teve algumas dificuldades	Teve muitas dificuldades	Nos problemas e nalguns exercícios	Não responde ou não sentiu nada
"Na 1ª pergunta"	"Nas linhas paralelas e perpendiculares"	"Foi as garrafas e os gatos"	"Eu na prova de Mat. só senti dificuldades no problema das saias e blusas"	"Na pergunta 7"	"Senti um bocado de dificuldades No problema. que era dos passos, não sabia como o havia de fazer"	"Senti dif. ao realizar o problema dos copos, pois estava a confundir-me"	"Dificuldades no problema dos instrumentos de música"	"Na prova de Matemática só tive dificuldades na 12º pergunta"	"Senti muita dificuldades na construção das figuras"	"Na prova de Matemática não senti muita dificuldade apenas tinha de aprender a pensar"	"Senti algumas dificuldades porque não me lembrava da matéria"	"Na prova de Matemática. senti muitas dificuldades"	"As dificuldades que eu senti foi nos problemas e nalguns exercícios"	"Não senti nada"

Seguidamente mostramos na tabela que se segue as frequências e as percentagens obtidas na sétima questão.

- Tabela 48 – Frequências e percentagens correspondentes à questão 7.

Categorias	**Frequência**	**Percentagem**
Nos problemas e nalguns exercícios	31	26,3
Não teve nenhuma dificuldade	28	23,7
Teve algumas dificuldades	27	22,9
Não respondeu ou não sentiu nada	10	8,5
No item 14	5	4,2
Teve muitas dificuldades	4	3,4
No item 9	3	2,5
No item 8	2	1,7
No item 10	2	1,7
No item 1	1	0,8
No item 2	1	0,8
No item 3	1	0,8
No item 5	1	0,8
No item 7	1	0,8
No item 12	1	0,8
Total	118	100,0

Depois de analisarmos as respostas dadas nesta questão, verificámos que um quarto dos alunos referiu de uma forma geral, "nos problemas e nalguns exercícios", 23,7% dos alunos disse que não tiveram dificuldades, 22,9% teve algumas dificuldades; 8,5% não respondeu ou não sentiu nada e 3,4% teve muitas dificuldades. Quando referiram exercícios específicos, apontaram o último, o da construção das figuras com 20 cm de perímetro, (4,2%), seguindo-lhe o problema que envolvia copos (item 9) (2,5%). Os outros itens tiveram percentagens pouco relevantes.

8. Recorda-te de um exercício que tenha sido fácil

Como se pode constatar na tabela 49 as respostas revelaram grande variedade.

- Tabela 49- Grelha da análise de conteúdo da questão 8.

Item 1	Item 2	Item 3	Item 5	Item 7	Item 8	Item 10	Item 11	Item 12	Item 14	Todos	Referiu o das garrafas e das saias	Referiu o dos passos e o do número	Referiu exercícios que não estão na prova	Não me lembro / Não respondeu à questão
"Foi o primeiro. O do número com uma cruzinha"	"Traçar as linhas perpendiculares e paralelas"	"O exercício das garrafas"	"Um problema, o das saias"	"Achar a área das figuras"	"O dos passos do pai"	"No instrumento das caricas e pregos	"A descrição do cubo"	"Foi o da balança, do cão e do gato"	"O mais fácil foi o que tínhamos de descobrir os quadrados"	"Todos"	"O das garrafas e das saias"	"Dos passos e do número"	"O jogo do pirata" "Quantos meses têm o ano"	"Não me recordo de nada"

A tabela seguinte dá-nos a conhecer os resultados em termos de frequências e de percentagens da oitava questão.

- Tabela 50 – Frequências e percentagens correspondentes à questão 8.

Categorias	Frequência	Percentagem
Não se lembrou ou não respondeu à questão	42	35,6
Referiu exercícios que não estão na prova	13	11,0
O item 3	9	7,6
O item 5	9	7,6
O item 8	8	6,8
O item 12	8	6,8
O item 1	5	4,2
O exercício nº 12	4	3,4
O item 7	3	2,5
O item 10	3	2,5
O item 11	3	2,5
O item 14	3	2,5
O exercício nº 11	3	1,7
O item 1	1	0,8
Todos	1	0,8
Referiu o das garrafas e o das saias	1	0,8
Referiu o dos passos e o do número	1	0,8
O exercício nº 13 e o nº 11	1	0,8
Total	118	100,0

Quando foi pedido para se recordarem de um exercício que tivesse sido fácil, 35,6% dos alunos não se lembrava ou não respondeu; 11% referiu exercícios que não estavam na prova; 7,6% dos alunos indicaram o item 3 e o mesmo número o problema das saias e das blusas (item 5); 6,8% indicaram o problema dos passos do pai (item 8) e outros 6,8% acharam o problema da balança, do cão e dos gatos; 4,2% referiram o item 1. As restantes categorias mostram percentagens pouco relevantes (entre os 3,4% e o 0,8%).

9. E agora vê se te recordas, ainda, de um problema onde tenhas tido muita dificuldade ou não o tenhas resolvido.

A tabela seguinte mostra a grelha que se construiu para realizar a análise de conteúdo da nona questão.

- Tabela 51 – Grelha de análise de conteúdo da questão 9.

Item 2	Item 3	Item 5	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10	Item 12	Item 14	Referiu 2 itens	Referiu 3 itens	Não teve dificuldades	Teve dificuldades	Não se lembrava ou não responde
"No das ruas"	"No das garrafas"	"O das saias e blusas"	"Foi o exercício 7"	"No dos passos"	"Onde senti dificuldades foi no dos copos"	"No problema dos instrumentos musicais"	"Foi no problema dos gatos porque não prestei atenção às figuras nem à pergunta"	"No exercício final, dos quadradinhos porque não o percebi bem"	"A dos gatos e dos 4 quadrados"	"As perguntas 2, 5, 10"	"Não tive dificuldades e resolvi todos os exercícios"	"Tive dificuldades num problema"	"Não me recordo de nadinha porque já passou muito tempo desde que fiz as provas"

Na última tabela apresentamos as frequências e as percentagens das respostas dadas pelos alunos.

• Tabela 52 – Frequências e percentagens correspondentes à questão 9.

Categorias	**Frequência**	**Percentagem**
Não se lembrava ou não respondeu	40	33,9
O item 14	15	12,7
O item 8	11	9,3
Não teve dificuldade	11	9,3
O item 2	9	7,6
O item 10	8	6,8
O item 5	5	4,2
O item 9	5	4,2
O item 12	4	3,4
O item 7	3	2,5
O item 3	2	1,7
Referiu 2 itens	2	1,7
Teve dificuldade	2	1,7
Referiu 3 itens	1	0,8
Total	118	100,0

Um terço dos alunos respondeu que não se lembrava ou não respondeu; 12,7% assinalou o último item (item 14); 9,3% assinalou o problema dos passos (item 8); outros 9,3% não tiveram dificuldades; 7,6% referiram o segundo exercício (item 2); 6,8% dos alunos disseram que tiveram dificuldade no problema dos instrumentos musicais (item 10); 4,2% apontou o problema das saias e blusas (item 5) e o mesmo número de alunos indicou o problema dos copos (item 9). As outras categorias foram pouco expressivas.

Na última questão era pedido aos alunos para darem a sua opinião sobre a prova aferida de Matemática. As respostas foram um pouco repetidas porque já tinham sido referenciadas nas questões anteriores, voltaram a referir aspectos de facilidade e de dificuldade. Mas aqui, desenvolveram mais as ideias que já tinham expressado: “Acho que foi bom para nós e para as professoras saberem no que tínhamos dificuldade “; “Acho que a prova estava bem feita e obriga-nos a pensar”; “A prova fazia puxar pela cabeça”; “Acho bem termos feito esta prova antes de irmos para o ciclo, porque era para nós nos treinarmos”; “... obriga-nos a pensar “ e também com o papel do professor “ ... para as professoras saberem no que tínhamos dificuldade ...”.

Podemos afirmar que, em resposta aos questionários apresentados, a maioria dos alunos soube dizer que provas tinham realizado e de que áreas foram.

Quando se lhes perguntou de que se lembravam dessas provas apenas ¼ dos alunos não se lembrava de nada e referiram coisas que nada tinham a ver com a prova. A maioria dos alunos lembravam-se de questões, essencialmente, de Matemática.

Grande parte dos alunos acharam bem e gostaram de terem tido outra professora a dar-lhes a prova. Nestas questões as respostas foram mais repartidas pelas diferentes categorias.

Relativamente aquilo que sentiram na realização da prova de Matemática foram maioritários os que referiram nervos, medo e aflição (cerca de 40%) mas muitos referiram excitação, alegria, prazer, segurança e tranquilidade (cerca de 20%).

Perto de metade dos alunos acharam a prova fácil e os itens que mais referiram especificamente, como fáceis, foram o 3 e o 5. As dificuldades, de uma maneira geral, foram nos problemas e nalguns exercícios, quando referenciaram os itens referiram o 14, o 8 e o 9 (ver anexo).

Quando lhes foi pedido que se recordassem de exercícios onde tivessem tido dificuldade ou facilidade (questões 7 e 8) grande parte dos alunos não se lembrou.

Na última questão, tinham liberdade para dar a sua opinião sobre as provas de aferição. Houve respostas interessantes que tinham a ver com o papel que eles deviam desempenhar. Muitas respostas também referiam aspectos de facilidade e de dificuldade.

Podemos concluir que a maior parte dos alunos soube dizer o que tinham feito, e como se sentiram ao realizar a prova.

CAPÍTULO 4

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nesta parte da tese far-se-á o confronto entre os resultados obtidos no presente trabalho e os encontrados nos estudos de outros autores, citados no enquadramento teórico. Devemos salientar que as diferenças existentes entre os objectivos e as metodologias irão tornar difícil uma comparação mais próxima dos resultados.

Voltamos a lembrar que neste estudo sobre as dificuldades sentidas pelos alunos na resolução da prova de aferição de Matemática do 4º ano em 2000, os resultados obtidos têm a ver com os critérios de avaliação estabelecidos pelo GAVE e com a análise de conteúdo realizada a 8 itens e aos questionários.

Pretendemos dar a conhecer os resultados obtidos revelando as dificuldades que os alunos sentiram ao realizar os 14 itens propostos na prova de aferição de uma forma quantitativa e qualitativa porque era nosso objectivo compreender e analisar essas dificuldades.

Nesta mesma linha de ideias, Brissiaud (1994) procurou com os seus trabalhos explicitar uma forma de lidar com as dificuldades dos alunos. O seu ponto de partida foi o de que o professor somente tem uma acção a médio ou longo prazo no desenvolvimento do aluno. Pelo que a sua acção, face a um assunto no qual o aluno manifeste dificuldades que possam relacionar-se com o seu desenvolvimento – como aqueles em que uma boa percentagem de crianças ou adolescentes têm desempenhos fracos – deverá ser, fundamentalmente, a de tentar perceber a raiz do obstáculo que impede o aluno de avançar e tentar criar as condições que, levando o aluno a uma contradição, lhe permitam o avanço no seu desenvolvimento por "propulsão própria" (como ele próprio chamou).

Para Bickhard (1986) o erro é um acontecimento normal e, mesmo, inevitável no processo de aprendizagem.

Booker (1988), também, afirma que os alunos não erram deliberadamente ou estão convencidos que aquilo que estão a fazer é correcto, ou não sabem de todo o que fazer. Assim, os seus erros são sempre reveladores de uma dificuldade, especificamente ligada ao conteúdo matemático ou ao processo de aprendizagem.

Começaremos por comentar os aspectos que se revelaram de mais fácil resolução passando depois para os que revelaram mais dificuldades.

Verificámos que os alunos da amostra sabem resolver situações problemáticas que envolvem a adição e a subtracção e têm melhores resultados quando podem ir buscar a informação ao texto do exercício; a maioria resolveu os exercícios utilizando a contagem ou o cálculo mental. Neste tipo de situações não se registaram dificuldades. Mas quando o exercício envolvia mais do que um raciocínio e duas operações a percentagem das respostas incorrectas subiu.

Gelman (1978) realizou alguns estudos e chegou à conclusão que se as crianças fracassam é porque elas estão submersas pelas exigências múltiplas que requerem a tarefa que elas precisam fazer.

Verificámos também que na escrita de números a partir de condições dadas, os alunos apresentam bons resultados, mas já mostram mais dificuldades na identificação de um número em que os zeros ocupam lugares intermédios.

Este resultado não é surpreendente. Já Bonotto (1993) afirmava que os alunos possuem a concepção desde pequenos que "o zero não vale nada" o que muitas vezes causa alguns problemas, nomeadamente na leitura de um número.

Nos exercícios que se seguem já se registaram dificuldades com maior expressão que convém registarmos.

- Na situação que envolvia a combinação de duas peças de roupa, os alunos resolveram por desenho escrevendo os nomes e as cores das peças, e através do cálculo (2x3=6). Houve ainda quem tivesse juntado as peças sem processo sistemático, baralhando-os um pouco quando contavam as combinações feitas. Também se verificou que alguns alunos foram fazendo combinações até esgotarem as peças de roupa ficando a resposta aquém do resultado (3 pares/4 pares). Não perceberam que tinham de repetir as peças de roupa.

- Na descoberta de quantos instrumentos se poderiam fazer a partir de uma determinada quantidade de material os procedimentos foram variados. A maioria utilizou o desenho, mas também houve quem apresentasse desenho e operações e até chegasse a resolver através de uma divisão. Notou-se que havia alunos que não sabiam pensar através de desenho. Alguns deles erraram porque não ligaram ao material que era preciso ter em conta para construir cada instrumento (por ex: um aluno colocou o material todo repartido por três supostos instrumentos, não utilizando qualquer processo sistemático).

- No cálculo do peso de um animal, que envolvia mais do que uma etapa de raciocínio, grande parte dos alunos utilizaram duas operações, seguindo-se a utilização do cálculo mental e houve também quem resolvesse com uma operação e cálculo mental. Houve alunos que não sabiam ler o peso nas balanças que estavam no enunciado e outros erraram os cálculos por má colocação das unidades.

Gelman (1978) interpreta o facto de ser difícil para os alunos o equacionamento de várias etapas de raciocínio, como resultante de uma sobrecarga mental que decorre das dificuldades de gestão e de controle da execução da tarefa. O que aconteceu com estas situações problemáticas acima descritas, leva-nos a concordar com este autor.

No caso das situações problemáticas de medição, quer através da relação entre duas contagens de passos, quer utilizando as medidas de comprimento e as medidas de capacidade, que envolviam mais do que uma operação, registaram-se sensivelmente mais dificuldades do que nas áreas referidas anteriormente e os procedimentos utilizados foram variados como se constatou na análise de conteúdo.

- Na medição de um comprimento com passos utilizando uma relação entre duas medidas a operação mais utilizada foi a multiplicação (2x18), seguindo-se a adição (18+18). Alguns alunos mostraram dificuldade em perceber, através do desenho representado no enunciado, que os passos do pai eram o dobro dos do filho. Por outro lado, uma vez esta relação detectada, muitos utilizaram o raciocínio "passo do filho é metade do passo do pai", logo divide-se por dois.

Dado que esta situação ocorreu várias vezes, somos levados a pensar que os alunos fazem uma associação entre ser metade (dos passos) e a divisão por dois.

Neste exercício os alunos tinham que ter a capacidade de visualização espacial bem desenvolvida porque era pela observação do desenho apresentado que eles tinham de chegar a uma conclusão para o conseguirem realizar com sucesso.

Temos de concordar com as ideias defendidas por Fennema e Behr (1980) sobre a importância das capacidades espaciais na Matemática, nos primeiros anos de escolaridade, tendo em conta a ênfase dada aos materiais manipulativos e às representações do tipo icónico.

- Quando um enunciado era mais complexo, e os alunos tinham de inferir a capacidade de um determinado número de copos que não era dado directamente no enunciado, notou-se que tiveram algumas dificuldades, nomeadamente em:
    - transformar um número inteiro num número decimal para reduzir/transformar unidades de medida (Por exemplo: 5l = 0,5dal);
    - colocar correctamente os termos no caso da adição e da subtracção que envolviam números inteiros e números decimais (Por exemplo: 3 + 2,6 + 0,005 =).

De acordo com Pérez (1988) não é suficiente no processo ensino-aprendizagem que os professores definam somente os números decimais e dêem a conhecer os instrumentos de medida. É preciso que cada aluno ou grupo de alunos os utilize. É importante que os alunos trabalhem sobre o conceito de número decimal de forma activa, por exemplo, construindo escalas, para que posteriormente compreendam a utilidade deste sistema de numeração, e que saibam que um número decimal se pode escrever de muitas formas, não deixando contudo de se tratar de um mesmo número.

Constatamos que os alunos fazem essencialmente comparações entre este tipo de números e os naturais, que já dominam, fazendo a extensão das regras dos naturais aos decimais (Bolon, 1996; Bonotto, 1993; Pérez, 1988).

Estas dificuldades podem ficar a dever-se não só aos obstáculos que são devidos aos alunos terem enraizados em si, os princípios dos números naturais (IN) mas, também, à multiplicidade de significados que estes podem tomar, como os de: medida, razão entre duas amplitudes; quociente de números; operador ou aplicação linear.

Bonotto (1993) chama também a atenção para que, os jovens por vezes assumem um decimal como se de um inteiro se tratasse, ignorando simplesmente a vírgula e colocam os termos das operações segundo as regras dos números naturais, como aconteceu com os alunos da amostra.

Finalmente foi na área Espaço e Forma, que se registaram neste estudo as maiores dificuldades.

- No item que pedia para representar linhas paralelas e oblíquas, revelaram mais dificuldade no desenho da oblíqua que estava sujeita a várias condições.

- No item que pedia para desenharem figuras com um determinado perímetro registou-se também um número significativo de respostas incorrectas. Muitos utilizaram o quadrado indicado no quadriculado (1cmx1cm) e não a unidade apresentada (2cmx2cm). Outros ainda revelaram dificuldades na medição do perímetro confundindo-o com a área, não sabendo contar correctamente os quadrados. Constatou-se que, no final do 1° Ciclo do Ensino Básico, há alunos que não têm a noção de perímetro e outros não o sabem medir.

Nestas duas situações os alunos tinham que desenhar o que era pedido sobre um fundo quadriculado o que pode ter causado alguma perturbação aos alunos, porque uma das questões que já se conhece que é essencial é a do "fundo", ou seja a região sobre a qual a figura está desenhada.

Os psicólogos da gestalt mostraram que a oposição figura/fundo é importante. A percepção é condicionada por este tipo de factores.

Kuchemann (1981) mostrou que a existência ou não dum fundo quadriculado em questões simples de geometria tinha um efeito sobre o sucesso nessas tarefas (a percentagem de sucesso descia de 86% - fundo quadriculado- para 61% - fundo não quadriculado).

Mas a existência dum tal fundo pode também ter um efeito perturbador, como mostrou o estudo de Grenier (1985), pois este pode induzir a consideração de pontos particulares da figura, e por vezes, procedimentos de contagem sobre as linhas materializadas do quadriculado, verticais e horizontais, procedimentos errados se o eixo de simetria é oblíquo na folha. Também neste estudo, nos dois exercícios que apresentavam um fundo quadriculado se verificou que alguns alunos tiveram dificuldade em desenhar o que era pedido.

- Quando lhes foi dada uma figura para identificarem os quadrados existentes nessa figura mostraram também dificuldades por não estarem representados de forma tradicional.

Segundo Mesquita (1994) para resolver um problema em geometria é preciso, na maior parte das vezes, considerar vários tipos de modificações numa representação. Podemos considerar modificações configurais segundo a natureza da relação parte-todo. O que deveria ter sido feito pelos alunos quando lhes foi proposto o exercício acima descrito.

- Onde os alunos da amostra revelaram mais dificuldade foi no item onde era pedida a descrição do cubo porque os alunos não souberam "olhar de forma matematicamente correcta", fazendo a maioria, alusão só às faces, às arestas e/ou aos vértices. A maior parte dos alunos da amostra têm a noção das partes do cubo mas não o conseguem definir correctamente.

Nos estudos sobre este assunto, foram encontradas também muitas dificuldades, tanto na transformação de objectos a 3D para a sua representação a 2D, como na operação inversa, independentemente de se ter trabalhado com crianças, adolescentes ou professores do ensino básico (Hershkowitz, 1990 cit. por Gordo, 1993). Como aconteceu nesta investigação quer com os alunos da amostra quer nos resultados a nível nacional

Brousseau (1984) através dos seus estudos nesta área concluiu mesmo que os alunos não desenvolvem uma linguagem para descrever as características das figuras, nem têm aprendido a seleccionar um conjunto de características (necessárias e suficientes) para a sua reprodução.

Em todos os itens se verificou que uma parte significativa dos alunos necessitaram de interacção. Na maior parte desses itens a interacção com o investigador ajudou os alunos a explicitarem as suas ideias mas alguns alunos não conseguiram responder correctamente.

Verificou-se que uma boa percentagem dos alunos não conseguiu transformar correctamente as unidades de medidas.

Foi também interessante constatar que uma parte dos alunos do estudo "não conseguiam pensar através do desenho". Nas situações de reforço quando a entrevistadora sugeria que podia utilizar o desenho a maior parte desses alunos simplesmente se recusava e dizia que não era capaz de fazer.

Vários investigadores mostraram que passar da representação verbal para a representação da situação evocada é muito difícil. Para além das regras implícitas do contrato didáctico que pode levar as crianças a resolver problemas que não entendem, frequentemente as crianças encaram a resolução de problemas como adivinhas, apresentando muitas dificuldades em relacionar a informação do enunciado do problema com os seus conhecimentos quotidianos. Esta fase da construção/integração é a que parece levantar mais dificuldades (Barrouillet & Fayol, 1995; De Corte & Verschaffel, 1985; Hegarty, Mayer & Green, 1992; Reusser & Stebler, 1997; Vergnaud, 1994; cit. por Matta, 2001).

De acordo com Vergnaud (1986), para que os alunos tenham a oportunidade de encontrar todos os constituintes de um conceito, é necessário ter em conta as várias classes de problemas. Por exemplo, um problema de adição ou de subtracção pode implicar uma grande variedade de conceitos, tais como conceitos de medida, de transformação, de comparação, de diferença, de inversão, de operação binária, etc. Daí a necessidade de se utilizar como objectos de estudo, campos conceptuais bastante largos, ou seja, um conjunto de situações que impliquem vários conceitos, vários procedimentos e várias representações simbólicas.

CONCLUSÕES

Apresentamos em seguida as principais conclusões que pensamos poder retirar do presente estudo, assim como algumas sugestões educacionais sobre as práticas de ensino e aprendizagem para que as dificuldades dos alunos sejam encaradas como um processo normal e fonte do seu próprio desenvolvimento. Esta abordagem é, para nós, fundamental para que, em situação de sala de aula, se possa actuar de forma a lidar com as dificuldades e os erros que se conhecem e se antecipam, favorecendo uma melhor aprendizagem do aluno.

Procurámos com este estudo identificar, analisar e comparar as estratégias e os procedimentos utilizados pelos alunos a partir dos protocolos das entrevistas, de forma a darmos resposta às questões que estão na base deste estudo.

A metodologia utilizada permitiu identificar e compreender as dificuldades, as estratégias e os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução dos vários itens. Através das entrevistas foi permitido aos alunos reflectir sobre os seus procedimentos e respectivas resoluções, levando alguns deles a modificarem o seu processo de raciocínio e a chegarem à resposta correcta depois de estabelecida a interacção.

Do contraste dos resultados nacionais com os desempenhos obtidos na nossa amostra relativamente às tarefas apresentadas podemos retirar algumas conclusões.

De uma maneira geral, identificaram-se mais respostas correctas entre os alunos da amostra em estudo do que os verificados a nível nacional. Este resultado não é surpreendente dado que o nosso estudo incluiu a existência de interacção entre o investigador e o aluno. Dentro dos alunos da amostra foram os do meio urbano que atingiram melhores resultados. Os do meio rural revelaram mais dificuldades na realização dos exercícios propostos.

Analisando agora a nossa investigação referiremos que os aspectos matemáticos que revelaram uma maior facilidade para os alunos foram as situações problemáticas rotineiras que envolviam a adição e a subtracção e a escrita de números a partir de características dadas. Ou seja, os alunos da amostra mostraram que relativamente a conhecimentos de conceitos e procedimentos simples na área Números e Cálculo (com números inteiros) tinham uma boa preparação.

As situações em que as dificuldades mais se fizeram sentir foram na área Espaço e Forma mais propriamente quando lhes foi pedido para: i) descrever um sólido geométrico – o cubo; ii) desenhar figuras num quadriculado com um determinado perímetro; iii) utilizar a noção de perímetro; ou porque não a possuíam ou porque tinham dificuldades na sua operacionalização; iv) resolver uma situação que não tinha a informação toda (bem explícita) no enunciado. Ou seja, os alunos da amostra revelaram que têm maior dificuldade quando as tarefas propostas incidem nas capacidades de raciocínio, comunicação e resolução de problemas, não só nesta área mas também nas outras áreas do saber matemático.

Nas restantes áreas as dificuldades foram inferiores, concretamente, as dificuldades residiram em: i) identificar números com zeros em posições intermédias; ii) converter unidades de medida; iii) realizar operações com números decimais: os alunos não respeitavam as regras da adição com decimais, ordenavam as parcelas como se de inteiros se tratassem; iv) utilizar processos sistemáticos na contagem de possibilidades em exercícios que envolviam a combinação de vários objectos segundo uma regra enunciada.

De uma forma geral, quando as tarefas em causa requeriam mais do que uma operação, registaram-se mais dificuldades, independentemente dos conteúdos em causa: muitas vezes resolviam a primeira parte da tarefa proposta não conseguindo terminar o resto do raciocínio para concluírem com sucesso as tarefas propostas.

As estratégias de resolução a que os alunos mais recorreram foram as tradicionais, ou seja, recorriam, em primeiro lugar, ao algoritmo e se não conseguiam, partiam então para outras estratégias que muitas vezes eram sugeridas pela investigadora (não queres tentar de outra maneira ?). Mas houve também casos de estratégias bem pertinentes e imaginativas, quer através da utilização do desenho, quer através de raciocínios criativos.

Dos questionários efectuados aos alunos é igualmente pertinente retirarmos algumas ilações. A maior parte dos alunos soube dizer que provas tinham feito e lembrava-se de algumas questões das provas realizadas, essencialmente, da de Matemática. Souberam dizer como se sentiram durante a sua realização, exprimindo sentimentos (nervosismo, medo, aflição, alegria, segurança, ...) e quais as facilidades e dificuldades sentidas. Os alunos da amostra concordaram maioritariamente com a existência destas provas de aferição.

No final deste estudo pensamos ter contribuído para uma melhor compreensão das dificuldades sentidas e das fragilidades dos alunos nos diferentes itens da prova de aferição de Matemática do 4º ano em 2000.

Do estudo realizado podemos retirar algumas implicações, tanto a nível pedagógico como a nível de investigação.

A Educação Matemática encontra-se perante um grande desafio. É essencial reflectir como poderão ser integradas as diferentes abordagens da disciplina de Matemática e as diversas formas de despertar o interesse dos alunos, contribuindo para o seu desenvolvimento, não só nesta disciplina mas como indivíduos em geral.

Diversificar as práticas educativas através da resolução de situações que permitam abordar as diferentes propriedades de um conceito e as suas relações com outros conceitos, numa perspectiva interdisciplinar, contribui de forma significativa para a construção dos conhecimentos matemáticos. Daí a necessidade de se ter em linha de conta, a epistemologia dos conceitos postulada por Vergnaud (1983), para que seja possível conhecer as concepções que lhe estão associadas no sentido de as alterar, ou de as mobilizar para futuras aprendizagens.

Na programação das actividades o professor deve ter em conta que os conteúdos matemáticos não se adquirem rapidamente, como tentámos mostrar na parte teórica deste estudo através dos inúmeros trabalhos citados. Adquirem-se de uma forma lenta e complexa, requerendo por isso grandes esforços por parte dos alunos. Deve-se, pois, não dar os conteúdos como aprendidos mas sim ir sempre tentando fazer com que eles sejam lembrados na prática do dia a dia.

Torna-se fundamental que os professores façam a exploração das situações de erro que surjam no decorrer da resolução das situações problemáticas, trabalhando as regras das operações aritméticas inseridas em contexto em vez de as trabalhar isoladamente. Deve ser dada uma maior atenção à resolução de problemas não rotineiros, ou seja, desde cedo os alunos devem ser confrontados com problemas cujo enredo é baseado em situações reais.

O aluno tem que fazer a exploração e a partilha do seu pensamento, através da interacção com os colegas e com o professor, levando-o a progredir para o alargamento das propriedades de um mesmo conceito.

É urgente, quanto a nós, que os alunos se habituem a reflectir sobre os procedimentos de acção que empregam ou que deveriam ser empregues para se obter uma solução. Por vezes são necessárias rupturas importantes na progressão dos conhecimentos do aluno; essas rupturas exigem que se destabilize profundamente algumas convicções, explícitas ou implícitas, da criança.

Os alunos têm que deixar de ver a matemática como uma disciplina que tem muitas regras para decorar e aplicar consoante a situação, têm de deixar de aplicar regras impostas que não compreendem e, para isso, é preciso que queiramos – em especial os professores, visto serem os agentes directos de intervenção no domínio do ensino – contribuir, para desenvolver neles um desejo de exploração, proporcionar actividades de investigação, facultar-lhes o prazer pela descoberta, no pressuposto de não aceitarem o que não sabem justificar, em suma é preciso cativar os alunos para o gosto autêntico pelo saber (Brousseau, 1987, citado por Bolon, 1996).

De uma maneira geral, consideramos que para futuras investigações seria interessante realizar trabalhos de caracter experimental e investigativo na área das Grandezas e Medida e na área da Geometria porque são questões importantes para o desenvolvimento dos alunos e áreas que revelaram neste estudo mais dificuldades por parte dos alunos, o que de alguma maneira mostra que é necessário intervir com projectos de investigação bem fundamentados.

REFERÊNCIAS

Augusto, C. (1997). *Dificuldades e erros nos decimais.* (Monografia não publicada). Lisboa: Instituto Superior de Psicologia Aplicada.

Barrody, A. (1987). *Children's Mathematical Thinking.* Nova Iorque: Teachers College Press.

Bednarz & Garnier (1989). L'utilization du conflit socio-cognitif dans une pédagogie contribuant à l'élaboration des processus d'anticipation et décentration. In Berdnarz e Garnier (Dir.) *Construction des Savoirs.* Ottawa : CIRADE, pp. 334-349.

Begle, E. (1971). *Report on a conference on responsabilities for school mathematics in the 70's.* Standford, CA: School Mathematics Group.

Bertin, J. (1985). Graphique (représentation), *Encyclopedia Universalis*, 8, 852-862.

Bickhard, M. H. (1992). Scaffolding and Self-Scaffolding: central aspects of development. In Winegar, L. T.; Vaisiner, J. (Eds). *Children's development withein social context: research and methodology* (pp.33-52). Erlbaum.

Bishop, A. (1980). Spatial abilities and mathematics education – A review. *Educational Studies in Mathematics,11,* pp. 257-269.

Bishop, A. (1983). Space and Geometry. Em R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 175-203). Nova Iorque: Academic Press.

Bishop, A. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11,* pp. 7-16.

Booker, G. (1988). Rôle de l'erreur dans L'apprentissage e enseignement de la Mathématique (pp.42-47). Sherbrooke (Canadá) : Les editions de L'université de Sherbrooke.

Bolon, J. (1996). *Comment les enseignantes tirent – ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques le cas de l'enseignement des decimaux a la charnièrr école – collége.* Tese apresentada com vista à obtenção do grau académico de doutoramento, Universidade René Descartes, Paris: IREM.

Bonotto, C. (1993). Origini concettuali di errori che si riscontrano nel confrontare numeri decimeli e frazioni. *L' insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 16 (1), 9 – 45. Università di Padova.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics througt the analysis of the errors. In: *For the learning of mathematics.* 7 (3), 2-8. FLM. Publishing Association, Montreal, Quebec, Canadá.

Borasi, R. (1990). The invisible hand operating in mathematics instruction: students' conceptions and expectations. *Teaching and learning mathematics in the 1990s.* (pp.175-181). Georgia: Yearbook editor.

Brainerd, C. (1978) *Piaget's Theory of Intelligence*. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall.

Brissioud, R. (1989). *Como as crianças aprendem a calcular*. Lisboa: Instituto Piaget.

Brissiaud, R. (1994). L'acquisition de connaissances numériques. In R. Ghiglione, e, J. F. Richard (Dir.) (1994). *Cours de Psychologie, 3, Champos et Théories*. Paris : Dunod, pp.98-108.

Brow, M.; Fernandes, D.; Matos, J. F.& Ponte, J. P. (1992). *Educação Matemática*. Lisboa: I. I. E.

Brousseau, G. (1984). Quelques conduites determinantes en didactique des mathématiques, IREM, Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1989). Didactique fondamentale. Cours donnée à l'université d'été de didactique des mathématiques et de formation de maîtres. *Actes de l'université d'été*, Orléans 1988, IREM de Bordeaux, pp.10-122.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles epistémologiques et la didactique des mathématiques. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), *Constrution des savoirs obstacles & conflits* (pp. 41 – 63). Ottawa : Cirade.

Brunner, J.S. (1983). *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire.* Paris : Presses Universitaires de France.

Brun, J. (1996). *Didáctica das Matemáticas.* Horizontes Pedagógicos. Lisboa: Instituto Piaget.

Carmo, H e Ferreira, M (1998). *Metodologia da Investigação*. Lisboa: Universidade Aberta.

Carreira, S. (1993). O papel das representações na resolução de problemas de matemática aplicados. Comunicação apresentada no II Seminário da Secção de Educação Matemática da SPCE, Monfortinho.

Castelnuovo, E. (1987). *Didáctica de la matemática moderna.* Série de matemáticas. México: Editorial Trillas.

Cooper, R., Campbell, R. & Blevins, B. (1983). Numerical representation from infancy to middle childhood. What develops?. In D. Rogers & J. Sloboda (Ed.) *The Acquisition of Symbolic Skills*. New York: Plenum Press, pp. 523-533.

Cooper, R. (1984). *Early number development discovering number space with addition and subtraction,* Origin's of Cognitive Scalle, ed. Sophian, C.

Del Grande, J. (1987). Spacial perception and primery geometry. Em M. Lindquist & A. Shulte, (Eds.), *Learning and teaching geometry K-12*, (pp.126-135). Reston: NCTM.

Del Grande, J. (1987). Spacial sense. *Arithmetic Teacher, 37*, 14-20.

Duval, R. (1988). Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 75 – 93.

Edelstein, W. (1992). Development as the Aim of Education – Revisited. In : *Effective and Responsible Teaching*, editado por F. Oser, A. Dick, J. Patry, (pp. 161-172). São Francisco : Jossey- Bass.

Efklides, A. (1991). Aptidões cognitivas e o desempenho na matemática. In L. S. Almeida (Ed.), *Cognição e Aprendizagem Escolar* (pp.147-156). Porto : APPORT.

Fayol, M. (1990). *L'enfant et le nombre: du comptage a la résolution de problémes*. Paris : Delachaux et Niestlé.

Fennema, E. & Behr, M. (1980). Individual differences and learning of mathematics. Em R. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 324-355). Reston: NCTM.

Fernandes, D. (1992). Resolução de Problemas: Investigação, ensino, avaliação e formação de Professores In: M. Brown; D. Fernandes; J. F. Matos; J. P. Ponte (Eds) *Educação Matemática: Temas de Investigação.* (pp.123-171) Lisboa: I.I.E.

Fernandes, D. ; Borralho, A & Amaro, G. (1994). *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular.* Lisboa: I. I. E.

Frenkel, J. (1973). *Géométrie pour l'élève-professeur,* Hermann, Paris.

Fuson, K. (1991). *Relation entre comptage et cardinality chez les enfants de 2 à 8 ans,* Les Chemins du Nombre, Bideau, J. ; Meljac ; Fischer, Presses Universitaires de Lille.

Garnier, Bednarz & Ulanovskaya (1996). *Vygotsky e Piaget: perspectivas social e construtiva – escolas russa e ocidental.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Gelman, R. (1983). Les bébés et le calcul, *La recherche*, nº 14 (149), pp.1382-1389.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, Mass., Harvard University Press.

Ginsburg, H. (1977). *Children's Arithmetic: The Learning Process.* Nova Iorque: Van Nostrand.

Ginsburg, H. & Al. (1983). Protocol Methods in Research on Mathematical Thinking, *The Development of Mathematical Thinking.* Academic Press.

Gilly, M. (1989). A propos de la théorie du conflit sociocognitif et des mécanismes psyco-sociaux des constructions cognitives: perspectives actuelles et módeles explicatifs. In : N. Bednarz. & C. Garnier. (Eds), *Construction des savoirs: Obstacles et conflits,* (pp.162-182).Ottawa: Les Editions Agence d`ARC.

Gilly, M. (1991). Social psychology of cognitive constructions: European perspectives. In M. Carretero; M. Pope & J. Pozo (Eds), *Learning and instruction – European research in an international context.* 3, 99-123. Oxford: Pergamon Press.

Gordo. M. F. (1994). A visualização espacial e a aprendizagem da Matemática: Um estudo no 1° ciclo do Ensino Básico. *Quadrante*, Vol. 3, Nº 1.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1988). A cognitive approach meaningful mathematics instruction. Journal for *Research in Mathematics Education*, 19 (5), pp.371 – 384.

Hoffer, A (1977). *Geometry and visualization.* Palo Alto, Califórnia: Creative Publications.

Kamii, C. (1985). Young Children Reinvent Aritmetic. Nova Iork: Teachers College Press.

Kamii, C. (1986). *A criança e o número*. Campinas: Papirus.

Kamii, C. e Declark, G. (1986).*Reinventando a Aritmética: implicações da teoria de Piaget*. Campinas, SP: Papirus.

Kamii, C. (1994). *Young Children Continue to Reinvent Arithmetic: 3 rd Grade.* Nova Iork: Teachers College Press.

Kilpatrick, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem Solving. In L. L. Hatfield & D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving: Papers from a research workshop.* Columbus, OH: ERIC.

Kuchemann, D. (1981). Reflections and rotations, in K. M. Hart (Ed.) *Children's understanding of Mathematics: 11 – 16*, pp. 137 – 157.

Kulm, G. (1980). The classification of problem-solving research variables. In G. A. Goldin & C. E. McClinton (Eds.), *Task variables in mathematical problem solving*. Columbus, OH: ERIC.

Lambert, P., Steward, A., Mangtelow, K. & Robson, E. (1989). *A cognitive psychology approach to model formulation in mathematical modelling.* In W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. Huntley, G. Kaiser-Messmer & L. Profke (Eds.), Applications and modelling in learning and teaching mathematics. Chichester: Ellis Horwood.

Lappan, G.& Winter, M. J. (1979). Buildings and Plans. *Mathematics Teaching, 87*, pp.16 –19.

Lesh, R. (1990). Computer-Based assessment of higher order understanding and processes in elementary mathematics. In G. Kulm (Ed.) *Assessement of higher order thinking in mathematics*. Washington, DC: AAAS.

Lesh, R., Landau, M. & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes.* Orlando: Academic Press.

Lester, F. (1980). Mathematical problem solving research. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education.* Reston. VA: NCTM.

Lester, F. (1983). Trends and issues in mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes.* Orlando, FL: Academic Press.

Lester, F., Maki, D., LeBlanc, J. F. & Kroll, D. (Eds.). (1982). Content component. Volume II of the final report to the National Science Foundation of the project, *Preparing elementary teachers to teach mathematics: A problem-solving approach.* Bloomington, IN: Mathematics Education Development Center, Indiana University.

Lester, F. (1994). Musings About Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education.* 26 (6), 660-675.

Lvovski, V. (1996). A elaboração de imagens conceituais no decorrer da resolução de problemas de física. In: C. Garnier, N. Bednarz & I. Ulanovskaya (Eds), *Após Vygotsky e Piaget: perspectives social e construtivista – escolas russa e occidental.* (pp.176 –185). Porto Alegre: Artes Médicas.

Matta, I. (2001). *Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem.* Lisboa: Universidade Aberta.

Matos, J. F. (1994). Processos Cognitivos envolvidos na Resolução de Problemas de Aplicação da Matemática, In: D. Fernandes; A. Borralho; G. Amaro (Eds.), *Resolução de Problemas Processos Cognitivos Concepções de Professores e Desenvolvimento Curricular.* Lisboa: I.I.E. (pp.65 – 91).

Mesquita, A. L. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géometrie : Eléments pour une typologie,* Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

Mesquita, A. L. (1994). Reflexões sobre a questão da representação em geometria. Departamento da Educação da F. C. Da U. L.. *Revista da Educação.* Vol IV, N° 1/ 2, Dez. Lisboa.

Ministério da Educação (1999). *Matemática – Competências Essenciais.* Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Ministério da Educação (2000). *Provas de Aferição do Ensino Básico 4º Ano - 2000.* Relatório Nacional. Lisboa: Departamento de Educação Básica.

Moura, I. (1990). Projecto Ensinar é Investigar. Lisboa.

National Council of Theachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston: NCTM.

Paisana, M. (1980). *Noção de número inteiro – Estudo dos primeiros números.* Direcção Geral do Ensino Básico, DSPRI. Lisboa.

Parra, C.; Saiz, I. (1996). *Didáctica da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Plaza, M. & Gomez, J. (1988). El Problema de la medida – Didáctica de las Magnitudes Lineales. Editorial Síntesis.

Pérez, J. (1988). *Numeros decimales. Por que? Para que?* Madrid: Editorial Sintesis, S. A.

Piaget, J. (1937). *La construction du réel chez l`enfant*, Neuchâtel: Delachaux & Niestlé.

Piaget, J. (1949). *Introduction à l`epistémologie génétique: La penseé mathématique*, Paris. P.U.F.

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number.* Londres: Humanities Press.

Piaget, J. (1967). *Six Psychological Studies.* Nova York: Vintage Books.

Piaget, J. (1970). *Science of Educacion and the Psychology of the Child.* Nova York: Viking Press.

Piaget, J. (1971). The Theory of Stages in Cognitive Development. In: *Measurement and Piaget*, editado por D. Green, M. Ford, e G. Flamer, pp.1-7. Nova York: McGraw-Hill.

Piaget, J. (1972). *Psicologia e Epistemologia.* Lisboa : Publicações D. Quixote.

Piaget, J. (1974). Need and Significance of Cross-Cultural Studies in Genetic Psychology. In: *Cultures and Cognition: Reading in Cross-Cultural Psychology*, editado por J. Berr e P. Dasen, (pp. 299-309). Londres: Methuen.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1941). *La genèse du nombre chez l'enfant.* Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Pires, I. V. (1980). *Operações binárias com números inteiros –1.* Direcção Geral do Ensino Básico (DSPRI). Lisboa.

Pires, I. V. (1983). *Medição de grandezas.* Direcção Geral do Ensino Básico. Lisboa.

Pires, I. V. (1983). *A Numeração.* Direcção Geral do Ensino Básico. Lisboa.

Pochon, L. (1991). *Connaissances Mathematiques a L'ecole Primaire. Bilan des Acquisition en Fin de Quatrieme Anneé.* Fascicule 4. Peter Lang. Berne.

Pólya, G. (1978). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Pólya, G. (1980). On Solving Mathematical Problems in High Schoool. *In Problem Solving in Schoool Mathematics.* Yearbook do NCTM, editado por Stephen Krulik, pp. 1-2. Reston, Va.: NTCM, 1980.

Ponte, J. (1992). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação, 2* (2), pp. 95- 108.

Resnick, B. (1987). *Education and learning to think.* Washington, D.C.: National Academy Press.

Sequeira, F. (1982). Psicolinguística e leitura in *O Ensino-aprendizagem do Português.* Universidade do Minho, Centro de Estudos Educacionais e Desenvolvimento Comunitário. Braga.

Sinclair, A. e Sinclair, H. (1984). Preschooll Children's interpretation of written numbers, *Human Learning*, vol.13.

Skovsmose, O. (1989). Towards a philosophy of an orinted mathematical education. In W. Blum, J. S. Berry, R. Biehler, I. Huntley, G. Kaiser-Messmer & L. Profke (Eds.), *Applications and modelling in learning and teaching mathematics.* Chichester: Ellis Horwood.

Schroenfeld, A. H. (1982). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan & NTCM.

Struik, D. (1995). Simon Stevin e as fracções decimais. *Educação e Matemática*, pp. 33 – 36.

Van Hiele, P. M. (1959). La pensée de l'enfant et la geometrie. *Bulletin de l'Association des Professeures Mathematiques de l'Enseignement Public.* (pp.198-205).

Van Hiele, P. M. (1973). *Begrip en inzicht.* Netherlands: Muusses Purmerend.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant la mathématique et la réalité.* Berne : Peter Lang.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. Carpenter, J. Moser & T. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1983). *Les problémes de type multiplicative. In L'enfant, la mathématique et la realité.* Berne : Peter Lang, pp. 161-180.

Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: As estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 5 (1), 75-90.

Vergnaud, G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In Bednarz e Garnier (Dir.) *Construction des Savoirs*. Ottawa : CIRADE, (pp. 33-40).

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactiques des mathématiques. 10, (23), 133-170.

Vergnaud, G. (1990). Preface, in: Fayol, M., *L'enfant et le nombre : du comptage à la résolution de problèmes.* Paris : Delachaux & Niestlé.

Vergnaud, G. (1991). L'appropriation du concept de nombre : Un processus de longue haleine. In J. Bideaud ; C. Meljac & J. Fischer (Eds.), Les chemins du nombre (pp. 271 – 282). Lille : Presses Universitaires de Lille.

Vergnaud, G. (1994). Apprentissages et didactiques, où en est-on ?. Paris : Hachette Éducation.

Vygostsky, L. (1977). Aprendizagem e Desenvolvimento Intelectual na Idade Escolar, In : Luria, Leontiev, Vygotsky (Eds.), *Psicologia e Pedagogia – Bases Psicológicas da Aprendizagem e do Desenvolvimento* (pp.31 – 50). Editorial Estampa. Vol.1.

Vygotsky, L. (1933/1985). Le problème de l`enseignement et du développement mental à l`âge scolaire. In : B. Schneuwly & J. P. BroncKart (Eds), *Vygotsky Aujourd`hui* (pp. 95-117). Neuchâtel, Paris: Delachaux & Niestlé.

Vygotsky, L. (1977). *Psicologia e Pedagogia.* Lisboa: Estampa.

Vygotsky, L. (1987). *A formação social da mente*. SP, Martins Fontes.

Vygotsky, L. (1988). *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* SP, Icone.

Vygotsky, L. (1934/2001). *Pensamento e Linguagem.* V. N. Gaia: Estratégias Criativas.

Ramalho, G.; Cristo, F.; Oliveira, I.; Pereira, J. & Bentes, C. (1993). *Concepção, desenvolvimento e aplicação de instrumentos de avaliação da aprendizagem em língua portuguesa e matemática: 2º ano de escolaridade.* Lisboa: I. I. E.

Rogoff, B. (1995). Socio-cultural setting, intersubjectivity, and the formation of the individual, in: J. V. Wertsch, P. del Rio, & A. Alvarez (Eds.), *Socio-cultural studies of mind,* Cambridge: Cambridge University Press, pp. 139-164.

Wadsworth, B. (2001). *Inteligência e Afectividade da Criança na Teoria de Piaget.* São Paulo: Pioneira Thomson Learnig.

Tartre, L. (1990). Development of visual cognition: Transfer effects of the Agam Program. *Journal of Applied Developmental Psychology, 11*, pp. 459-485.

ANEXOS

ANEXO A – Pedido de Colaboração

ANEXO B – Questionário

ANEXO C - Entrevista

Anexo A

Lê atentamente antes de iniciares

Hoje venho aqui pedir a tua colaboração para um estudo de investigação sobre as provas aferidas. Porque quero saber a tua opinião sobre aquilo que sentiste quando as realizaste.

Vais ter que fazer alguns exercícios, da prova de Matemática, novamente, para eu ficar a saber a tua maneira de pensar ao resolver os exercícios, quais as tuas dificuldades e quais os que resolves com facilidade.

Este trabalho não vai servir para a tua avaliação, por isso não deves estar nervosa.

Agora com calma, podes começar!

Um bom trabalho para ti.

E obrigado pela tua colaboração.

Questionário

Nome : ____

Idade: ________ Naturalidade: ____________________________

Escola : ____

1. Que provas realizaste no final do ano passado, em Maio ?

R: ____

2. Foram provas de quê ?

R: ____

3. De que te lembras dessas provas ?

R: ____

____

____

4. O que achaste de ter sido outra professora a dar-te as provas ?

R: ____

____

5. Que sentiste ao realizar a prova de Matemática ?

R: ____

____

____

6. Foi fácil ou difícil ?

R: ____

____

____

7. Na prova de Matemática que dificuldades sentiste ?

R: ____

____

____

8. Recorda-te de um exercício que tenha sido fácil.

9. E agora vê se te recordas, ainda, de um onde tenhas tido muita dificuldade, ou ~~não o tenhas resolvido.~~

10. Queres dar a tua opinião sobre a prova de avaliação aferida de Matemática que realizaste ? Escreve-a aqui.

R: ____

____

____

Muito obrigado !

Anexo C

ALGUNS EXERCÍCIOS DA PROVA DE AFERIÇÃO DE MATEMÁTICA

Instruções Gerais

Nesta prova vais encontrar perguntas de Matemática.

Precisas de: um lápis, uma borracha e uma régua graduada.

As perguntas desta prova são de vários tipos.

- **Perguntas para as quais deves escolher UMA SÓ das quatro respostas que te são apresentadas.**

  Exemplo:

  Quantos meses tem um ano?

  ☐ 6

  ☒ 12

  ☐ 24

  ☐ 36

  Neste caso, para obter uma resposta correcta, colocou-se um X no 12, porque um ano tem doze meses.

  Nas respostas a este tipo de perguntas SÓ PODES FAZER **UM** X.

  Se te enganares, apaga e faz um X na resposta correcta.

- **Perguntas em que te pedimos que completes a resposta.**

  Exemplo:

  Completa de forma a que a soma fique correcta:

  5 + ______ = 15

  Para responder correctamente, bastou colocar 10 no espaço em branco.

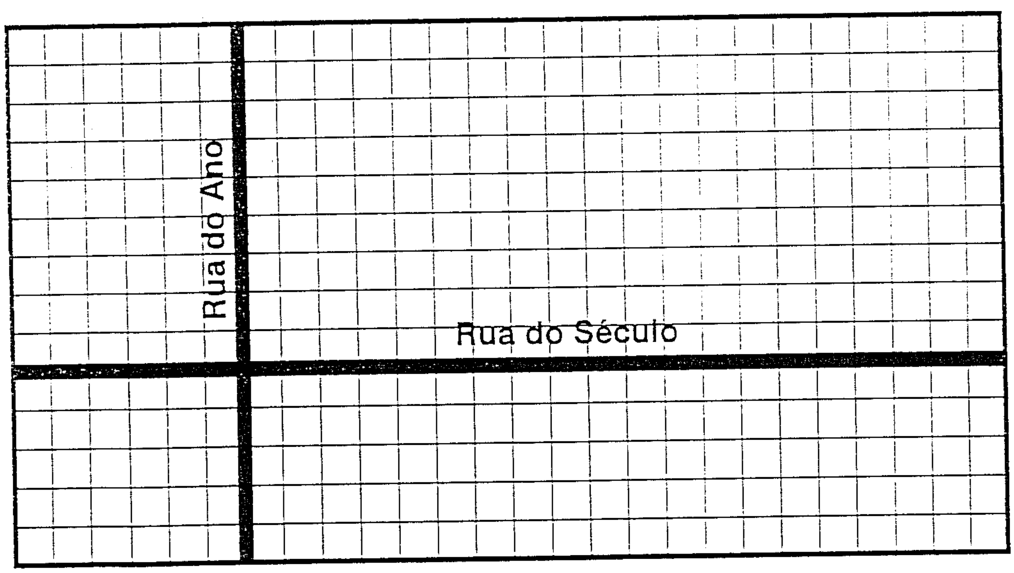
  5 + **10** = 15

Responde com atenção !

1. A expressão "dez mil e cinquenta e quatro unidades" representa a leitura de qual dos seguintes números?

- ☐ 10540
- ☐ 10054
- ☐ 1540
- ☐ 1054

2. Completa o mapa da figura, de acordo com as instruções.

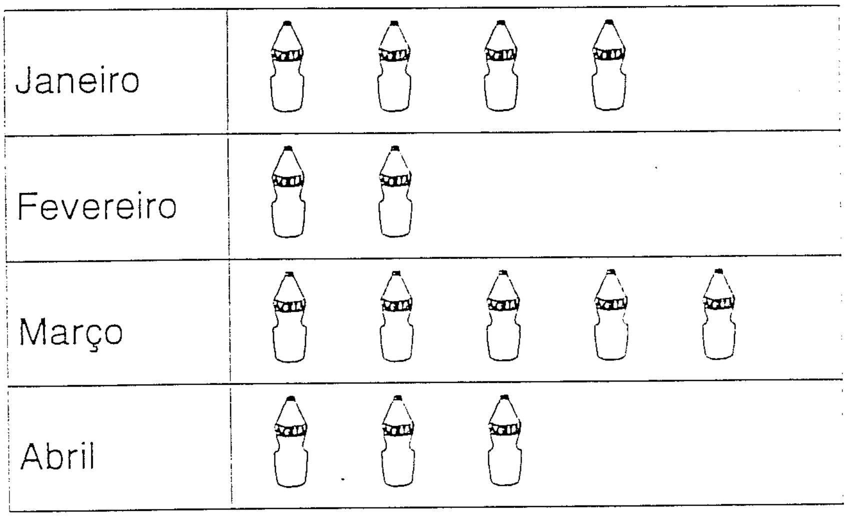


Desenha no mapa a **Rua do Tempo**, paralela **à Rua do Ano**. Escreve o seu nome.

Desenha a **Rua da Hora**, que não pode ser paralela à **Rua do Século** e também não pode ser perpendicular à **Rua do Século**. Escreve o seu nome.

3. Os meninos da escola do Ricardo andaram a recolher garrafas de plástico, para serem recicladas.
Repara na tabela onde está registado o número de garrafas que eles recolheram até ao mês de Abril.

Cada  representa 100 garrafas.



3.1. Em que mês os meninos da escola do Ricardo recolheram mais garrafas?

Resposta: ______________________________

Recorda que cada  representa 100 garrafas.

3.2. Quantas garrafas recolheram no mês de Janeiro?

Resposta: ______________________________

3.3. Quantas garrafas precisam de recolher no mês de Maio para recolherem um total de 2000 garrafas, entre Janeiro e Maio?

Resposta: ______________________________

4. O João contou três quadrados na figura A.

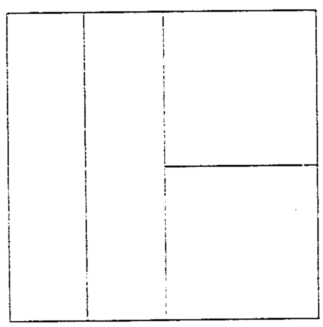


Figura A

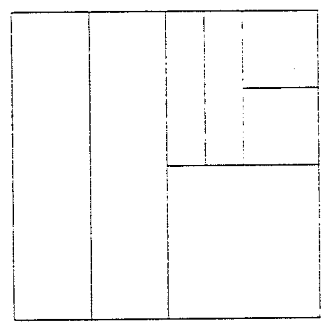


Figura B

Quantos quadrados consegues contar na figura B?

Resposta: ______________________________

5. A Joana é muito vaidosa.
Um dia foi a uma loja e comprou:

- uma saia vermelha e outra azul;
- uma camisola amarela, uma verde e outra preta.

Depois pensou: – Que bom! Agora já posso vestir-me de muitas maneiras diferentes.

De quantas maneiras diferentes se poderá vestir a Joana?

Resposta: ______________________________

Explica como encontraste a resposta. Para o fazeres, podes usar desenhos, palavras ou contas.

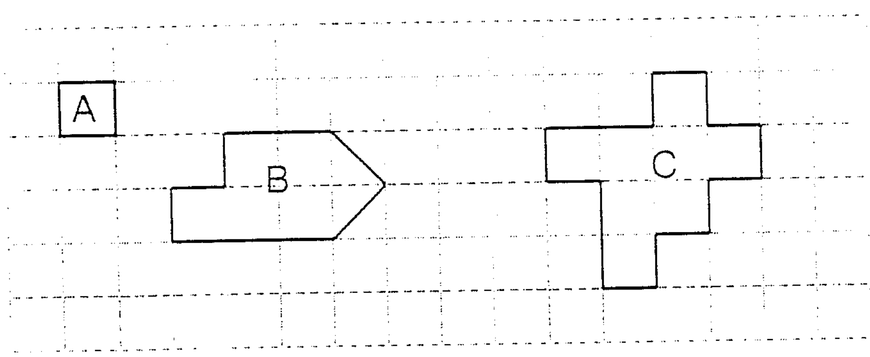
6. Escreve um número que:

- esteja entre 3960 e 4000;
- tenha como algarismo das dezenas o 8;
- seja par;
- tenha os algarismos todos diferentes.

Número: ______________________________

7. Toma, como unidade de área, a área do quadrado A.

Qual é a área de cada uma das figuras (B e C)?



Área da figura B: _______________

Área da figura C: _______________

8. Pai e filho mediram, em passos, o comprimento do jardim.
O pai contou 18 passos.

Quantos passos te parece que o filho terá contado?

Resposta: ______________________________

Explica como descobriste o número de passos que o filho contou.

9. Para a sua festa de anos, a Teresa vai encher 15 copos com sumo de laranja.

Todos os copos levam a mesma quantidade de sumo.

Para saber quantos litros de sumo vai ter de preparar, consultou a seguinte tabela:

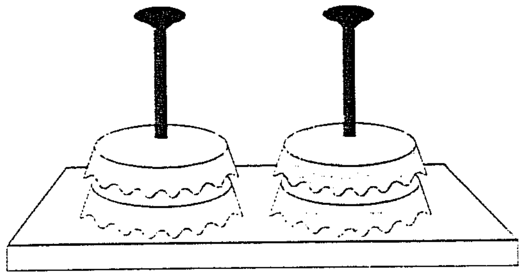
1 copo	2 copos	3 copos	4 copos	5 copos
2,5 dl	5 dl	7,5 dl	10 dl	12,5 dl

Quantos litros de sumo precisa a Teresa de preparar, para encher os 15 copos?

Resposta: ______________________________

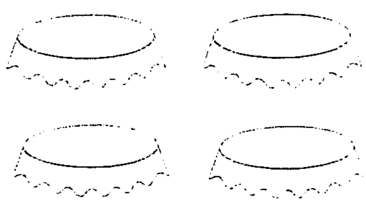
Explica como encontraste a resposta.

10. O grupo da Joana vai construir instrumentos musicais como o da figura.

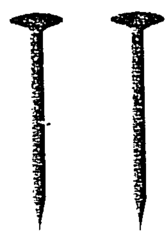


Para construírem este instrumento musical, eles precisam do seguinte material:

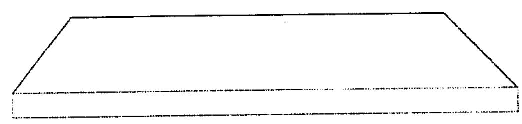
4 caricas



2 pregos



1 tábua



Descobre quantos instrumentos musicais o grupo da Joana consegue construir se tiver:

25 caricas
15 pregos
8 tábuas

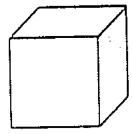
Resposta: ______________________________

Mostra como chegaste à tua resposta, usando palavras, desenhos ou contas.

(Utiliza a página seguinte para o fazeres.)

(Utiliza esta página para mostrares como chegaste à resposta da questão 10.)

11. Na figura está representado um cubo.



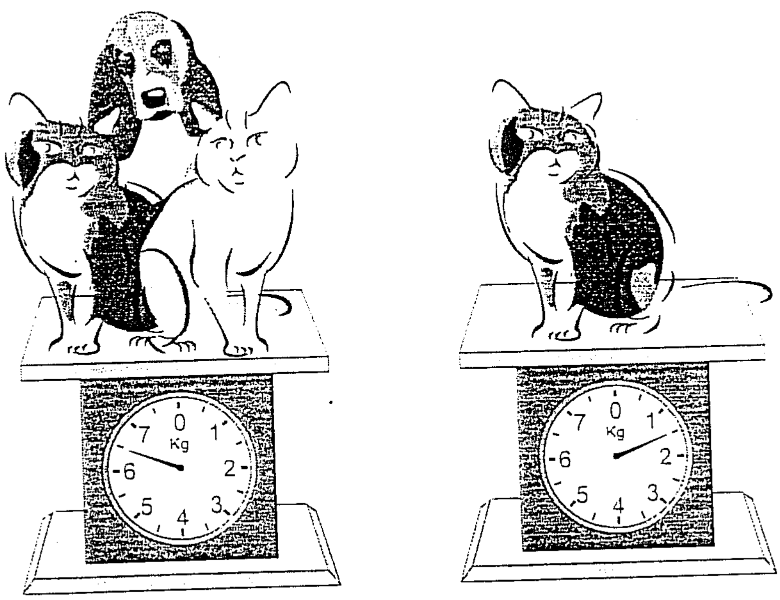
Imagina que estás ao telefone com um amigo.
Descreve-lhe este sólido de modo a que ele descubra o seu nome.
Não podes utilizar a palavra "cubo".

12. O Pedro pesou, na **balança A,** os seus dois gatos, o Cinza e o Malhado, e o seu cão Faísca.

Depois pesou só o gato Malhado na **balança B**.

Os dois gatos têm o mesmo peso.

Quanto pesa o cão do Pedro?



Balança A

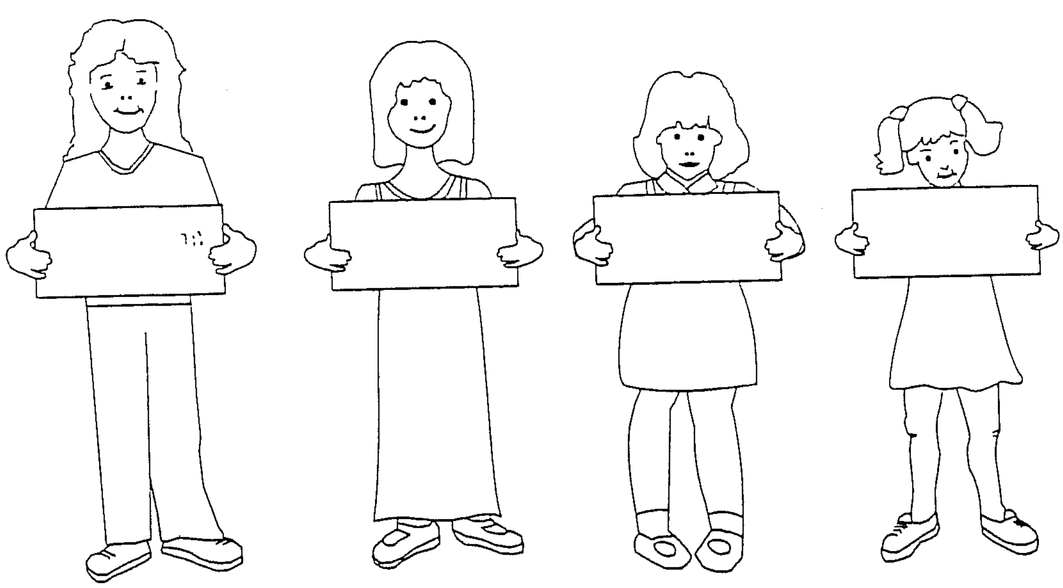
Balança B

Resposta: ______________________________

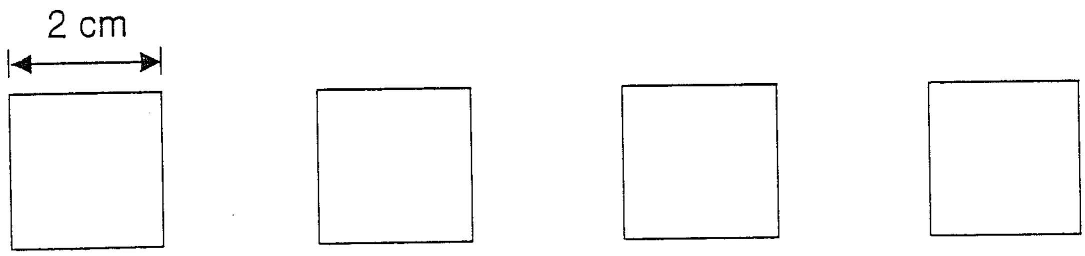
13. No quadro estão indicadas as alturas das quatro meninas da figura.

Nomes	–	**Alturas**
Joana	–	1,28 m
Laura	–	13,9 dm
Marta	–	123 cm
Rita	–	1,34 m

Escreve, em cada placa, o **nome** da menina, de acordo com a sua altura.



14.



Juntando os quatro quadrados é possível formar figuras com **20 cm de perímetro**. Descobre pelo menos duas dessas figuras e desenha-as no quadriculado.